

Colle : Variables aléatoires

1 Pour commencer

Un exercice de révision sur le calcul asymptotique, développements limités, équivalents.

2 Cours

1. Questions de la semaine précédente.
2. Définition de l'espérance, Formule du transfert
3. Énoncé et preuve de l'inégalité de Markov.
4. Résultat et preuve de si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = \dots$
5. Variance, preuve de « $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ ».
6. Énoncé et preuve de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
7. Valeurs et calculs de l'espérance des lois uniforme, de Bernoulli et binomiales.
8. Covariance, covariance de variables aléatoires indépendantes.

3 Exercices

3.1 Exercices à rédiger

1. Soient X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante. Montrer que

$$\forall a \geq 0, P(|X| \geq a) \leq \frac{E(g(|X|))}{g(a)}$$

2. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage. Quelle est la loi de X , son espérance, sa variance ?
3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$P(X = k) = a \binom{n}{k}$$

Calculer l'espérance et la variance de X .

3.2 Exercices d'entraînement

1. Exercices de la semaine précédente.
2. Soit $n > 2$ un entier naturel, on munit S_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de la probabilité uniforme.
On définit la variable aléatoire X par si $\sigma \in S_n$ alors $X(\sigma)$ est le cardinal de $\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \sigma(i) = i\}$.
On définit aussi la famille de variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ par $\forall \sigma \in S_n$ si $\sigma(i) = i$ alors $X_i(\sigma) = 1$ et sinon $X_i(\sigma) = 0$
 - a) Montrer que pour tout i , la variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre à préciser.
 - b) Exprimer X en fonction de $X_1, \dots, X_n$ et en déduire $E(X)$.

- c) Soient $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ calculer $E(X_i X_j)$
 - d) Calculer la variance de X .
3. Un étudiant résout un QCM constitué de n questions offrant chacune quatre réponses possibles. Pour chaque question, et indépendamment les unes des autres, il a la probabilité p de savoir résoudre celle-ci. Dans ce cas il produit la bonne réponse. Si en revanche, il ne sait pas résoudre la question, il choisit arbitrairement l'une des quatre réponses possibles. On note X la variable aléatoire déterminant le nombre de questions qu'il savait résoudre et Y le nombre de questions qu'il a correctement résolues parmi celles où il a répondu « au hasard ».
- a) Donner la loi de X , puis la loi conjointe de X et Y .
 - b) Reconnaitre la loi de $Z = X + Y$.
 - c) Calculer espérance et variance de Z .

3.3 Exercice complémentaire

On reprend le dernier exercice de la feuille précédente que l'on résout avec des variables aléatoires.

Une succession d'individus $A_1, \dots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui » ou « non ».

Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1 - p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

On note X_i la variable aléatoire définie par

- $X_i = 1$ si A_i transmet l'information qu'il a reçue,
- $X_i = 0$ sinon.

Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X_i ?

En utilisant les variables aléatoires $X_2, \dots, X_{n-1}$, calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1 .

On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?