Indications sur le contrôle du 15 mai 2023

1 Analyse et Probabilités

1. Si $t \in [j, j+1]$ alors $t^k \geqslant j^k$ d'où en intégrant sur $[j, j+1]$: $\displaystyle\int_j^{j+1} t^k \mathrm{d}t \geqslant \int_j^{j+1} j^k \mathrm{d}t = j^k$.
   On procède de même pour l'autre inégalité.
   En ajoutant les inégalités et en utilisant la relation de Chasles on trouve le deuxième encadrement.
2. L'inégalité précédente nous donne
$$\frac{n^{k+1}}{k+1} \leqslant \sum_{j=1}^{n} j^k \leqslant \frac{(n+1)^{k+1}-1}{k+1}.$$
   Or $(n+1)^{k+1} = n^{k+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} \sim n^k$
   En utilisant le théorème des gendarmes on obtient $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{k+1}}{k+1}$.
3. Toutes les boules étant numérotées de 0 à n, X_n décrit l'ensemble $J = [\![1, n]\!]$.
4. L'univers Ω est $[\![1, n]\!]^k$ l'ensemble des k-uplets de $[\![1, n]\!]$ sont cardinal est donc n^k.
   L'événement $(X_n \leqslant j)$ consiste à tirer toutes les boules dans $[1[, j]\!]$ d'où $(X_n \leqslant j) = [1[, j]\!]^k$.
   On en déduit $\mathbb{P}(X_n \leqslant j) = \frac{j^k}{n^k}$.
   L'événement $(X_n = j)$ est le complémentaire de $(X_n \leqslant j-1)$ dans $(X_n \leqslant j)$.
   On a donc $\mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_n \leqslant j) - \mathbb{P}(X_n \leqslant j-1) = \frac{j^k-(j-1)^k}{n^k}$.
5.
$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j) &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} \mathbb{P}(X_n = i) \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} \mathbb{P}(X_n = i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} \mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}(X_n = i)\\ &= \sum_{i=0}^{n} i\mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{E}(X_n)\end{aligned}$$
6. $(X_n > j)$ est l'événement complémentaire de $(X_n \leqslant j)$, d'où pour $j \in [\![1, n]\!] :; \mathbb{P}(X_n > j) = 1 - \frac{j^k}{n^k}$.
   D'où $\displaystyle\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(j > n) = 1 + \sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{j^k}{n^k}\right) = n + 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{j^k}{n^k}$
   Or $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^k \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n^{k+1}}{k+1} + o(n^{k+1})$ donc$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j^k}{n^k} = \frac{n}{k+1} + o(n)$
   d'où $\mathbb{E}(X_n) = n + \frac{1}{k+1}n + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k\,n}{k+1}$.
7. Si $k = 1$ alors X_n est le résultat du tirage dans la première urne, X_n suit dont une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n+1}{2}$.

2 Algèbre

2.1 Questions préliminaires

1. Un module étant toujours positif et z étant non nul :
   $|z| = 1 \Leftrightarrow z\,\overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$.
2. L'équation $\overline{\omega^k} = \omega^r$ s'écrit
   $\exp\left(\frac{-2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2ir\pi}{n}\right)$, soit $\exp\left(\frac{2i(r+k)\pi}{n}\right) = 1$.
   Ce qui équivaut à $\frac{2(r+k)\pi}{n} \equiv 0[2\pi]$ et donc $r \equiv -k[n]$.
   Comme k est compris entre 0 et $n-1$ et que r doit aussi être entre 0 et $n-1$ nécessairement $r = n-k$.
   Cela peut être illustrer avec une cercle trigonométrique.
3. — S_n on reconnaît une somme géométrique de raison $\omega \neq 1$ $S_n = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$.
   — $P_n = \omega^{1+2+\cdots+(n-1)} = \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} = \exp\left(i(n+1)\right) = (-1)^{n+1}$.
4. On remarque que P est le polynôme dérivé de $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k = \frac{1-X^{n+1}}{1-X}$
   D'où $P(x) = Q'(x) = \frac{-(n+1)\,x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$
5. On reprend l'expression précédente en remarquant que $\omega^n = 1$.

$$\begin{aligned} P(\omega^k) &= \frac{n\,\omega^{k(n+1)} - (n+1)\omega^{k\,n} + 1}{(\omega^k - 1)^2} = \frac{n\omega^k - (n+1) + 1}{(\omega^k - 1)^2} \\ &= \frac{n}{\omega^k - 1} \end{aligned}$$

6. D'une part, $X^n - 1$a n racines simples qui sont les racines n ᵉde 1 d'où
   $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$
   d'autre part $X^n - 1 = (X-1)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$
   d'où $\prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega^k) = \frac{X^n-1}{X-1} = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$.
   et finalement en substituant 1 à X on obtient
   $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$.

2.2 Étude de F et A

1. On remarque que f permute les vecteurs de la base canonique d'où
   $F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F^4 = I_4$.
2. Les puissances de F étant cycliques, $G_F = \mathrm{Vect}(I_4, F, F^2, F^3)$.
   Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que
   $a\,F^0 + b\,F + c\,F^2 + d\,F^3 = (0)$ on vérifie facilement que $a = b = c = d = 0$ on en déduit que (I_4, F, F^2, F^3) est une base de G_F et que $\dim(G_F) = 4$.
3. Supposons qu'une telle base existe, alors si $k \in [\![1, 4]\!]$ alors $f(\varepsilon_k) = \alpha_k \varepsilon_k$,
   d'où $\varepsilon_k \in \ker(f - \alpha_k Id)$.
   Comme une base ne contient pas de vecteur nul, $\ker(f - \alpha_k Id) \neq \{\vec{O}\}$ et donc $\mathrm{Det}(F - \alpha_k I_4) = 0$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$
   $$Det(F - \alpha I_4) = \begin{vmatrix} -\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} = \cdots = 1 - \alpha^4.$$

Les α_k sont donc des racines de $X^4 - 1$ donc dans l'ensemble $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.

5. Après calculs :
$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(f - Id)$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(f + Id)$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \ker(f - \mathrm{i}Id)$ et $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \in \ker(f + \mathrm{i}Id)$
On vérifie ensuite que $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ convient.

6. Après calculs
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
Pour calculer $Det(A)$ peut commencer par ajouter toutes les colonnes à la première et mettre 10 en facteur. et après calcul $Det(A) = -160$.

7. D'après la question 4) $F = P\,\Delta\,P^{-1}$ où P est inversible et Δ est diagonale.
On a alors $A = F + 2F^2 + 3F^3 + 4F^4$
d'où $A = P\left(\Delta + 2\Delta^2 + 3\Delta^3 + 4\Delta^4\right)P^{-1}$,
les produits et combinaisons linéaires de matrices diagonales étant diagonaux, on peut en déduire que A est semblable à une matrice diagonale.