TD du 2/05/2025

1 Calculs de déterminants

Dans tout le problème a, b, c désignent des réels et n un entier supérieur à 1.

Partie I

Soit Δ_n le déterminant de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante : les éléments de la diagonale principale sont égaux à a, ceux au dessus de la cette diagonale valent b et enfin ceux en dessous de la diagonale valent c. Ainsi : $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a \end{vmatrix}$,$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}$ et$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix}$.

1. Calculer Δ_1, Δ_2 et Δ_3.
2. a) Calculer Δ_n dans le cas où $a = c$ puis dans le cas où $a = b$.
   b) Calculer Δ_n dans le cas où $b = c$.
3. On suppose $b \neq c$ et $n \geqslant 3$.
   a) Établir que $\Delta_n - (2a - b - c)\Delta_(n-1) + (a-b)(a-c)\Delta_{n-2} = 0$.
   On pourra par exemple opérer avec les deux dernières colonnes puis faire la même manipulation sur les lignes.
   b) Donner l'expression du terme général de la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie II

Dans cette partie $a_1, \dots, a_n$ désignent n réels. On désire calculer le déterminant D_n de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante : Les coefficients diagonaux sont les $a_1, \dots, a_n$, les coefficients au dessus de la diagonale sont égaux à b tandis que ceux en dessous de la diagonale valent c.

Ainsi $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{vmatrix}$ et $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b & b \\ c & a_2 & b \\ c & c & a_3 \end{vmatrix}$

1. Dans un premier temps, nous supposons $b \neq c$. On pose $D_n(x)$, le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à tous les coefficients de la matrice définissant D_n.

   Ainsi $D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & b + x & \dots & b + x \\ c + x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ c + x & \cdots & c + x & a_n + x \end{vmatrix}$

   a) Montrer que $D_n(x)$ est une fonction affine, c'est-à-dire qu'il existe,$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D_n(x) = \alpha x + \beta$.
   b) Calculer α et β en évaluant $D_n(x)$ pour des valeurs judicieuses de x.
   c) En déduire l'expression de D_n.
2. On désire calculer D_n dans le cas où $b = c$.
   a) On fixe le paramètre c et on fait varier le paramètre b dans $\mathbb{R}$. Établir que D_n apparaît alors comme une fonction continue de la variable b variant dans $\mathbb{R}$.
   b) En déduire la valeur de D_n dans le cas où $b = c$.

2 Matrice de Vandermonde et applications

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ de sa base canonique $\mathcal{C} = (1, X, \dots, X^n)$, et le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$ de sa base canonique que l'on écrira $\mathcal{E} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$.

On fixe enfin des réels $a_0, \dots, a_n$ deux à deux distincts.

1. Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'application définie par $\varepsilon(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$.
   a) Montrer que l'application ε est linéaire, injective, puis que c'est un isomorphisme.
   b) Déterminer la matrice A de l'application ε dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$. Que dire de cette matrice ?
2. On veut étudier la famille $\mathcal{B} = (B_0, \dots, B_n)$ telle que, pour $i \in [\![0, n]\!]$, $B_i = (X + a_i)^n$.
   Pour cela, on introduit l'application $\delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\delta(P) = (P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0))$. On admet qu'elle est linéaire.
   a) Déterminer la matrice B de la famille $(\delta(B_0), \dots, \delta(B_n))$ dans la base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.
   b) Comparer les matrices A et ${}^tB$, en déduire le déterminant de B, et montrer que la famille $(\delta(B_0), \dots, \delta(B_n))$ est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$.
   c) En déduire que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et que δ est un isomorphisme.
3. Soit $\mathcal{A} = \{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]) | \forall a \in \mathbb{R}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P(X + a)) = [\varphi(P)](X + a)\}$.
   a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel et un sous-anneau, de $(\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]), +, \circ, \cdot)$.
   Montrer que, comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathcal{A}$ est de dimension finie.
   b) On considère l'application $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi \to \varphi(X^n)$.
   Montrer, à l'aide de la question **2**, que F est linéaire et injective.
   c) Montrer que l'application $\gamma : P \to P'$ est élément de $\mathcal{A}$, et en déduire que F est surjective.
   Déterminer alors la dimension de $\mathcal{A}$.