

Colle : Probabilité et Déterminants

1 Probabilités

Tout exercices sur les dénombrements, probabilités et variables aléatoires.

2 Déterminant

2.1 À connaître

1. Expression du déterminant dans une base
2. La formule du changement de base.
3. Définition du déterminant d'une matrice carrée

2.2 À savoir prouver

1. Preuve de «Une forme n -linéaire alternée est antisymétrique».
2. Montrer que le déterminant d'une famille liée est nul.
3. Action des opérations élémentaires / justification.

3 Exercices

3.1 Exercices à rédiger

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \end{vmatrix}$
2. Exercice d'entraînement : 2 a)
3. Exercice d'entraînement : 3 a)

3.2 Exercices d'entraînement

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} \in \{1, -1\}$
Montrer que 2^{n-1} divise $\det A$.

2. Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

3. Calculer en établissant une relation de récurrence

$$\text{a) } D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]} \quad ; \quad \text{b) } \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$