LE CORPS DES NOMBRES RÉELS

Ce chapitre présente les nombres réels en admettant la propriété caractéristique de la borne supérieure. Il suppose connu les règles usuelles du calcul algébrique.

Présentation numérique

• Un nombre réel x peut être défini de façon unique par un entier $u_0 \in \mathbb{Z}$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de chiffres de $\{0\cdots 9\}$ qui ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang :

$$x = u_0 : u_1 u_2 u_3 \cdots = u_0 + \frac{u_1}{10} + \frac{u_2}{100} + \frac{u_3}{10^3} + \cdots$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \exists\, p \geq n \quad u_p \neq 9 \qquad -3,75 = -4 + \frac{25}{100} = -4 : 25000\cdots$$

∗ Les méthodes usuelles définissant les opérations sur les nombres décimaux — c'est-à-dire ayant un nombre fini de décimales non nulles — s'étendent aux nombres réels représentés de cette façon.

▶▷ Les nombres $x = 0:999\cdots$ et $x = 1:000\cdots$ sont égaux.

▷▷ Ces opérations usuelles justifient l'égalité :

$$\begin{aligned} 9 \times 0:999\cdots &= 10 \times 0:999\cdots - 0:999\cdots \\ &= 9:999\cdots - 0:999\cdots = 9 = 9 \times 1 \\ 0:999\cdots &= 1 = 1:000\cdots \end{aligned}$$

∗ L'unicité de la représentation décimale interdit l'écriture d'un nombre comme $x = 0:999\cdots$ au profit de $x = 1:000\cdots$. Il en est de même si la suite de chiffres 9 apparaît à partir d'un certain rang.

◦ La partie entière du nombre réel $x = u_0 : u_1 u_2 u_3 \cdots$ est $\lfloor x \rfloor = u_0 \in \mathbb{Z}$.

□ La partie entière $p = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ vérifie cette propriété caractéristique :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists!\, p \in \mathbb{Z} \quad p \leq x < p+1 \qquad \text{noté } p = \lfloor x \rfloor$$

∗ Ces deux encadrements sont équivalents pour définir la partie entière :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \qquad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

∗ Un nombre de la forme $m:000\cdots$ est identifié à $m \in \mathbb{Z}$.

∗ D'autres définitions équivalentes des nombres réels sont possibles. La suite de ce chapitre présente une approche plus théorique.

▶▷ Un nombre réel $x = u_0 : u_1 u_2 u_3 \cdots$ est un nombre rationnel si et seulement si sa représentation est périodique à partir d'un certain rang :

$$x = u_0 : u_1 u_2 u_3 \cdots \in \mathbb{Q} \iff \left(\exists\, n \in \mathbb{N}^* \ \exists\, p \in \mathbb{N}^* \ \forall\, k \geq n \ u_{k+p} = u_k \right)$$

▷▷ La démonstration que tout nombre de développement décimal périodique à partir d'un certain rang est rationnel, commence par vérifier qu'en particulier un nombre y de la forme $y = 0:\overline{m}\,\overline{m}\,\overline{m}\cdots$, où $\overline{m}$ est un motif de $q \in \mathbb{N}^*$ chiffres $a_1 a_2 \cdots a_q$ est un nombre rationnel :

$$m = \overline{a_1 a_2 \cdots a_q} \qquad y = 0:\overline{m}\,\overline{m}\,\overline{m}\cdots \qquad 10^q y = \overline{m}:\overline{m}\,\overline{m}\,\overline{m}\cdots$$

$$(10^q - 1) y = \overline{m} \in \mathbb{N} \qquad y = \frac{\overline{m}}{10^q - 1} \in \mathbb{Q}$$

Ce cas particulier permet de décomposer tout nombre de représentation décimal périodique à partir d'un certain rang N de motif $\overline{m}$:

$$\begin{aligned} x &= u_0 : u_1 u_2 u_3 \cdots u_{N-1} \overline{m}\,\overline{m}\,\overline{m}\cdots \\ &= \frac{u_0 u_1 u_2 u_3 \cdots u_{N-1}}{10^{N-1}} + \frac{0:\overline{m}\,\overline{m}\,\overline{m}\cdots}{10^{N-1}} \\ &= \frac{u_0 u_1 u_2 u_3 \cdots u_{N-1}}{10^{N-1}} + \frac{\overline{m}}{10^{N-1}(10^q - 1)} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

∗ Cet exemple numérique illustre la preuve précédente :

$$0,444\overline{719}719719\cdots = \frac{444}{1000} + \frac{719}{1000(1000-1)} = \frac{17771}{39960}$$

∗ L'exemple ci-dessous illustre réciproquement comment l'écriture en colonne d'une division décimale permet de déterminer les décimales d'un quotient, ici 23/28, et la périodicité à partir d'un certain rang de ces décimales :

$$
\begin{array}{ll|l}
a_0 = & 23,0 & b = 28 \\
a_1 = & \;\;6\,0 & \\
\hline
\underline{a_2 =} & \;\;\;\underline{4\,0} & 0,82\overline{\underline{1}428571}\,\underline{1}\cdots \\
a_3 = & \;\;\;\;1\,2\,0 & \\
a_4 = & \;\;\;\;\;\;8\,0 & \\
a_5 = & \;\;\;\;\;\;2\,4\,0 & \\
a_6 = & \;\;\;\;\;\;\;\;1\,6\,0 & \\
a_7 = & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;2\,0\,0 & \\
\underline{a_8 =} & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{4\,0} &
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
a_0 &= 23 \\
a_n &= 28q_n + r_n \\
a_{n+1} &= 10\,r_n \\
\overline{m} &= 142857 \\
23/28 &= 0,82\overline{m}\,\overline{m}\,\overline{m}\cdots
\end{aligned}
$$

Dès que deux de ces restes, nécessairement compris entre 0 et $b-1$, sont égaux les décimales du quotient sont périodiques à partir de ce rang.

⊳ Réciproquement tout nombre rationnel a/b possède un développement décimal périodique à partir d'un certain rang. La démonstration généralise l'idée précédente de division décimale de a/b dont les restes successifs compris entre 0 et $b-1$ ont un nombre fini b de valeurs possibles et ne sont donc pas tous différents deux à deux.
Dit autrement, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence correspondent à chaque étape de la division décimale a/b :

$a_0 = a\in\mathbb{Z}$

q_n et r_n sont le quotient et le reste de a_n par $b\in\mathbb{N}^*$

$a_{n+1} = 10\,r_n \qquad\qquad a/b = q_0 : q_1 q_2 q_3 \cdots$

Les encadrements suivants justifient que les termes $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du quotient euclidien de a_n par b sont à valeurs dans $\{0\cdots 9\}$; ces termes correspondent aux décimales du développement du quotient :

$$0 \le r_n \le b-1 \qquad 0 \le a_{n+1} = 10\,r_n \le 10(b-1) < 10b$$
$$a/b = q_0 : q_1 q_2 q_3 \cdots$$

La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend au maximum b valeurs dans $\{0\cdots b-1\}$, deux des termes de cette suite sont donc égaux, r_1 et r_7 dans l'exemple précédent.
Il existe donc deux termes égaux $r_p = r_q$ avec $p < q$, et les suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont périodiques à partir du rang p car par récurrence $a_{p+1} = a_{q+1}$, $r_{p+1} = r_{q+1}$, $q_{p+1} = q_{q+1}$, etc. et $p - q > 0$ est une période de ces suites.

∗ Le développement décimal n'est pas nécessairement périodique à partir de la première décimale, dans l'exemple précédent la décimale

$q_2 = 2$ ne se retrouve pas dans les termes périodiques du quotient.

Le corps des réels

Propriétés des nombres réels

Ce paragraphe énumère les propriétés de base de $\mathbb{R}$ sans démonstration.

■ La structure $(\mathbb{R}, +, \times)$ est celle d'un corps :

$+$ est une loi de composition interne	$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x+y\in\mathbb{R}$
associative	$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad (x+y)+z = x+(y+z)$
commutative	$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x+y = y+x$
d'élément neutre $0\in\mathbb{R}$	$\forall\,x\in\mathbb{R} \quad x+0 = 0+x = x$
d'opposé $-x\in\mathbb{R}$	$\forall\,x\in\mathbb{R} \quad x+(-x) = (-x)+x = 0$
$\times$ est une loi de composition interne	$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x\times y\in\mathbb{R}$
commutative	$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x\times y = y\times x$
associative	$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad (x\times y)\times z = x\times(y\times z)$
distributive par rapport à $+$	$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad x\times(y+z) = (x\times y)+(x\times z)$
d'élément neutre $1\neq 0$	$\forall\,x\in\mathbb{R} \quad x\times 1 = 1\times x = x$
d'inverse $1/x\in\mathbb{R}$ pour tout $x\neq 0$	$\forall\,x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \quad 1/x\times x = x\times 1/x = 1$

Les réels 0 et 1 sont appelés respectivement élément nul et élément unité.

∗ Ces propriétés caractérisent la structure de corps de $\mathbb{R}$.

■ La relation d'ordre usuelle $\le$ sur $\mathbb{R}$ est totale, et compatible avec l'addition et la multiplication :

réflexive	$\forall\,x\in\mathbb{R} \quad x\le x$
anti-symétrique	$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad (x\le y \text{ ET } y\le x) \Longrightarrow x = y$
transitive	$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad (x\le y \text{ ET } y\le z) \Longrightarrow x\le z$
ordre total	$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x\le y \text{ OU } y\le x$
compatible avec $+$	$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \quad x\le y \Longrightarrow x+z\le y+z$
compatible avec $\times$	$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad (0\le x \text{ ET } 0\le y) \Longrightarrow 0\le x\times y$

$*$ Ces propriétés définissent $\mathbb{R}$ comme un corps totalement ordonné.

▶ La règle des signes et les implications suivantes sont quelques-unes des conséquences des propriétés d'un corps totalement ordonné :

$$x \leq y \Longleftrightarrow 0 \leq y - x \Longleftrightarrow -y \leq -x$$
$$0 \leq x \leq y \ \mathsf{ET}\ 0 \leq z \leq t \Longrightarrow xz \leq yt$$
$$1 \leq x \Longrightarrow 0 < 1/x \leq 1$$

▷ La première équivalence se démontre par implications circulaires :

$$\begin{aligned} x \leq y &\Longrightarrow x + (-x) = 0 \leq y + (-x) = y - x \\ &\Longrightarrow 0 + (-y) = -y \leq y - x + (-y) = -x \\ &\Longrightarrow -y + (x+y) = x \leq -x + (x+y) = y \end{aligned}$$

La deuxième propriété se justifie par transitivité :

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \leq z \,\mathsf{ET}\, 0 \leq x < y \Longrightarrow & xz < yz \\ 0 < y \,\mathsf{ET}\ 0 \leq z < t \Longrightarrow & yz < yt \end{array}\right\} \text{ donc } xz < yt$$

La dernière preuve se justifie à partir de la règle des signes pour montrer que $1/x > 0$ et d'un produit par $1/x$:

$$0 \leq 1/x \ \mathsf{ET}\ 0 < 1 \leq x \Longrightarrow 1/x \leq x/x = 1$$

▶ Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien, ceci signifie qu'il vérifie cette propriété :

$$\forall\, h > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \quad nh \geq 1$$

▷ Pour tout $h > 0$ l'entier $n = \lfloor 1/h \rfloor + 1 > 1/h \in \mathbb{N}^*$ convient :

$$\lfloor 1/h \rfloor \leq 1/h < n = \lfloor 1/h \rfloor + 1 \qquad 1 = h/h < hn$$

Majorant et plus grand élément d'une partie

• Les nombres réels m et M sont respectivement un minorant et un majorant du sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ à ces conditions :

$$\forall\, a \in A \quad m \leq a \qquad\qquad \forall\, a \in A \quad a \leq M$$

$*$ Un réel u n'est pas un minorant de A à cette condition obtenue par négation de la proposition précédente :

$$\begin{aligned} u \text{ n'est pas un minorant de } A &\Longleftrightarrow \mathsf{NON}\ \big(\forall\, a \in A \quad u \leq a\big) \\ &\Longleftrightarrow \big(\exists\, a \in A \quad a < u\big) \end{aligned}$$

Dans le corps totalement ordonné $\mathbb{R}$ la négation de $u \leq a$ est $a < u$.

$*$ Les ensembles des majorants de $[1,\ 2]$ et $]1,\ 2[$ sont identiques :

$[2,\ +\infty[$.

■ Le plus grand élément d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est défini par ces deux conditions, et, quand il existe, est unique et noté $\max A$:

$$\max A \in A \ \mathsf{ET}\ \big(\forall\, a \in A \quad a \leq \max A\big)$$

Le plus petit élément est défini de façon analogue et est noté $\min A$:

$$\min A \in A \ \mathsf{ET}\ \big(\forall\, a \in A \quad \min A \leq a\big)$$

◊ Ces propositions prouvent l'unicité de $\max A$ en supposant que $u_1 \in A$ et $u_2 \in A$ vérifient la définition de $\max A$:

$$\begin{array}{llll} \forall\, a \in A \quad a \leq u_1 & u_2 \leq u_1 & \text{pour } a = u_2 & \\ \forall\, a \in A \quad a \leq u_2 & u_1 \leq u_2 & \text{pour } a = u_1 & \text{donc } u_1 = u_2 \end{array}$$

▶ Certains sous-ensembles de $\mathbb{R}$ comme $]1,\ +\infty[$ n'ont ni de plus petit élément ni de plus grand élément.

▷ Par l'absurde si le plus petit élément u de $A =]1,\ +\infty[$ existe, alors $v = (1+u)/2$ vérifie $1 < v < u$, $v \in A$ et $v < u$; ceci contredit que u est le plus petit élément de A.
Par l'absurde si w est le plus grand élement de A alors $w + 1 \in A$, et $w + 1 > w$ contredit que w est le plus grand élément de A.

$*$ Le plus grand élément $\max A$ de $A \subset \mathbb{R}$ est un majorant de A.

$*$ Toute partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas majorée n'a pas de plus grand élément.

$*$ La propopriété *tout nombre u plus petit que* $\min A$ *n'est pas dans* A est la contraposée d'ue partie la définition de $\min A$:

$$u \in A \Longrightarrow u \geq \min A \qquad u < \min A \Longrightarrow u \notin A$$

$*$ Tout nombre réel u majore l'ensemble vide $\emptyset$, ces trois propositions sont équivalentes. La dernière est vraie car l'implication $\mathsf{F} \Longrightarrow \cdots$ est une proposition mathématiquement vraie :

$$\begin{aligned} \forall\, a \in \emptyset \quad a \leq u &\Longleftrightarrow \big(\forall\, a \quad a \in \emptyset \Longrightarrow a \leq u\big) \\ &\Longleftrightarrow \big(\forall\, a \quad \mathsf{F} \Longrightarrow a \leq u\big) \end{aligned}$$

Borne supérieure et principe de la coupure

Borne supérieure et borne inférieure

• La borne supérieure d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est, quand il existe, le plus petit des majorants de A et est noté $\sup A$; de même la borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A :

$$\sup A = \min \left\{M \in \mathbb{R} \,\middle/\, \forall a \in A \ a \leq M\right\}$$
$$\inf A = \max \left\{m \in \mathbb{R} \,\middle/\, \forall a \in A \ m \leq a\right\}$$
$$\inf\,]1,\,2] = 1 \qquad \sup\,]1,\,2] = 2$$

∗ Tout ensemble possèdant une borne supérieure est donc majoré.

■ La propriété caractéristique de la borne supérieure est la suivante :

$$\begin{aligned} c = \sup A &\iff (\forall a \in A \quad a \leq c) \text{ ET } (\forall d < c \quad \exists \alpha \in A \quad d < \alpha) \\ &\iff (\forall a \in A \quad a \leq c) \text{ ET } (\forall h > 0 \quad \exists \alpha \in A \quad c - h < \alpha) \end{aligned}$$

Autrement dit la borne supérieure c est un majorant et tout réel strictement plus petit n'est pas un majorant.

★ Les démonstrations sur la borne supérieure exploitent généralement cette propriété caractéristique plutôt que sa définition.

∗ Aucune modification des inégalités strictes ou larges n'est possible dans ces propriétés.

∗ Les nombres $h > 0$ et $d < c$ de ces deux propositions sont reliés par les égalités $h = c - d > 0$ et $d = c - h < c$, où h représente la distance entre c et d.

◊ La définition même de $\sup A$ qui est le plus petit des majorants de A démontre le sens direct de l'équivalence. $\sup A$ est un majorant de A et tout nombre plus petit n'est pas un majorant :

$$\exists \alpha \in A \quad d < \alpha$$

Réciproquement la propriété caractéristique énonce que d'une part que c est un majorant de A, et d'autre part que tout nombre $d < c$ prouve que d n'est pas un majorant de A par l'existence de α. Ainsi c est le plus petit des majorants de A et $c = \sup A$.

□ La propriété caractéristique de la borne inférieure est similaire :

$$\begin{aligned} c = \inf A &\iff (\forall a \in A \quad a \geq c) \text{ ET } (\forall d > c \quad \exists \alpha \in A \quad \alpha < d) \\ &\iff (\forall a \in A \quad a \geq c) \text{ ET } (\forall h > 0 \quad \exists \alpha \in A \quad \alpha < c + h) \end{aligned}$$

○ La borne supérieure d'un ensemble A non majoré n'est pas définie et est notée par convention $\sup A = +\infty$. De même la borne inférieure d'un ensemble non minoré est $\inf A = -\infty$.

∗ L'ensemble vide $\emptyset$ n'a pas de borne supérieure car l'ensemble de ses majorants est $\mathbb{R}$ qui n'a pas de plus grand élément.

➤ Le plus grand élément et la borne supérieure d'un sous-ensemble A sont reliés par ces implications :

$$\sup A \text{ [existe et]} \in A \Longrightarrow \max A \text{ [existe et]} = \sup A$$
$$\max A \text{ existe} \Longrightarrow \sup A \text{ [existe et]} = \max A$$

▷ Dans le premier cas $\sup A \in A$ est un majorant de A dans A, et correspond à la définition de $\max A$.
Dans le second cas $\max A$ est un majorant de A et tout réel d plus petit que $\max A$ n'est pas un majorant de A car $d < \max A \in A$. Ainsi $\max A$ vérifie la propriété caractéristique de la borne supérieure et $\max A = \sup A$.

Ensembles adjacents

○ Deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ sont adjacents si et seulement si $\sup A$ et $\inf B$ existent et sont égaux : $\sup A = \inf B$.

□ Cette propriété caractérise deux ensembles adjacents :

$$\exists!\, c \in \mathbb{R} \quad \forall (a,b) \in A \times B \quad a \leq c \leq b \quad \text{dans ce cas } c = \sup A = \inf B$$

◊ Si $\sup A = \inf B = c$ alors les premiers termes des propriétés caractéristiques de $\sup A$ et $\inf B$ justifient $a \leq \sup A = \inf B \leq b$:

$$\big(\forall a \in A \quad a \leq c\big) \text{ ET } \big(\forall u < c \quad \exists \alpha \in A \quad u < \alpha\big)$$
$$\big(\forall b \in B \quad c \leq b\big) \text{ ET } \big(\forall v > c \quad \exists \beta \in B \quad \beta < v\big)$$

L'unicité de c provient des second termes. Si $d \neq c$ alors $d < c$ ou $d > c$. Dans le premier cas $u = d$ justifie l'existence de $\alpha \in A$ vérifiant $d < \alpha$, et dans le second $v = d$ celle de $\beta \in B$ tel que $\beta < d$. Dans ces deux cas l'existence de α ou de β prouve que l'encadrement $a < d < b$ n'est pas vrai pour tous les éléments de A et de B.

◊ Réciproquement montrons d'abors que $c = \sup A$ par la propriété

caractéristique de $\sup A$. L'encadrement $a \leq c \leq b$ justifie directement $a \leq c$.
Si $d < c$ alors $d \neq c$ et l'uncité de c prouve que l'encadrement $a \leq d \leq b$ n'est pas vrai pour tous les nombres de A et de B.
L'encadrement $d < c \leq b$ est vérifié pour tout élément de B, l'inégalité $a \leq d$ n'est donc pas valable sur A ; ainsi il existe $\alpha \in A$ tel que $d < \alpha$.
Ces deux arguments justifient que $c = \sup A$.
La démonstration de $c = \inf B$ est similaire en changeant ces inégalités.

Propriété de la borne supérieure

■ Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

□ De façon équivalente toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

★ Il suffit de montrer qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ n'est pas vide et est majorer pour justifier l'existence de $\sup A$.

∗ Selon la construction de $\mathbb{R}$ choisie ces propositions peuvent être des théorèmes ou des axiomes caractérisant l'ensemble des nombres réels, il porte le nom de *propriété de la borne supérieure* ou de *principe de la coupure.*

Ce cours n'approfondit aucune construction de $\mathbb{R}$ et admet cette propriété. De nombreux théorèmes d'analyse présentés dans les chapitres suivants reposent sur cette propriété caractéristique.
Plus précisément ce théorème admis fonde l'analyse réelle : « Tout corps totalement ordonné et archimédien qui respecte le principe de la coupure est unique aux notations près, il correspond au corps des nombres réels. »

Exemple d'opérations sur les bornes supérieures

▶▷ Déterminer les bornes et les éventuels plus grand élément et plus petit élément de cet ensemble :

$$A = \left\{ \frac{n}{2+n^2} \;/\; n \in \mathbb{N}^* \right\} \qquad u_n = \frac{n}{2+n^2} > 0 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

▷▷ L'ensemble A est minoré par 0 et n'est pas vide, ainsi $\inf A$ existe. Le fait que la suite tende vers 0 permet de montrer que $\inf A = 0$. Exploiter la propriété caractéristique est l'une des possibilités :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n}{2+n^2} > 0\right) \text{ ET } \left(\forall d > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n}{2+n^2} < d\right)$$

La première proposition est évidente, il reste à montrer la seconde. Soit $d > 0$ cherchons $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant cette première inégalité ; les autres permettent de déterminer plus facilement n :

$$\frac{n}{2+n^2} < d \qquad \frac{n}{2+n^2} < \frac{1}{n} < d \qquad n > \frac{1}{d}$$

L'analyse du problème suggère de vérifier que l'entier strictement positif $n = \lfloor 1/d \rfloor + 1 > 1/d$ convient :

$$n = \lfloor 1/d \rfloor + 1 > \frac{1}{d} \qquad \frac{1}{n} < d \qquad \frac{n}{2+n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < d$$

Ainsi $\alpha = u_n \in A$ vérifie $u_n < d$. En conclusion $\inf A = 0$.
Comme $\inf A = 0 \notin A$ l'ensemble A n'a pas de plus petit élément, et $\min A$ n'est pas défini :

$$\inf A = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n}{2+n^2} = 0 \qquad \min A \text{ n'est pas défini}$$

▷▷ L'étude des variations de f détermine le maximum de f pour les nombres réels puis pour les entiers :

$$f(x) = \frac{x}{2+x^2} \qquad f'(x) = \frac{2+x^2-2x^2}{(2+x^2)^2} = \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$$

L'application f est donc croissante sur $\left[0, \sqrt{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$. Le maximum de f est obtenu pour $x = \sqrt{2}$ et $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}/4$.
L'encadrement $1 < \sqrt{2} < 2$ justifie donc que la plus grande valeur de u_n est u_1 ou u_2, car $u_p \leq u_2$ si $p \geq 2$. Les valeurs de $u_1 = 1/3$ et $u_2 = 2/6 = 1/3$ prouvent donc $\max A = \sup A = 1/3$.

$$\sup A = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n}{2+n^2} = \max A = \max_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n}{2+n^2} = \frac{1}{3}$$

▶▷▷ Tout sous-ensemble A supposé non vide et majoré de $\mathbb{R}$ vérifie $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ lorsque $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

∗ Cette égalité est valable pour $\lambda = 0$ car $A \neq \emptyset$ et $0 \cdot A = \{0\}$.
Les preuves suivantes supposent $\lambda > 0$.

⊳⊳ Une première démonstration de $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ lorsque $\lambda > 0$ consiste à vérifier que $\lambda \sup A$ vérifie la propriété caractéristique de la borne supérieure de λA.
Soit $b \in \lambda A$, les propriétés suivantes prouvent que $\lambda \sup A$ majore λA :

$$\frac{b}{\lambda} \in A \qquad \frac{b}{\lambda} \leq \sup A \qquad b = \lambda \frac{b}{\lambda} \leq \lambda \sup A$$

Soit $h > 0$ le deuxième membre de la propriété caractéristique appliquée à A et $h/\lambda > 0$ aboutit à ces propriétés :

$$\exists\, \alpha \in A \quad \sup A - \frac{h}{\lambda} < \alpha \qquad\qquad \lambda\alpha \in \lambda A \ \text{ET}\ \lambda \sup A - h < \lambda\alpha$$

∗ La rédaction de la démonstration semble plus facile à partir de la propriété caractéristique contenant $h > 0$ qu'à partir de celle en $d < c$.

∗ La méthode est la même pour démontrer $\inf(-A) = -\sup A$.

⊳ Une deuxième démonstration possible de cette propriété prouve une première inégalité sur $\sup A$, puis applique cette inégalité à l'ensemble λA à la place de A, et $1/\lambda$ à la place de λ :

$$\forall\, a \in A \quad a \leq \sup A \qquad \lambda a \leq \lambda \sup A$$

Ainsi $\lambda \sup A$ majore $\lambda A \neq \emptyset$ donc $\sup(\lambda A) \leq \lambda \sup A$.
Appliquer l'inégalité précédente à λA et $1/\lambda$ aboutit à l'inégalité réciproque :

$$\frac{1}{\lambda}\lambda A = A \quad \sup\Big(\frac{1}{\lambda}\lambda A\Big) = \sup A \leq \frac{1}{\lambda}\sup(\lambda A) \quad \lambda \sup A \leq \sup(\lambda A)$$

En conclusion $\lambda \sup A = \sup(\lambda A)$ lorsque $\lambda > 0$, et cette égalité est encore valable si $\lambda = 0$.

► Les sous-ensembles A et B non vides et majorés de $\mathbb{R}$ vérifient la propriété $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

⊳ La preuve de $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ à partir de la propriété caractéristique est similaire. Une preuve de la première proposition est la suivante :

$$\forall\, a \in A \quad a \leq \sup A \qquad\qquad \forall\, b \in B \quad b \leq \sup B$$
$$\forall\, c \in A+B \quad c \leq \sup A + \sup B$$

La démonstration de la seconde proposition pour $A + B$ provient de des propriétés correspondantes pour A et B appliquées à $h/2 > 0$:

$$\exists\, \alpha \in A \quad \sup A - \frac{h}{2} < \alpha \qquad\qquad \exists\, \beta \in B \quad \sup B - \frac{h}{2} < \beta$$
$$\alpha + \beta \in A + B \qquad\qquad \sup A + \sup B - h < \alpha + \beta$$

En conclusion les deux propositions de la propriété caractéristique de la borne supérieure de $A + B$ sont vérifiées par $\sup A + \sup B$:

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

Intervalles

○ Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble caractérisé ainsi :

$$\forall\, (u,v) \in I^2 \quad [u,\, v] \subset I \qquad \text{où } [u,\, v] = \big\{x \in \mathbb{R} \;\big/\; u \leq x \leq v\big\}$$

∗ Un tel ensemble qui contient tout le segment $[u,\, v]$ dès que u et v sont des points de l'ensemble est appelé convexe.
Cette définition énonce donc que les convexes de $\mathbb{R}$ sont appelés intervalles.

□ Les différentes sortes d'intervalles sont les suivants où $a < b$:

intervalles ouverts	$]a,\, b[= \big\{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x < b\big\}$
	$]a,\, +\infty[= \big\{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x\big\}$
	$]-\infty,\, b[= \big\{x \in \mathbb{R} \;/\; x < b\big\}$
intervalles fermés	$[a,\, b] = \big\{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leq x \leq b\big\}$ appelé segment
	$[a,\, +\infty[= \big\{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leq x\big\}$
	$]-\infty,\, b] = \big\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \leq b\big\}$
ni ouverts ni fermés	$]a,\, b] = \big\{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x \leq b\big\}$
	$[a,\, b[= \big\{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leq x < b\big\}$
autres intervalles	$\emptyset =]a,\, a[\qquad \mathbb{R} =]-\infty,\, +\infty[\qquad \{a\} = [a,\, a]$

◊ La démonstration consiste à énumérer les différents cas suivant que I est majoré ou non, minoré ou non, admet un plus petit élément ou non, etc.

Borne supérieure et nombres rationnels

$*$ Le corps $\mathbb{Q}$ est totalement ordonné et archimédien, comme $\mathbb{R}$.

► L'étude du sous-ensemble $\mathcal{E} = \left\{x \in \mathbb{Q}_+ \;/\; x^2 < 2\right\}$ de $\mathbb{Q}$ justifie que le corps $\mathbb{Q}$ ne respecte pas le principe de la coupure.

$*$ Il suffit de démontrer que $\mathcal{E}$ n'est pas vide, est majoré et n'admet pas de borne supérieure $c \in \mathbb{Q}$.
La preuve par l'absurde que la borne supérieure c n'existe pas justifie qu'aucune des trois conditions $c^2 = 2$, $c^2 < 2$ et $c^2 > 2$ n'est possible.

⊳ Le sous-ensemble $\mathcal{E} = \left\{x \in \mathbb{Q}_+ \;/\; x^2 < 2\right\}$ de $\mathbb{Q}$ est non vide, car $1 \in \mathcal{E}$, et majoré par 2 :

$$\forall x \in \mathbb{Q}_+ \quad x \geq 2 \Longrightarrow x^2 \geq 2 \quad \text{par les inégalités usuelles sur } \mathbb{Q}_+$$
$$\forall x \in \mathbb{Q}_+ \quad x^2 < 2 \Longrightarrow x < 2 \quad \text{par contraposée, 2 majore } \mathcal{E}.$$

Par ailleurs ces remarques sur $\mathcal{E}$ justifient que $1 \leq c \leq 2$.

⊳ La preuve que $c^2 = 2$ est impossible lorsque $c \in \mathbb{Q}$ est une démonstration par l'absurde de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Si la forme irréductible de $c \in \mathbb{Q}$ est $c = p/q$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $q > 0$ le plus petit possible, alors les implications suivantes montrent successivement que p est pair, puis que q est pair, et donc que la fraction p/q n'est pas irréductible, ce qui contredit l'hypothèse que $c = p/q$ est irréductible. Toutes les variables de cette démonstration sont entières :

$$(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1 \in 2\mathbb{Z} + 1$$
$$n \in 2\mathbb{Z} + 1 \Longrightarrow n^2 \in 2\mathbb{Z} + 1 \quad \text{a pour contraposée } n^2 \in 2\mathbb{Z} \Longrightarrow n \in 2\mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
c^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} &\Longrightarrow 2q^2 = p^2 && \text{et } p \text{ est pair, de la forme } p = 2\widetilde{p} \\
&\Longrightarrow 2q^2 = 4\widetilde{p}^2 \\
&\Longrightarrow q^2 = 2\widetilde{p}^2 && \text{et } q \text{ est pair, de la forme } q = 2\widetilde{q} \\
&\Longrightarrow c = \frac{p}{q} = \frac{2\widetilde{p}}{2\widetilde{q}} = \frac{\widetilde{p}}{\widetilde{q}} && \text{et } 0 < q < \widetilde{q}
\end{aligned}$$

Cette démonstration aboutit à la contradiction que $c = p/q$ n'est pas irréductible malgré l'hypothèse initiale ; elle prouve donc que $c \in \mathbb{Q}$ et $c^2 = 2$ est impossible.

⊳ La preuve de l'impossibilité de l'hypothèse $c^2 < 2$ consiste à chercher $h \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $c + h \in \mathcal{E}$, c'est-à-dire $(c+h)^2 < 2$, et ainsi c n'est

pas un majorant de $\mathcal{E}$.
Il suffit donc de trouver $h > 0$ tel que $2 - (c+h)^2 > 0$; le calcul ci-dessous vérifie que la valeur suivante de $h > 0$ convient :

$$u = 2 - c^2 \in \mathbb{Q}_+^* \qquad h = \min\left(1, \frac{u}{6}\right) \in]0,\, 1] \cap \mathbb{Q}$$
$$0 < h^2 \leq h \qquad \text{car } 0 < h \leq 1$$
$$\begin{aligned}
2 - (c+h)^2 = 2 - c^2 - 2ch - h^2 &= u - 2ch - h^2 \geq u - 2ch - h \\
&\geq u - 5h \geq \frac{u}{6} > 0 \qquad \text{car } 1 \leq c \leq 2 \text{ et } h \leq \frac{u}{6}
\end{aligned}$$

En conclusion $c + h > c$ et $c + h \in \mathcal{E}$, ainsi c n'est pas un majorant de $\mathcal{E}$ et donc $c = \sup \mathcal{E}$ est impossible.

⊳ De même la condition $c^2 > 2$ est impossible car elle entraînerait l'existence de $h \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $(c-h)^2 > 2$.
Dans ce cas tout élément de x de $\mathcal{E} \subset \mathbb{Q}_+$ vérifierait $x^2 < 2 < (c-h)^2$ ainsi $x < c - h$, et donc $c - h$ serait un majorant de $\mathcal{E}$ strictement plus petit que c.
La valeur suivante de $h \in \mathbb{Q}_+^*$ convient car $1 \leq c \leq 2$:

$$u = c^2 - 2 \in \mathbb{Q}_+^* \qquad h = \min\left(1, \frac{u}{4}\right) \in]0,\, 1] \cap \mathbb{Q}$$
$$0 \leq c - h \quad \text{car } c \geq 1 \qquad 2 \leq c \quad \text{car } c \geq 1$$
$$0 < h^2 \leq h \quad \text{car } 2 \in \mathcal{E}$$
$$(c-h)^2 - 2 = c^2 - 2 - 2ch + h^2 = u - 2ch + h^2 \geq h^2 > 0$$

$*$ Au contraire si $\mathcal{E}$ est considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{E}$ possède une borne supérieure car l'ensemble est non vide et majoré.
Les mêmes arguments dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{Q}$ justifient que la borne supérieure $s = \sup \mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ ne vérifie ni $s^2 < 2$ ni $s^2 > 2$, ainsi $s^2 = 2$. Cette propriété peut être une définition de $\sqrt{2}$.