Indication sur le TD 27

1 Calcul de déterminants

Partie I

1. $\Delta_1 = a$, $\Delta_2 = a^2 - bc$ et $\Delta_3 = a^3 + b^2c + bc^2 - 3abc$.

2. a) Dans le cas $a = c$: $\Delta n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ a & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b \\ a & & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ 0 & a-b & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (a-b) & & a-b \end{vmatrix}$

   via $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1$.
   donc en développant selon la première colonne $\Delta n = a(a-b)^{n-1}$
   En transposant, on obtient $\Delta_n = a(a-c)^{n-1}$ dans le cas $a = b$.

   b) $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$ donne
   $$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & & b & \\ \vdots & & \ddots & & \\ a+(n-1)b & b & & a & \end{vmatrix} = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 1 & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & b & & a \end{vmatrix}.$$
   $L_2 \leftarrow L_2 - L1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1$ donne
   $$\Delta n = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 0 & a-b & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)\,(a-b)^{n-1} .$$

3. Via $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$ et $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$ donne
   $$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & & b & b & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ c & & a & b & 0 \\ c & \dots & c & a & b-a \\ 0 & \dots & 0 & c-a & 2a-b-c \end{vmatrix}$$
   En développant selon la dernière colonne :
   $$\Delta n = -(b-a) \begin{vmatrix} a & & b & b \\ & \ddots & & \vdots \\ c & & a & b \\ 0 & \dots & 0 & c-a \end{vmatrix} + (2a-b-c) \begin{vmatrix} a & & b & b \\ & \ddots & & \vdots \\ c & & a & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}$$
   puis $\Delta_n = -(b-a)(c-a)\Delta_{n-2} + (2a-b-c)\Delta_{n-1}$ et la relation demandée.
   La suite $(\Delta_n)_{n\geqslant}1$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (2a-b-c)r + (a-b)(a-c) = 0$. En reconnaissant somme et produit des racines, les solutions de cette équation caractéristique sont $a-b$ et $a-c$, elles sont distinctes car $b \neq c$et donc le terme général de (Δ_n) est de la forme $\Delta n = \lambda(a-b)^n n + \mu(a-c)^n$.
   Pour $n = 1$, on obtient $\lambda(a-b) + \mu(a-c) = a$ (1)
   Pour $n = 2$, on obtient $\lambda(a-b)2 + \mu(a-c)2 = a^2 - b\,c(2)$
   $(a-c)(1) - (2)$ donne $\lambda(a-b)(b-c) = c(b-a)$ donc $\lambda = \frac{c}{c-b0}$ et de même $\mu = \frac{c}{b-c}$ d'où $\Delta n = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$.

1.1 Partie II

1) a) En retranchant la première colonne à toutes les autres colonnes, on fait disparaître les x des colonnes $C_2, \dots, C_n$. En développant alors le déterminant selon sa première colonne on obtient une somme de coefficients qui sont des fonctions affines de x multipliés par des cofacteurs qui eux ne dépendent par de x . Ainsi $D_n(x)$ apparaît comme une fonction affine de x .

b) Pour $x = -b$, $D_n(-b) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - b) = \beta - \alpha b.$

Pour $x = -c$, $D_n(-c) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - c) = \beta - \alpha c.$

On en déduit $\alpha = \frac{D_n(-b)-D_n(-c)}{c-b} = \dfrac{\prod_{i=1}^{n}(a_i - b) - \prod_{i=1}^{n}(a_i - c)}{c-b}$

et $\beta = D_n(-b) + \alpha b = \dfrac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i - b) - b\prod_{i=1}^{n}(a_i - c)}{c-b}.$

c) $D_n = D_n(0) = \beta.$

2. a) Notons $m_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice définissant D_n . En fixant c et en faisant varier b , on peut percevoir $m_{i,j}$ comme une fonction de b : $b \mapsto m_{i,j}(b)$. Cette fonction est continue car soit $m_{i,j}(b) = b$ soit $m_{i,j}(b)$ ne dépend pas de b.

Puisque $D_n(b) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i}(b)$,$b \mapsto D_n(b)$ est continue par opération sur les fonctions continues.

b) **Attention les variables ont changé.**
Par continuité : $D_n(c) = \lim_{b \to c} D_n(b)$.
Or pour $b \neq c$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$

$$D_n(b) = \frac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i - b) - b\prod_{i=1}^{n}(a_i - c)}{c-b} = \frac{b\,c}{c-b}\left[\frac{1}{b}\prod_{i=1}^{n}(a_i - b) - \frac{1}{c}\prod_{i=1}^{n}(a_i - c)\right].$$

Si on pose $\varphi(x) = \frac{1}{x}\prod_{i=1}^{n}(a_i - x)$ alors on a

$$D_n(b) = b\,c\frac{\varphi(b) - \varphi(c)}{c-b}$$

On en déduit $D_n(c) = \lim_{b \to c} D_n(b) = -c^2\,\varphi'(c).$
Les formules de dérivations donnent :

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{x^2}\prod_{i=1}^{n}(a_j - x) - \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}(a_i - x)$$

2 Matrice de Vandermonde ..

1. a) Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ et λ et μ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varepsilon(\lambda P+\mu P) &= \begin{pmatrix}(\lambda P+\mu Q)(a_0)\\ \vdots \\ (\lambda P+\mu Q)(a_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda P(a_0)+\mu Q(a_0)\\ \vdots \\ \lambda P(a_n)+\mu Q(a_n)\end{pmatrix}\\ &= \lambda\begin{pmatrix}P(a_0)\\ \vdots \\ P(a_n)\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}Q(a_0)\\ \vdots \\ Q(a_n)\end{pmatrix} = \lambda\varepsilon(P)+\mu\varepsilon(Q).\end{aligned}$$

   ε est donc bien linéaire.
   Soit $P \in \ker\varepsilon$, on a $P(a_0)=\cdots=P(a_n)=0$ et $\deg(P)\leqslant n$.
   Le nombre de racines de P étant supérieur à son degré, il vient $P=0$.
   On en déduit que $\ker(\varepsilon)=\{O\}$ et que ε est injective.
   De plus $\dim(\mathbb{R}_n[X])=\dim(\mathbb{R}^{n+1})=n+1$, le théorème du rang nous permet donc de dire que ε est un isomorphisme d'espace vectoriel.

   b) Pour déterminer A, on calcule les images des X^k par ε et on obtient directement

$$A=\begin{pmatrix}1 & a_0 & a_0^2 & \dots a_0^n & \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots a_1^n & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots a_n^n & \end{pmatrix}.$$

   On reconnaît une matrice de Vandermonde de determinant non nul car les a_i sont deux à deux distincts.

2. a) Soit $i\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$B_i^{(0)}=(X+a_i)^n,\ B_i^{(1)}=n(X+a_i)^{n-1},\ B_i^{(2)}=n(n-1)(X+a_i)^{n-2},\ \dots,B_i^{(n)}=n!\,(X+a_i)^0$$

   D'où $B=\begin{pmatrix}a_0^n & a_1^n & \dots & a_n^n\\ na_0^{n-1} & na_1^{n-1} & \dots & na_n^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ n! & n! & \dots & n!\end{pmatrix}$ et ${}^tB=\begin{pmatrix}a_0^n & na_0^{n-1} & \dots & n!\\ a_1^n & na_1^{n-1} & \dots & n!\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_n^n & na_n^{n-1} & \dots & n!\end{pmatrix}$

   b) On passe de A a ${}^tB$ en permutant circulairement les colonnes (signature $(-1)^{n+1}$) et multipliant la colonne j par $\frac{n!}{j!}$.
   D'où $Det(B)=(-1)^{n+1}\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{n!}{j!}\right]Det(A)\neq 0.$

   c) $Det_{\mathcal{E}}(B_0,\dots,B_n)=Det(B)$, la famille $(\delta(B_0),\dots,\delta(B_n))$ est donc une base de $\mathbb{R}^{n+1}$.
   On a $\delta\left(Vect(B_0,B_1,\dots,B_n)\right)=Vect(\delta(B_0),\delta(B_1),\dots,\delta(B_n))$
   Le théorème du rang nous permet de dire que
   $rang(B_0,B_1,\dots,B_n)\geqslant rang(\delta(B_0),\delta(B_1),\dots,\delta(B_n))=n+1$
   Or $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, on en déduit donc que $(B_0,B_1,\dots,B_n)$ est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   δ étant une application linéaire qui «transforme une base en une base», c'est un isomorphisme d'espace vectoriel.

3. a) On a $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ qui est dans $\mathcal{A}$, d'où $mathcalA\neq\emptyset$.
   Montrons que $\mathcal{A}$ est stable par combinaison linéaire.

Soit $(\varphi,\psi)\in\mathcal{A}^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$,
Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $a\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\lambda\varphi+\mu\psi)\left(P(X+a)\right) &= \lambda\varphi\left(P(X+a)\right)+\mu\psi((P(X+a)) \text{ (définition de } \lambda\varphi+\mu\psi)\\ &= \lambda\left[\varphi(P)\right](X+a)+\mu\left[\psi(P)\right](X+a)(\ \varphi \text{ et } \psi \text{ sont dans } \mathcal{A})\\ &= \left[\lambda\varphi(P)+\mu\psi(P)\right](X+a) \text{ (propriété de la composition des polynômes)}\\ &= \left[(\lambda\varphi+\mu\psi)(P)\right](X+a)\end{aligned}$$

D'où $\lambda\varphi+\mu\psi\in\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}$ est bien un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
On a $\mathcal{A}$ est bien un sous groupe de $(\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]),+)$ et il contient l'identité qui est neutre pour la composition, il reste à vérifier que $\mathcal{A}$ est neutre pour la composition.
Soit $(\varphi,\psi)\in\mathcal{A}^2$.
Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $a\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\psi\circ\varphi)(P(X+a)) &= \psi\left(\varphi(P(X+a))\right)=\psi\left(\varphi(P)(X+a)\right)\\ &= \left[\psi(\varphi(P)\right](X+a) \ (\ \varphi(P)\in\mathbb{R}_n[X])\\ &= \left[(\psi\circ\varphi)(P)\right](X+a)\end{aligned}$$

d'où $\psi\circ\varphi\in\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}$ est bien une sous algèbre de $(\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X],+,\circ,\cdot)$.
On sait que $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ est de dimension $(n+1)^2$ donc $\mathcal{A}$ est de dimension inférieure à $(n+1)^2$.

b) La linéarité de F se montre simplement en revenant à la définition.
« $F(\lambda\varphi+\mu\psi)=(\lambda\varphi+\mu\psi)(X^n)=\lambda\varphi(X^n)+\mu\psi(X^n)=\lambda F(\varphi)+\mu F(\psi)$»
Soit $\varphi\in\ker(F)$,
Soit $i\in[\![1,n]\!]$

$$\begin{aligned}\varphi(B_i) &= \varphi\left[(X+a_i)^n\right]\\ &= \left[\varphi(X^n)\right](X+a_i) \text{ (Définition de } \mathcal{A} \text{ avec «}P=X^n\text{»)}\\ &= 0 \ (\varphi\in\ker F \ ).\end{aligned}$$

$(B_0,\ldots,B_n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on en déduit $\varphi=0$.
En conséquence F est injective.

c) Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $a\in\mathbb{R}$,

$$\gamma(P(X+a))=[P(X+a)]'=(X+a)'\,P'(X+a)=[\gamma(P)](X+a)$$

Donc $\gamma\in\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}$ étant stable par composition, $Id,\gamma,\gamma^2,\ldots,\gamma^n$ sont dans $\mathcal{A}$.
Or $F(\gamma^p)=\gamma^p(X^n)=[X^n]^{(p)}=\frac{n!}{(n-p)!}X^{n-i}$.
Manifestement $(F(Id),F(\gamma),\ldots,F(\gamma^n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (polynômes de degrés échelonnés)
On en déduit que F est surjective.
F est donc un isomorphisme d'espace vectoriel d'où $\dim(\mathcal{A})=\dim(\mathbb{R}_n[X])=n+1$.