Exercice 5 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé fini Ω. On suppose qu'elles sont deux à deux indépendantes, qu'elles ont même espérance m et même variance σ^2. On pose $S_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. Démontrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $P(|S_n - m| \geq \epsilon) \to 0$.

On a $E(S_n) = m$, et, puisque les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes,

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

On applique ensuite l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n :

$$0 \leq P(|S_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Par le théorème des gendarmes, ceci tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini Ω. On suppose que, pour chaque $n \geq 1$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i. On suppose en outre que les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes. On pose $S_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et $m_n = \dfrac{p_1 + \cdots + p_n}{n}$. Démontrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $P(|S_n - m_n| \geq \epsilon) \to 0$.

On a $E(S_n) = m_n$ et puisque les variables aléatoires sont indépendantes,

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k).$$

On a $V(X_k) = p_k(1 - p_k) \leq 1$ et donc $V(S_n) \leq \frac{1}{n}$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on en déduit que

$$0 \leq P(|S_n - m_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

et donc le terme au milieu tend bien vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

Exercice 7 **Les questions de cet exercice sont indépendantes**

1. Si $X \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, calculer $E(X^2)$ et $E(e^X)$.
2. Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi suivie par la variable $Y = n - X$?
3. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, calculer $E(2^X)$ et $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

$X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$,

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

donc

$$\mathrm{P}(Y = k) = \mathrm{P}(X = n-k) = \binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k.$$

La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $q = 1 - p$.

Exercice 7 **Les questions de cet exercice sont indépendantes**

1. Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, calculer $E(X^2)$ et $E(e^X)$.
2. Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi suivie par la variable $Y = n - X$?
3. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, calculer $E(2^X)$ et $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Puisque

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

l'espérance de Y est donnée par

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Or

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$$

donc

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k}$$

puis par glissement d'indice

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{(n+1)-k}$$

et enfin par la formule du binôme avec un terme manquant

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}.$$

Exercice 8 Un examen consiste en un QCM de 15 questions. Pour chaque question, 3 réponses sont possibles. Les étudiants répondent à chaque question indépendamment. L'enseignant estime que les étudiants ayant préparé l'examen sont 70 % et répondent à une question correctement avec probabilité 0,8. Les autres étudiants choisissent les réponses au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant, choisi au hasard, réussisse l'examen ?
2. Si un étudiant échoue, quelle est la probabilité qu'il ait préparé l'examen ?

1. Notons A l'événement "l'étudiant a préparé l'examen", R l'événement "l'étudiant a réussi l'examen" et X la variable aléatoire du nombre de questions ayant eu une bonne réponse. On ne connait pas directement la loi de X, mais il est facile de donner la loi des variables aléatoires "conditionnées" $X|A$ et $X|\bar{A}$. Elles suivent des lois binomiales de paramètre 15 et, respectivement, 0,8 et 1/3. Plus précisément, pour tout k dans $\{0,\dots,15\}$, on a

$$P(X=k|A)=\binom{15}{k}(0,8)^k(0,2)^{15-k}$$

$$P(X=k|\bar{A})=\binom{15}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{15-k}.$$

On en déduit que

$$P(R|A)=\sum_{k=8}^{15}P(X=k|A)\simeq 0,996$$

tandis que

$$P(R|\bar{A})=\sum_{k=8}^{15}P(X=k|\bar{A})\simeq 0,088.$$

On en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$P(R)=P(A)P(R|A)+P(\bar{A})P(R|\bar{A})\simeq 0,724.$$

2. D'après la formule de Bayes,

$$P(A|\bar{R})=\frac{P(\bar{R}|A)P(A)}{P(\bar{R})}=\frac{(1-P(R|A))P(A)}{1-P(R)}\simeq 0,011.$$

Les résultats des deux questions sont finalement très réconfortants sur la pertinence de cet examen.

Exercice 9

1. Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et soit $\epsilon > 0$. Démontrer que $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$.
2. Application : On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5 % que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de $\dfrac{1}{6}$ d'au plus $\dfrac{1}{100}$?

1. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $Y = \frac{X}{n}$. On a

$$P(|Y - E(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}.$$

Mais ici, $E(Y) = \frac{1}{n}E(X) = p$ et $V(Y) = \frac{1}{n^2}V(X) = \frac{p(1-p)}{n}$. Ceci donne donc immédiatement le résultat.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions du chiffre 6 au cours des n lancers. X suit la loi $\mathcal{B}(n, 1/6)$. On cherche n tel que

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) \geq 0,95 \iff P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq \frac{1}{100}\right) \leq 0,05.$$

On applique ensuite le résultat de la question précédente avec $\varepsilon = \frac{1}{100}$ et $p = \frac{1}{6}$. Il suffit que n vérifie

$$\frac{5 \times 10^4}{36n} \leq 0,05$$

soit

$$n \geq 27778.$$

Il suffit d'effectuer 27778 lancers. Cela dit, rien ne dit que ce nombre est optimal, et d'ailleurs, il ne l'est pas!

Exercice 10 Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant

- ou bien une seule marche, avec probabilité p ;
- ou bien deux marches, avec la probabilité $1-p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille, et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et Y_n le nombre de marches franchies. Quelle est la loi de X_n ? Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire l'espérance et la variance de Y_n.
2. Pour $k \geq 1$, on note p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche k. Que vaut p_1 ? Que vaut p_2 ? Établir une formule de récurrence liant p_k et p_{k-1}. En déduire la valeur de p_k pour $k \geq 1$.
3. On note désormais Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche. Écrire un algorithme qui simule la variable aléatoire Z_n.

1. On a affaire ici à un schéma de Bernoulli : X_n compte le nombre de fois où n expériences indépendantes (les n premiers sauts) donnent un résultat ayant probabilité p. La variable aléatoire X_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et p. Le nombre de marches franchies est alors

$$Y_n = X_n + 2(n - X_n) = 2n - X_n.$$

Par linéarité de l'espérance, on trouve

$$E(Y_n) = 2n - E(X_n) = 2n - np = (2-p)n.$$

De plus, on a

$$V(Y_n) = V(X_n) = np(1-p).$$

2. On a $p_1 = p$: il faut que le premier saut de la grenouille soit un saut d'une marche. Pour déterminer p_2, on remarque que la grenouille passe par la marche 2 si le premier saut est un saut de deux marches ou si les deux premiers sauts sont des sauts de une marche. On a donc
$p_2 = 1 - p + p^2$.
On observe que la grenouille ne passe pas par la marche k si elle passe par la marche $k-1$ et si elle fait un saut de deux marches. On a donc :

$$1 - p_k = (1-p)p_{k-1} \iff p_k = 1 - (1-p)p_{k-1}.$$

On reconnait une suite arithmético-géométrique : la suite $u_k = p_k - \frac{1}{2-p}$ est une suite géométrique de raison $p-1$, et donc on a $u_k = (p-1)^{k-1}u_1$, ce qui signifie que $p_k = \frac{1}{2-p} + (1-p)^{k-1}u_1$. Puisque $u_1 = p - \frac{1}{2-p} = \frac{2p-p^2-1}{2-p}$, on a finalement :

$$p_k = \frac{1}{2-p} + (p-1)^{k-1}\frac{2p-p^2-1}{2-p}.$$

Exercice 12 On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k indiscernables au toucher. On réalise l'expérience aléatoire suivante. On choisit d'abord au hasard et sans préférence une urne, puis on prélève une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. Pour $(i,k) \in \{1,\ldots,n\}^2$, déterminer $P(Y=k|X=i)$.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Quelle est l'espérance de Y ? Comment l'interprétez-vous ?

1. X suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$.
2. On a $P(Y=k|X=i)$ vaut $1/i$ si $k\leq i$ et 0 si $k>i$, puisqu'on tire uniformément une boule numérotée de 1 à i.
3. D'après la formule des probabilités totales, les événements $(X=1),(X=2),\dots,(X=n)$ formant une partition de l'univers et étant de probabilité non nulle,

$$P(Y=k)=\sum_{i=1}^{n}P(Y=k|X=i)P(X=i)=\sum_{i=1}^{n}P(Y=k|X=i)\frac{1}{n}.$$

Or $P(Y=k|X=i)$ vaut $1/i$ si $k\leq i$ et 0 si $k>i$. On en déduit que

$$P(Y=k)=\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{ni}.$$

4. Pour calculer l'espérance, on applique la définition et on permute les sommes.

$$\begin{aligned}E(Y)&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{k}{i}\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}k\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\times\frac{i(i+1)}{2}\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2}\\&=\frac{1}{2n}\times\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1\right)\\&=\frac{n+3}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 14 Soient $p \in]0;1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant $P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = -1) = 1 - p$.

1. Calculer l'espérance de X_k.
2. On pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. En calculant de deux façons l'espérance de Y_n, déterminer $p_n = P(Y_n = 1)$.
3. Quelle est la limite de p_n quand $n \to +\infty$?

Exercice 14 Soient $p \in]0;1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant $P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = -1) = 1 - p$.

1. Calculer l'espérance de X_k.
2. On pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. En calculant de deux façons l'espérance de Y_n, déterminer $p_n = P(Y_n = 1)$.
3. Quelle est la limite de p_n quand $n \to +\infty$?

(a) $\mathrm{E}(X_k) = 1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p - 1$.

(b) Par l'indépendance des variables

$$\mathrm{E}(Y_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = (2p-1)^n.$$

Aussi $Y_n \in \{1, -1\}$ et

$$\mathrm{E}(Y_n) = 1 \times p_n + (-1) \times (1 - p_n) = 2p_n - 1.$$

On en déduit

$$p_n = \frac{1 + (2p-1)^n}{2}.$$

(c) Puisque $|p| < 1$, $p_n \to 1/2$.

Exercice 15 À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.

(a) Chacune des n voitures a la probabilité $p = 1/3$ de choisir le premier péage. Dès lors, la variable aléatoire X_1 peut se comprendre comme étant le nombre de succès dans une série de n épreuves indépendantes ayant chacune la probabilité p de réussir. La variable X_1 suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 1/3$.

(b) $\mathrm{V}(X_1) = np(1-p) = 2n/9$ et $\mathrm{V}(X_2) = 2n/9$ car X_1, X_2, X_3 suivent les mêmes lois.
Puisque $X_1 + X_2 = n - X_3$, $\mathrm{V}(X_1 + X_2) = \mathrm{V}(n - X_3) = \mathrm{V}(X_3) = 2n/9$.

(c) Sachant

$$\mathrm{V}(X_1 + X_2) = \mathrm{V}(X_1) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{V}(X_2)$$

on obtient

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -n/9.$$

Exercice 16 Soit $n \geq 2$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et suivant la loi uniforme discrète sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. On considère a un entier de $\{1, 2, \ldots, n\}$, et Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y (vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité).
2. Calculer l'espérance de Y et la comparer à l'espérance de X_1.
3. Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle maximale ?

Exercice 17 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{0, \ldots, n\}^2$.

1. Déterminer la loi de X, la loi de Y et la loi de $X + Y$.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 18 On tire simultanément deux boules dans une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 4. On note U le numéro de la plus petite boule, et V le numéro de la plus grande boule. Déterminer la loi conjointe de (U, V), puis les lois de U et de V.

1. On a $Y(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$, et par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 :
   - si $k \leq a$, $P(Y = k) = P((X_1 = k) \cap (X_2 \leq a)) = \frac{1}{n} \times \frac{a}{n}$.
   - si $k > a$,
     $P(Y = k) = P((X_1 = k) \cap (X_2 \leq a)) + P((X_2 = k) \cap (X_2 > a)) = \frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}$.

On a bien $a \times \frac{a}{n^2} + (n - a) \times \left(\frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 1$.

2. Le calcul de l'espérance est facile :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{a} k\frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^{n} k\frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^{n} \frac{k}{n} \\ &= \frac{a(n+1)}{2n} + \frac{(a+n+1)(n-a)}{2n} \\ &= E(X_1) + \frac{a}{2n}(n-a) \geq E(X_1). \end{aligned}$$

3. On vérifie que :

$$E(Y) = \frac{1}{2n}\left(\frac{5}{4}n^2 + n - (a - n/2)^2\right).$$

Ainsi, $E(Y)$ est maximale pour $|a - n/2|$ le plus petit possible :
   - si n est pair, c'est pour $a = n/2$.
   - si n est impair, c'est pour $a = (n-1)/2$ ou $a = (n+1)/2$.

1. X est à valeurs dans $\{0,\ldots,n\}$. On a, pour tout k de $\{0,\ldots,n\}$,

$$P(X=k)=\sum_{i=0}^{n}P\big((X,Y)=(k,i)\big)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n+1}.$$

X suit donc une loi uniforme sur $\{0,\ldots,n\}$. Par symétrie, il en est de même de Y.
La variable aléatoire $X+Y$ est à valeurs dans $\{0,\ldots,2n\}$ et pour tout k dans cet intervalle d'entiers, on a

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P\big((X=i,Y=k-i)\big).$$

Si $k\leq n$, ceci devient égal à

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{k+1}{(n+1)^2}.$$

Si $k>n$, la somme ne peut aller que jusque n (car $i\leq n$) et ne peut commencer qu'en $k-n$ (car $k-i\leq n$) et donc

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=k-n}^{n}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{2n-k+1}{(n+1)^2}.$$

2. Les variables X et Y sont indépendantes, car pour tout couple (i,j) de $\{0,\ldots,n\}$, on a bien

$$P\big((X=i),(Y=j)\big)=P(X=i)P(Y=j)=\frac{1}{(n+1)^2}.$$

L'univers Ω est $\Omega = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\big\}$ et on considère que tous les événements sont équiprobables. On peut résumer la loi conjointe de U et V et les lois marginales grâce au tableau suivant :

$U\backslash V$	2	3	4	$P(U=u)$
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
2	0	$1/6$	$1/6$	$1/3$
3	0	0	$1/6$	$1/6$
$P(V=v)$	$1/6$	$1/3$	$1/2$	