# Contrôle du 6/05/2024

**Calculatrice interdite**

## 1 Analyse - Majoration de Lagrange

Soit $h$ un réel strictement positif, on pose $I = [0, h[$. Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un $I$ et $x$ dans I.

On souhaite montrer que pour tout entier $n$ :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \sup_{t \in [0,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

*On remarquera que $f^{(n+1)}$ étant continue, sa borne sup sur $[0, x]$ est définie. De plus, cette inégalité est appelée majoration de Lagrange l'ordre $n$ pour $f$.*

1. Montrer la majoration de Lagrange à l'ordre 0.
2. Montrer que si $f'$ vérifie la majoration de Lagrange à l'ordre $n$ alors $f$ vérifie la majoration de Lagrange à l'ordre $n+1$ et en déduire une preuve par récurrence de cette majoration.

On considère la fonction $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ définie sur $[0, 1[$.

3. Exprimer la dérivée d'ordre $k$ ce cette application $g$ en fonction de $(2k)!$, $k!$, $4^k$ et $(1-x)^{-(2k+1)/2}$.
4. Majorer $\frac{\binom{2k+2}{k+1}}{\binom{2k}{k}}$ et en déduire $\binom{2k}{k} \leqslant 4^k$.
5. Soit $x \in [0, 1/2[$, utiliser les résultats précédents pour étudier la limite $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k$.

## 2 Probabilité

On considère une répétition infinie de lancer d'une pièce dont la probabilité de «tomber sur pile» est $p \in [0, 1]$.

Le tirage d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ se traduit par une variable aléatoire $X_k$ de valeur 1 pour «tomber sur pile» et 0 sinon. Toutes ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, et suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p$. Ainsi $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$, notons $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Pour $n \geqslant 1$, l'événement $A_n$ est défini par «à l'issue de $2n$ tirages, il y a autant de piles que de faces» et l'événement $B_n$ est défini «à l'issue de $2n$ tirages, il y a pour la première fois autant de piles que de faces».

On convient en outre que $A_0$ est l'évènement certain et que sa probabilité vaut 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi de la variable aléatoire $Y_n$ ?
2. Déterminer l'évènement $A_n$ en fonction de la variable aléatoire $Y_{2n}$, et en déduire $\mathbb{P}(A_n)$.
3. On suppose $0 < p < \frac{1}{8}$, déduire, de la partie précédente, la limite éventuelle $\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(A_k)$.
4. Soient $n$ et $m$ deux entiers strictement positifs tels que $m \neq n$, montrer que les événements $B_m$ et $B_n$ sont incompatibles, c'est-à-dire disjoints.
5. Supposons $1 \leqslant m < n$, montrer que $\mathbb{P}_{B_m}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-m})$.
6. En déduire $\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$.

## 3 Matrices et équations différentielles

On note $E$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $\phi_i$ la fonction définie par $\varphi_i(x) = e^x x^i$.

On note $D$ la dérivation : si $f \in E$ alors $D(f) = f'$.

On note $F$ l'ensemble des fonctions du type $f(x) = e^x P(x)$ où $P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

1. Montrer que $D$ est un endomorphisme de $E$.
2. Quel est le noyau de $D$ ?
3. Déterminer le noyau de $D^2 + D + Id_E$ dans $E$ par la résolution d'une équation différentielle.
4. Montrer que $F$ est un sous espace vectoriel de $E$.

5. Montrer que $\mathcal{B} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $F$.
6. Montrer que si $f \in F$ alors $f' \in F$.
   *$D$ induit donc un endomorphisme de $F$ que nous noterons aussi $D$.*
7. Déterminer $A$ la matrice de l'endomorphisme $D$ de $F$ relativement à la base $\mathcal{B}$.
8. Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
9. Montrer que $M = A^2 + A + I_4$ est inversible et déterminer $M^{-1}$.
10. Utiliser les résultats précédents pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = (x^2 - 1)\, e^x$.
11. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, déterminer en fonction de $\alpha$ et $\beta$ le rang de $A^2 + \alpha\, A + \beta\, I_4$.
12. Déterminer, en fonction de $\alpha$ et $\beta$, si l'équation différentielle $y'' + \alpha y' + \beta y = (x^2 - 1)\, e^x$ a des solutions dans $F$.

On définit les fonctions $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ et $\psi_4$ par :
$\psi_1(x) = (x+1)\,(x-1)\,(x-2)\,e^x$ , $\psi_2(x) = (x+2)\,(x-1)\,(x-2)\,e^x$
$\psi_3(x) = (x+2)\,(x+1)\,(x-2)\,e^x$ et $\psi_4(x) = (x+2)\,(x+1)\,(x-1)\,e^x$

13. Montrer que $\mathcal{C} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ est une base de $F$.
14. Déterminer, $P$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et exprimer la matrice de $D$ relativement à la base $\mathcal{C}$ en fonction de $A$ et de $P$.