Indications sur le contrôle du 6/05/2024

1 Majoration de Lagrange

1. Pour $n = 0$, l'inégalité devient
$$|f(x) - f(0)| \leqslant \sup_{[} 0, x](|f'|)\, x$$
On reconnaît l'inégalité des accroissements finis pour f entre 0 et x.
2. En remarquant que $f'^{(k)} = f^{k+1}$ pour tout k, on a pour tout x dans I,
$$\left| f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}\, x^k \right| \leqslant \sup_{[0,x]} \left| f^{(n+2))} \right| \frac{x^{n+1}}{(k+1)!}.$$
D'où en intégrant entre 0 et x :
$$\left| \int_0^x f'(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}\, t^k \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x \left| f'(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{k+1)}(0)}{k!}\, t^k \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \sup_{[0,x]} \left| f^{(n+2)} \right| \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{d}t$$
Ce qui donne :
$$\left| f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} \right| \leqslant \sup_{[0,x]} \left| f^{(n+2)} \right| \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$
$\sup_{[0,x]} \left| f^{(n+2)} \right|$ *ne dépend pas de la variable d'intégration t.*
Ce qui après un changement d'indice nous donne le résultat demandé.
À la question 1) nous avons l'initialisation de la formule.
Nous venons de faire, la formule est donc prouvée par récurrence.
3. Après avoir calculé les premiers rangs, on peut conjecturer que
$g^{(k)}(x) = \frac{(2k)!)}{4^k\, k!}(1-x)^{-(2k+1)/2}$ et on vérifie cette conjecture par récurrence.
4. Si k est un entier naturel alors
$$\frac{\binom{2k+2}{k+1}}{\binom{2k}{k}} = \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2} \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} \frac{2(2k+1)}{(k+1)} \leqslant \frac{2(2k+2)}{k+1} = 4$$
D'où par une récurrence simple $\binom{2k}{k} \leqslant 4^k$.
5. g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
En appliquant la majoration de Lagrange à g on obtient :
$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k \right| \leqslant \sup_{[0,x]} \left| g^{(n+1)} \right| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$
Toutes les dérivées de g étant positives on en déduit que $\sup_{[0,x]} \left| g^{(n+1)} \right| = g^{(n+1)}(x)$ *($g^{(n+1)}$ est positive croissante.)*
Il vient alors :
$$\sup_{[0,x]} \left| g^{(n+1)} \right| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} x^{n+1} (1-x)^{-(2n+3)/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{n+1}$$
Or $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ d'où $0 \leqslant \frac{x}{1-x} 1$ d'où $\left(\frac{x}{1-x} \right)^n \to 0$
et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

2 Probabilités

1. Les $(X_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont des variables de Bernoulli indépendantes donc Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
2. A_n correspond à $Y_{2n}=n$ donc $\mathbb{P}(A_n)=\binom{2n}{n}\,p^n\,(1-p)^n$.
   On peut remarquer que la formule est encore valable pour $n=0$.
3. $$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)=\sum_{k=1}^{n}\binom{2k}{k}(p\,(1-p))^k\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}(4\,p\,(1-p))^k$$
   Or pour $p<\frac{1}{8}$, $4p(1-p)<\frac{1}{2}$ et donc d'après la partie précédente,
   $$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}(4\,p\,(1-p))^k\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$$
4. Il ne peut y avoir qu'une seule première fois où il y a autant de «piles» que de «faces», donc si $m\neq n$ alors B_n et B_m sont incompatibles.
5. Si au m^{e} tirage il y autant de «piles» que de «faces» pour que cela se reproduire au n^{e} tirage il faut que les $n-m$ tirages intermédiaires produisent autant de «piles» que de «faces» d'où $\mathbb{P}_{B_m}(A_n)=\mathbb{P}(A_{n-m})$.
6. Si au n^{e} tirage il y a eu un unique premier $1<\leqslant m\leqslant n$ tirage avec autant de «piles» que de «faces». A_n est donc l'union disjointe des $A_n\cap B_k$ pour k allant de 1 à n d'où
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n)&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_n\cap B_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B_k)\,\mathbb{P}_{B_k}(A_n)\\&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B_k)\,\mathbb{P}(A_{n-k})\end{aligned}$$

3 Matrices et équations différentielles

1. La dérivation est linéaire et quand on dérive une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, on obtient une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, D est donc bien un endomorphisme de E.
2. Une fonction de dérivée nulle est constante, on en déduit que le noyau de D est l'ensemble des fonctions constantes.
3. Le noyau de D^2+D+Id est défini par l'équation différentielle $y''+y'+y=$ dont l'équation caractéristique a pour racines j et j^2.
   le noyau de D^2+D+Id est donc l'ensemble des fonctions de la forme $\varphi(x)=e^{-\frac{x}{2}}\,(A\,\sin(x)+B\,\cos(x))$ où $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
4. Les φ_i sont clairement dans E.
   Soit $f\in E$, il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)$ on a donc $F\subset\text{Vect}(\varphi_0,\varphi_1,varphi_2\varphi_3)$.
   Réciproquement, Si $f\in\text{Vect}(\varphi_0,\varphi_1,varphi_2\varphi_3)$ alors $\exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=a\,e^x+b\,x\,e^x+c\,x^2\,e^x+d\,x^3\,e^x=e^x(a+bx+cx^2+dx^3)$ d'où $f\in F$.
   On a donc $F=\text{Vect}(\varphi_0,\varphi_1,varphi_2\varphi_3)$ ce qui prouve que F est bien un sev de E.
5. On sait déjà que $\mathcal{B}$ engendre F, il reste à vérifier que c'est une famille libre.
   Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $a\varphi_0+b\varphi_1+c\varphi_2+d\varphi_3=0$.
   On a $\forall x\in\mathbb{R}$, $(a+bx+cx^2+dx^3)\,e^x=0$ d'où $a+bx+cx^2+dx^3=0$, le polynôme $a+bX+cX^2+dX^3$ a donc une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.
   On en déduit $a=b=c=d=0$, $\mathcal{B}$ est bien libre, c'est une base de F.

6. $\mathcal{B}$ est une base de F et D est linéaire d'où $D(F) = \operatorname{Vect}(D(\varphi_0), D(\varphi_1), D(\varphi_2), D(\varphi_3))$.
   Si $x \in \mathbb{R}$ et $i \in [\![0, 3]\!]$ alors $\varphi'(x) = (ix^{i-1} + x^i)e^x$ d'où $\varphi_i' \in F$.
   On en déduit que $D(F) \subset F$.
7. Pour déterminer A, on exprime les dérivées des éléments de $\mathcal{B}$ dans elle-même.
   Les calculs de la question précédente nous permettent de dire que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
8. A est de la forme $A = I_4 + B$, B et I_4 commutant, on peut utiliser le binôme de Newton.
   On a : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^4 = 0$.
   d'où $A^n = I_4 + n\,B + \frac{n(n-1)}{2}\,B^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}B^3$.
9. Après calcul , $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $M^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
10. Dans la base $\mathcal{B}$ le problème s'écrit $M\,X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
    il a pour unique solution $X = M^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
    On en déduit que $\psi(x) = \frac{e^x}{9}\left(1 - 6x + 3x^2\right)$ est une solution particulière de l'équation $y'' + y' + y = e^x(x^2 - 1)$.
11. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
    $A^2 + \alpha A + \beta I_0 = \begin{pmatrix} \alpha+\beta+1 & \alpha+2 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+1 & 2\alpha+4 & 6 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta+1 & 3\alpha+6 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta+1 \end{pmatrix}$
    On en déduit que
    — Si $\alpha + \beta + 1 \neq 0$ alors $\operatorname{rang}(A^2\alpha\,A + \beta) = 3$.
      On peut remarquer que cela correspond à 1 n'est pas racine de $X^2 + \alpha X + \beta$.
    — Si $\alpha + \beta + 1 = 0$ et $\alpha \neq -2$ alors $\operatorname{rang}(A^2\alpha\,A + \beta) = 2$.
      On peut remarquer que cela correspond à 1 n'est pas racine de $X^2 + \alpha X + \beta$.
    — Si $\alpha = -2$ et $\beta = 1$ alors $\operatorname{rang}(A^2\alpha\,A + \beta) = 1$.
      On peut remarquer que cela correspond à 1 est racine double de $X^2 + \alpha X + \beta$.
12. — Si $\alpha + \beta + 1 \neq 0$ alors $A^2 + \alpha A + \beta I_3$ est inversible et comme dans la question 10) l'équation différentielle $y'' + \alpha y' + \beta y = e^x(x^2 - 1)$ a une unique solution dans F.
    — Si $\alpha + \beta + 1 = 0$ et $\alpha \neq -2$ alors $A^2 + \alpha A + \beta I_3$ n'est pas inversible et $\operatorname{Im}(A^2 + \alpha A + \beta I_3) = \operatorname{Vect}(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ d'où l'équation différentielle $y'' + \alpha y' + \beta y = e^x(x^2 - 1)$ a une infinité de solutions dans F.
    — Si $\alpha = -2$ et $\beta = 1$ alors $\operatorname{Im}(A^2 + \alpha A + \beta I_3) = \operatorname{Vect}(\varphi_0, \varphi_1)$ d'où l'équation différentielle $y'' + \alpha y' + \beta y = e^x(x^2 - 1)$ n'a pas de solutions dans F.
13. $\mathcal{C}$ est composée de 4 fonctions et $\dim(F) = 4$, il suffit de vérifier que $\mathcal{C}$ est libre.
    Soit $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + a_3\psi_3 + a_4\psi_4 = 0$.
    Pour $x = -2$ on obtient $a_1 = 0$,
    pour $x = -1$ on obtient $a_2 = 0$,

pour $x = 1$ on obtient $a_3 = 0$,
pour $x = 2$ on obtient $a_4 = 0$.
$\mathcal{C}$ est libre c'est une base de F.

14. En développant on obtient, si $x \in \mathbb{R}$ alors
$\psi_1(x) = (2 - x - 2x^2 + x^3)e^x$, $\psi_2(x) = (4 - 4x - x^2 + x^3)e^x$, $\psi_3(x) = (-4 - 4x + x^2 + x^3)e^x$ et $\psi_4(x) = (-2 - x + 2x^2 + x^3)e^x$.
D'où la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & -2 \\ -1 & -4 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(D) = P^{-1}\, A\, P$.