MPSI2

Dénombrement

Objectifs du chapitre :

- être capable d'analyser correctement un énoncé pour choisir le bon type d'outil de dénombrement, et mener un raisonnement combinatoire clair et rigoureux
- manipuler sans hésitation les coefficients binomiaux

Es-tu capable de répondre à ces questions ?

- Un tirage de Loto consiste a tirer sept boules dans une urne en contenant 49 (numérotées de 1 à 49). Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- Il y a 48 éléves dans la classe. Quelle est la probabilité qu'il y en ait (au moins) deux parmi vous qui soient nés le méme jour de l'année ?
- On veut répartir les 48 éléves de la classe en 16 trinômes de colles. Combien y a-t-il de répartitions possibles (l'ordre des trinômes ainsi que l'ordre des éléves au sein de chaque trinôme n'étant pas important) ?

Un peu de patience ! en fin de chapitre, tu seras en mesure d'y répondre.

1/ Cardinaux d'ensembles finis

a) définition et première propriété

Définition

- On dit qu'un ensemble E est en bijection avec un ensemble F si il existe une bijection de E dans F.
- Un ensemble E est **fini** s'il est en bijection avec l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$, pour un certain entier naturel n. Cet entier n est alors unique, il est appelé cardinal de l'ensemble , et on le note $Card(E)$, ou $|E|$, ou encore $\#E$.

Remarques :

- cela correspond bien à la notion intuitive d'ensemble dont on peut compter les éléments. En effet, une bijection de E vers $\{1, ..., n\}$ est simplement une façon d'étiqueter les éléments de E avec les nombres $1, 2, \dots, n$.
- Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.
- $|\emptyset| = 0$

Dans tout ce qui suit, E désigne un ensemble fini.

Propriété

Soit F un ensemble fini. Si E et F sont en bijection l'un avec l'autre, ils ont même cardinal.

Démonstration :

Propriété

Soit E un ensemble non vide et $a \in E$. Alors $E \backslash \{a\}$ est fini et a pour cardinal : $|E| - 1$

Démonstration (colles) :

b) cardinal d'un sous ensemble

Propriété

Soit F un sous-ensemble de E, alors F est un ensemble fini, et $|F| \leq |E|$,
avec égalité si et seulement si $E = F$.

Démonstration (par récurrence) :

c) opérations sur les cardinaux

Propriété **union disjointe**

Soient A et B deux sous-ensembles disjoints de E. Alors $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Démonstration :

Propriété **complémentaire**

Soit A un sous-ensemble fini de E et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Alors $|\overline{A}| = |E| - |A|$.

Démonstration :

Propriété **différence**

Soient A et B deux sous-ensembles de E. Alors : $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$

Démonstration :

Conséquence **union quelconque**

Soient A et B deux sous-ensembles de E. Alors $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Démonstration :

Propriété **produit cartésien**

Soient E et F deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini, et $|E \times F| = |E| \times |F|$.

idée de la démonstration :
Soit n le cardinal de E et $e_1, e_2, \dots, e_n$ ses éléments
Soit p le cardinal de F et et $f_1 \dots, f_p$ ses éléments.
On peut placer les éléments de $E \times F$ dans un tableau.
Il y a bien $n \times p$ éléments dans ce tableau,
donc également dans $E \times F$.

	e_1	e_2	$\dots$	e_n
f_1	(e_1, f_1)	(e_2, f_1)	$\dots$	(e_n, f_1)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f_p	(e_1, f_p)	(e_2, f_p)	$\dots$	(e_n, f_p)

2/ Applications et ensembles finis

Propriété

- Si F est un ensemble fini et s'il existe une application injective de E dans F alors E est fini et $|E| \leq |F|$.
- Si E est un ensemble fini et s'il existe une application surjective E dans F alors F est fini et $|E| \geq |F|$.
- Si E et F sont des ensembles finis tels que $|E| = |F|$ et si f est une application de E dans F, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective}$$

Attention ! Ce théorème s'applique dès que $E = F$ est un ensemble fini. Il ne s'étend pas aux ensembles quelconques. Par exemple, l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array}$ est injective mais non bijective
et l'application $g : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto max(n-1, 0) \end{array}$ est surjective mais non bijective.
Ceci prouve que $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini.

Démonstration du dernier point (colles)

Notation : Soit F un ensemble fini. L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E.

Propriété

Soit E un ensemble de cardinal n et F de cardinal p.
Alors le nombre d'applications de E dans F, c'est-à dire le cardinal de F^E est p^n.

Démonstration (colles)

3/ Listes, permutations, arrangements et combinaisons

a) listes

Définition

Soit E un ensemble de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}$. Une **p-liste** d'éléments de E, ou p-uplet d'éléments de E, est une suite ordonnée de p éléments de E (éléments non nécessairement distincts).

Remarques : dans une p-liste,
- l'ordre des éléments de la p-liste est important
- les répétitions d'éléments sont possibles.

Propriété

Le nombre total de p-listes dans un ensemble de cardinal n vaut n^p.

Démonstration : C'est une conséquence de la formule de cardinal du produit vue un peu plus haut : comme $|E \times F| = |E| \times |F|$, on a $|E^p| = |E|^p$, ce qui prouve bien la propriété.

Exemple : Dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, on tire quatre boules successivement avec remise. Le nombre de tirages possibles est de $10^4 = 10000$ (il y a répétition possible à cause des remises, et l'ordre est important).

b) arrangements

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$.
On appelle p-**arrangement** d'éléments de E toute p-liste d'éléments **distincts** de E.

Remarques : dans un arrangement,
- l'ordre des éléments est toujours important
- par contre, les répétitions d'élément ne sont pas autorisées.

Propriété

Le nombre de p-arrangements d'un ensemble à n éléments est noté A_n^p et vaut :
$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Démonstration (colles) :

Exemple : On reprend la même urne que précédemment, mais on tire les quatre boules successivement sans remise. Le nombre de tirages possibles est désormais de $\dfrac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\ 040$.

Définition

Un arrangement de n éléments dans un ensemble à n éléments est aussi appelé **permutation** de cet ensemble. Il y a donc $n!$ permutations dans un ensemble à n éléments.

Remarque : le nom de permutation vient du fait que choisir un arrangement de tous les éléments d'un ensemble revient tout simplement à définir un ordre sur les éléments de l'ensemble. Il y a donc $n!$ ordres possibles sur un ensemble à n éléments.

Exemple : le nombre d'anagrammes d'un mot peut se calculer à l'aide de permutations. Il faut simplement diviser le nombre total du permutations du mot par $k!$ chaque fois qu'une même lettre apparait k fois dans le mot (ainsi, s'il y a trois E dans le mot, on divise par 3! car les permutations qui se contentent d'échanger les E entre eux ne modifient pas l'anagramme). Par exemple, le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT est $\dfrac{12!}{3! \times 2! \times 2!} = 19\ 958\ 400$.

c) combinaisons

Définition

- Une **combinaison** de p éléments dans un ensemble fini à n éléments est un sous-ensemble à p éléments de E.
- Soient n et p deux entiers tels que $p \leq n$. On appelle **coefficient binomial** d'indices n et p le nombre $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ (qui se lit « p parmi n »).

Convention : pour $p > n$, on pose : $\dbinom{n}{p} = 0$

Propriété

Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments vaut $\binom{n}{p}$

Démonstration : En effet, une combinaison n'est rien d'autre qu'un arrangement dans lequel on a enlevé l' importance de l'ordre. Autrement dit, chaque combinaison apparait $p!$ fois quand on dénombre les arrangements (puisqu'il y a $p!$ façons d'ordonner un ensemble à p éléments), donc le nombre de combinaisons à p éléments vaut $\dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemple : toujours dans la même urne que précédemment, on tire désormais les quatre boules simultanément. Le nombre de tirages possibles est $\binom{10}{4} = \dfrac{10!}{4!6!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$

Notation : Si E est un ensemble alors on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n.
Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

Démonstration (colles) :

Propriété

- **Symétrie :** $\forall \ 0 \leq p \leq n : \quad \binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$
- **Triangle de Pascal :** $\forall \ 1 \leq p \leq n : \quad \binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$

Démonstration au programme (second point colles) :

Théorème **Formule du Binôme de Newton**

Étant donnés deux éléments a et b d'un anneau commutatif, on a quelque soit l'entier naturel n :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

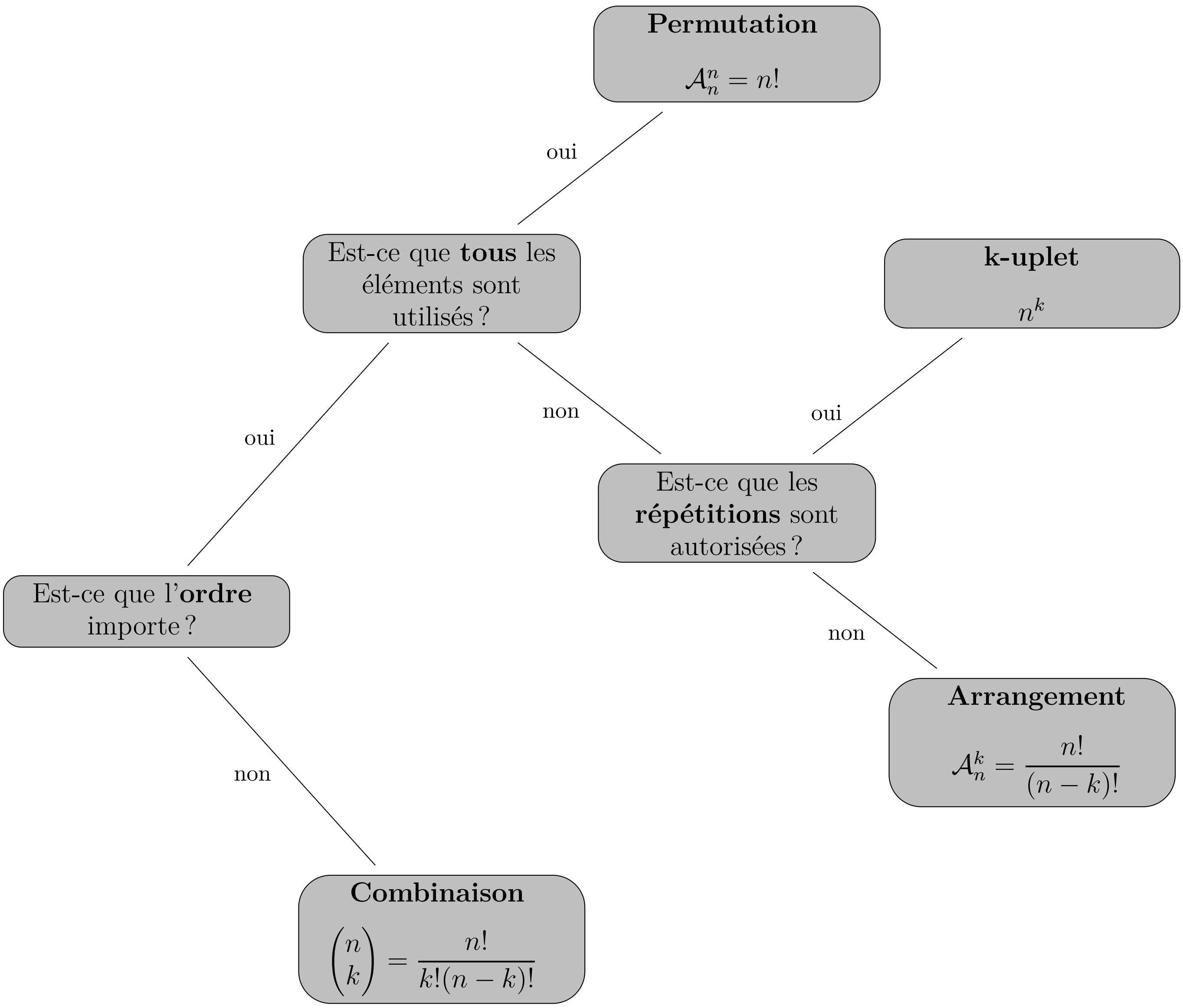
Démonstration au programme (colles) :

Remarque : on peut interpréter tous les outils mathématiques vus dans cette partie du cours comme nombre d'applications entre ensembles finis vérifiant certaines propriétés.

En notant $E = \{1, 2, ..., p\}$ et $F = \{1, 2, ..., n\}$:

- Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est aussi le nombre d'applications de E vers F. En effet, se donner une telle application f revient à se donner les valeurs des images $f(1), f(2), ..., f(p)$, c'est-à-dire à se donner une liste de p éléments de E.
- Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments correspond au nombre d'application injectives de E vers F (puisqu'imposer l'injectivité revient exactement à interdire les répétitions dans la liste des images des éléments de E).
- Si $p = n$, le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments correspond au nombre applications bijectives de E dans lui-même.
- Le nombre de combinaisons de p éléments dans un ensemble à n éléments représente le nombre d'applications strictement croissantes de E vers F (il suffit en effet de choisir les p images des éléments de E et de les associer dans l'ordre croissant aux entiers de l'ensemble E.)

Voici un organigramme permettant de résumer les cas d'utilisations de ces outils de dénombrement :



On peut maintenant répondre aux trois questions posées en début de chapitre...