MPSI2

Déterminants - exercices

Exercice 1

1. Soit $n \geq 4$ et $a, b, c, d \in \{1, \ldots n\}$ tous distincts. Que vaut $(a\ b) \circ (c\ d) \circ (d\ a)$?
2. Que dire d'une permutation de S_n possédant au moins $n-1$ points fixes ?
3. Une permutation $s \neq Id$ telle que $s^2 = Id$ est-elle nécessairement une transposition ?
4. Énumérer tous les éléments de $\mathcal{S}_4$.

Exercice 2

Pour les permutations σ suivantes, décomposer σ en produit de cycles disjoints, puis en produit de transpositions. Calculer la signature de σ, puis déterminer σ^{100} :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soit $n \geq 1$. Déterminer la signature de la permutation suivante $\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Soit $n \geq 3$.

1. Soient $a \neq b \in \{1, \ldots n\}$ et soit $\sigma \in S_n$. Quelle est la permutation $\sigma \circ (a\ b) \circ \sigma^{-1}$?
2. On appelle centre du groupe symétrique l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$ qui commutent avec toutes les autres : $\forall s \in S_n,\ s \circ \sigma = \sigma \circ s$. Déterminer le centre de S_n.

Exercice 5 Soit $n \geq 2$.

1. Démontrer que S_n est engendré par les transpositions $(1\quad 2), (1\quad 3), \ldots, (1\quad n)$.
2. Démontrer que S_n est engendré par les transpositions $(1\quad 2), (2\quad 3), \ldots, (n-1\quad n)$.
3. a) On considère la transposition $t = (1\quad 2)$ et le cycle $c = (1\quad 2\quad 3\ \ldots\ n)$. Calculer $c^k t c^{-k}$.
   b) En déduire que S_n est engendré par t et c.

Exercice 6 Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}_n$ de signature égale à 1. $\mathcal{A}_n$ est appelé le groupe alterné d'indice n.

1. Démontrer que $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.
2. Énumérer tous les éléments de $\mathcal{A}_3$, de $\mathcal{A}_4$.
3. On suppose désormais que $n \geq 2$ et on fixe τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Démontrer que $\phi : S_n \to S_n,\ \sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ est une bijection. En déduire le cardinal de $\mathcal{A}_n$.

1. On cherche l'image de chaque élément. Les éléments différents de a, b, c, d ne sont pas modifiés. Pour a, b, c et d, on a :

$$\begin{array}{ccccccc} a & \mapsto_{(d\,a)} & d & \mapsto_{(c\,d)} & c & \mapsto_{(a\,b)} & c \\ b & \mapsto_{(d\,a)} & b & \mapsto_{(c\,d)} & b & \mapsto_{(a\,b)} & a \\ c & \mapsto_{(d\,a)} & c & \mapsto_{(c\,d)} & d & \mapsto_{(a\,b)} & d \\ d & \mapsto_{(d\,a)} & a & \mapsto_{(c\,d)} & a & \mapsto_{(a\,b)} & b. \end{array}$$

La permutation est donc un cycle de longueur 4, $(a\,c\,d\,b)$.

2. Une permutation étant une bijection, le dernier élément de $\{1, \dots, n\}$ ne peut être envoyé que sur lui-même. Une telle permutation est donc nécessairement l'identité.

3. Non, du moins si $n \geq 4$. En effet, la composée de deux transpositions à support disjoint vérifie elle-même que $s^2 = Id$.

4. Pour énumérer tous les éléments de $\mathcal{S}_4$, on peut partir du fait qu'une permutation se décompose de manière unique en produit de cycles à supports disjoints. On trouve alors que les permutations sont

- l'identité (correspond à des produits de cycle de longueur 1);
- les 4 cycles, ce sont :

$$(1\,2\,3\,4),\ (1\,2\,4\,3),\ (1\,3\,2\,4),\ (1\,3\,4\,2),\ (1\,4\,2\,3),\ (1\,4\,3\,2);$$

- les 3 cycles (qui correspondent à un produit d'un cycle de longueur 3 par un cycle de longueur 1); ces 3 cycles sont

$$(1\,2\,3),\ (1\,3\,2),\ (1\,2\,4),\ (1\,4\,2),\ (1\,3\,4),\ (1\,4\,3),\ (2\,3\,4),\ (2\,4\,3).$$

- les transpositions (qui correspondent à un produit d'un cycle de longueur 2 et de deux cycles de longueur 1), ces transpositions sont :

$$(1\,2),\ (1\,3),\ (1\,4),\ (2\,3),\ (2\,4),\ (3\,4)$$

- les produits de deux transpositions à support disjoint (produit de deux cycles de longueur 2). Ces produits sont :

$$(1\,2) \circ (3\,4),\ (1\,3) \circ (2\,4),\ (1\,4) \circ (2\,3).$$

On a ainsi énuméré les 24 éléments de $\mathcal{S}_4$.

1. On commence par étudier les images successives de 1. Ce sont 3,4,6. On étudie ensuite les images successives de 2. On trouve 5 (ensuite on revient à 2). On a épuisé tous les éléments de $1,\dots,6$. La décomposition canonique de σ_1 en produits de cycles disjoints est

$$\sigma_1=(1,3,4,6)\circ(2,5).$$

Pour décomposer σ_1 en produit de transpositions, il suffit de décomposer chacun des cycles en produits de transposition. Pour le second, c'est facile car il s'agit déjà d'une transposition. Pour le premier, on écrit

$$(1,3,4,6)=(1,3)\circ(3,4)\circ(4,6)$$

et donc

$$\sigma_1=(1,3)\circ(3,4)\circ(4,6)\circ(2,5).$$

L'ordre du cycle $(1,3,4,6)$ est 4, l'ordre du cycle $(2,5)$ est 2, l'ordre de la permutation est donc le ppcm de 2 et 4, à savoir 4. En particulier, puisque $4|100$, on en déduit que $\sigma_1^{100}=Id$. Enfin, puisqu'on a décomposé σ_1 en produit de transpositions, il est facile de déterminer sa signature. Elle vaut

$$\varepsilon(\sigma_1)=(-1)^4=1.$$

2. Par la même méthode, on trouve

$$\sigma_2=(1,4,7,8)\circ(2,6,5)\circ(3,9),$$

$$\sigma_2=(1,4)\circ(4,7)\circ(7,8)\circ(2,6)\circ(6,5)\circ(3,9).$$

L'ordre de σ_2 est le ppcm de 4,3 et 2, soit 12. La signature de σ_2 est $(-1)^6=1$. Enfin, puisque $100\equiv 0[2]$, $100\equiv 1[3]$ et $100\equiv 0[4]$, on en déduit que

$$\sigma_2^{100}=(2,6,5)^1=(2,6,5).$$

1. On cherche l'orbite de 1. On trouve 3,6,2,5. 4 n'est pas dans l'orbite de 1, on cherche son orbite. On trouve 7. Tous les éléments de $\{1,\dots,7\}$ étant couverts, la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints est

$$\sigma = (1\ 3\ 6\ 2\ 5) \circ (4\ 7).$$

2. La signature du $5-$cycle $(1\ 3\ 6\ 2\ 5)$ est $(-1)^{5-1} = 1$. La signature de la transposition $(4\ 7)$ est -1. La signature de σ est donc $1 \times (-1) = -1$.

3. On va décomposer chaque cycle intervenant dans la décomposition de σ en produit de transpositions. Pour $(4\ 7)$, c'est déjà fait! Pour le 5-cycle, on a tout simplement

$$(1\ 3\ 6\ 2\ 5) = (1\ 3) \circ (3\ 6) \circ (6\ 2) \circ (2\ 5),$$

d'où

$$\sigma = (1\ 3) \circ (3\ 6) \circ (6\ 2) \circ (2\ 5) \circ (4\ 7).$$

On peut alors retrouver que la signature de σ est égale à -1.

4. On remarque que $\sigma^{10} = Id$ (l'ordre de σ valant le ppcm de 2 et 5, soit 10). Ainsi, $\sigma^{2000} = (\sigma^{10})^{200} = Id$. Finalement, $\sigma^{2001} = \sigma$.

Notons ε_n la signature de σ_n. Pour $n \geq 3$, on peut décomposer σ_n en $\tau_n \circ s_n$ où τ_n est la transposition $(1\ n)$ et s_n est la permutation

$$s_n = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mais il est clair que la signature de s_n vaut celle de σ_{n-2} (il s'agit de la même permutation, mais en renumérotant les éléments). On obtient donc la formule de récurrence

$$\varepsilon_n = -\varepsilon_{n-2}.$$

En particulier, $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-4}$ pour $n \geq 4$, et il suffit donc de regarder la congruence modulo 4 de n pour trouver la valeur de ε_n. On en déduit que

$$\begin{cases} \varepsilon_{4k+1} & = & \varepsilon_1 = 1 \\ \varepsilon_{4k+2} & = & \varepsilon_2 = -1 \\ \varepsilon_{4k+3} & = & \varepsilon_3 = -1 \\ \varepsilon_{4k+4} & = & \varepsilon_4 = 1 \end{cases}$$

Une autre façon de procéder est de remarquer que σ_n est le produit des transpositions suivantes : $(1\ \ n)$, $(2\ \ n-1)$, etc... Il suffit alors de compter le nombre de transpositions pour déterminer la signature.

1. Commençons par étudier l'image de $\sigma(a)$. On a

$$\sigma^{-1}(\sigma(a)) = a, \text{ puis } (a\ b)(a) = b,$$

donc $\sigma(a)$ est envoyé sur $\sigma(b)$. Un raisonnement similaire montre que $\sigma(b)$ est envoyé sur $\sigma(a)$. Prenons maintenant $k \neq \sigma(a), \sigma(b)$. Alors $\sigma^{-1}(k) \neq a, b$. En particulier, $\sigma^{-1}(k)$ reste invariant par la transposition $(a\ b)$. Et donc :

$$\sigma \circ (a\ b) \circ \sigma^{-1}(k) = \sigma(\sigma^{-1}(k)) = k.$$

Ainsi, les éléments différents de $\sigma(a), \sigma(b)$ sont invariants par la permutation. On en déduit que

$$\sigma \circ (a\ b) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a)\ \sigma(b)).$$

2. Soit σ appartenant au centre de S_n. Alors $\sigma \circ (1\ 2) = (1\ 2) \circ \sigma$ soit $\sigma \circ (1\ 2) \circ \sigma^{-1} = (1\ 2)$, ce qui donne, d'après la question précédente, $(\sigma(1)\ \sigma(2)) = (1\ 2)$. Ainsi, on a nécessairement $\sigma(1) = 1$ ou $\sigma(1) = 2$. De même, on a $\sigma \circ (1\ 3) = (1\ 3) \circ \sigma$, et le même raisonnement prouve que $\sigma(1) = 1$ ou $\sigma(1) = 3$. En comparant ces deux résultats, on a $\sigma(1) = 1$. Bien entendu, ce qui a été réalisé pour 1 peut l'être pour n'importe quel entier dans $\{1, \dots, n\}$, et σ doit être égale à l'identité. Réciproquement, l'identité commute avec toutes les permutations. Le centre du groupe symétrique, pour $n \geq 3$, est donc constitué de l'identité.
Remarquons que cette démonstration ne fonctionne plus si $n = 2$. Dans ce cas, le centre de S_2 est S_2 tout entier (mais il n'y a que deux éléments dans S_2!).

1. Puisque les transpositions engendrent S_n, il suffit de démontrer que toute transposition $(i \quad j)$, avec $i < j$, s'écrit comme produit des transpositions $(1 \quad k)$. Mais si $i = 1$, c'est déjà fait, et si $1 < i$, on a $(i \quad j) = (1 \quad i) \circ (1 \quad j) \circ (1 \quad i)$.

2. On va utiliser la question précédente et démontrer que toute transposition $(1 \quad k)$ s'écrit comme produit de transpositions de la forme $(i \quad i+1)$. On procède par récurrence finie sur $k \in \{2, \ldots, n\}$, la propriété étant vraie si $k = 2$. Supposons la propriété vraie au rang k. Pour la prouver au rang $k+1$, il suffit d'écrire que

$$(1 \quad k+1) = (k \quad k+1) \circ (1 \quad k) \circ (k \quad k+1).$$

3.

3.1. On va prouver par récurrence finie sur $k \in \{0, \ldots, n-2\}$ que $c^k \circ t \circ c^{-k} = (k+1 \quad k+2)$. La propriété est vraie si $k = 0$. Supposons la prouvée au rang k. Alors

$$c^{k+1} \circ t \circ c^{-(k+1)} = c \circ (k+1 \quad k+2) \circ c^{-1} = (k+2 \quad k+3).$$

3.2. D'après la question précédente, toute transposition de la forme $(k \quad k+1)$ s'écrit en fonction de c et de t. De plus, ces transpositions engendrent S_n. Ainsi, c et t engendrent S_n.

1. D'abord, il est clair que $Id_{\{1,\dots,n\}}$ est un élément de $\mathcal{A}_n$. Soient $\sigma, \sigma' \in \mathcal{A}_n$. Alors on a

$$\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') = 1 \times 1 = 1,$$

et donc $\sigma\sigma' \in \mathcal{A}_n$. D'autre part, on a

$$\varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(Id) = 1$$

et

$$\varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma^{-1})$$

et donc $\varepsilon(\sigma^{-1}) = 1$ ce qui prouve que σ^{-1} est bien un élément de $\mathcal{A}_n$. On a donc bien vérifié que $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$. Si on est un peu plus savant, on pouvait aussi remarquer que $\mathcal{A}_n$ est le noyau de la signature, qui est un morphisme de groupe. A ce titre, $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

2. Les éléments de $\mathcal{S}_3$ sont :
   - l'identité, qui est élément de $\mathcal{A}_3$;
   - les transpositions, qui ne sont pas éléments de $\mathcal{A}_3$;
   - les 3-cycles, $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$, qui sont éléments de $\mathcal{A}_3$.

En particulier, $\mathcal{A}_3$ est constitué des 3 éléments décrits précédemment. Décrivons maintenant $\mathcal{A}_4$: les éléments de $\mathcal{S}_4$ sont :

- l'identité, qui est élément de $\mathcal{A}_4$;
- les 4 cycles, qui ne sont pas éléments de $\mathcal{A}_4$;
- les 3 cycles, qui sont éléments de $\mathcal{A}_4$; ces 3 cycles sont

$$(1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2),\ (1\ 2\ 4),\ (1\ 4\ 2),\ (1\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 3),\ (2\ 3\ 4),\ (2\ 4\ 3).$$

- les transpositions (ou 2-cycles), qui ne sont pas éléments de $\mathcal{A}_4$;
- les produits de deux transpositions à support disjoint, qui sont éléments de $\mathcal{A}_4$. Ces produits sont :

$$(1\ 2)\circ(3\ 4),\ (1\ 3)\circ(2\ 4),\ (1\ 4)\circ(2\ 3).$$

Ainsi, $\mathcal{A}_4$ est constitué des 12 éléments décrits ci-dessus.

3. Puisque $\tau^2 = Id_{\{1,\dots,n\}}$, il est clair que $\phi\circ\phi = Id_{S_n}$. Ainsi, ϕ est bijective, d'inverse $\phi^{-1}=\phi$. Puisque $\varepsilon(\sigma\circ\tau) = -\varepsilon(\sigma)$, ϕ envoie $\mathcal{A}_n$ sur $S_n\backslash\mathcal{A}_n$. Puisque ϕ est bijective, les cardinaux de $\mathcal{A}_n$ et de $S_n\backslash\mathcal{A}_n$ sont identiques. D'autres part, S_n est la réunion disjoint de $\mathcal{A}_n$ et de $S_n\backslash\mathcal{A}_n$, donc

$$\mathrm{card}(S_n) = \mathrm{card}(\mathcal{A}_n) + \mathrm{card}(S_n\backslash\mathcal{A}_n) = 2\,\mathrm{card}(\mathcal{A}_n).$$

Il vient $\mathrm{card}(\mathcal{A}_n) = \frac{n!}{2}$.

Exercice 7 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soient f une forme linéaire sur E, p la projection vectorielle sur F parallèlement à G et $q = Id - p$ sa projection complémentaire. Montrer que l'application $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par $\phi(x, y) = f(p(x))f(q(y)) - f(p(y))f(q(x))$ est une forme bilinéaire alternée sur E.

Exercice 7 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soient f une forme linéaire sur E, p la projection vectorielle sur F parallèlement à G et $q = Id - p$ sa projection complémentaire. Montrer que l'application $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par $\phi(x, y) = f(p(x))f(q(y)) - f(p(y))f(q(x))$ est une forme bilinéaire alternée sur E.

Solution

$\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$.

$\varphi(y, x) = f(p(y)) f(q(x)) - f(p(x)) f(q(x)) = -\varphi(x, y)$. Il suffit d'étudier la linéarité en la 1ère variable.

$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = f(p(\lambda x + \mu x')) f(q(y)) - f(p(y)) f(q(\lambda x + \mu x'))$ or f, p et q sont linéaires donc

$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = \left(\lambda f(p(x)) + \mu f(p(x'))\right) f(q(y)) - f(p(y)) \left(\lambda f(q(x)) + \mu f(q(x'))\right)$ puis en développant et en réorganisant:

$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x', y)$.

φ est donc une forme bilinéaire antisymétrique donc alternée.

Exercice 8 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la famille (u, v, w) formée des vecteurs $u = (m, 1, 1)$, $v = (1, m, 1)$ et $w = (1, 1, m)$ où m désigne un paramètre réel.

Pour quelles valeurs de m cette famille constitue-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la famille (u, v, w) formée des vecteurs $u = (m, 1, 1)$, $v = (1, m, 1)$ et $w = (1, 1, m)$ où m désigne un paramètre réel.
Pour quelles valeurs de m cette famille constitue-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Puisqu'on est en dimension 3, la famille (e_1, e_2, e_3) est une famille libre si et seulement si c'est une base. Soit M la matrice de ses trois vecteurs, ie

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice M est inversible, c'est-à-dire si et seulement si $\det(M) \neq 0$. Mais on a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} t+2 & 1 & t \\ t+2 & t & 1 \\ t+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (t+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (t+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} \\
&= -(t+2)(t-1)^2.
\end{aligned}$$

La famille est donc une base si et seulement si $t \neq -2$ et $t \neq 1$.

Exercice 9 Démontrer que $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$

Exercice 10 Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.

2. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 11 Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j} + x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.

2. Pour a et b deux réels distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, en déduire la valeur du déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 12 Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$.

Exercice 13 Étudier, suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ ou $m \in \mathbb{R}$, l'inversibilité des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on note $A(x) = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto det(A(x))$ est polynomiale de degré 4 (seul x est variable, y, z et t sont ici des paramètres fixés).
2. Calculer $A(x)^T A(x)$. A quelle condition la matrice $A(x)$ est-elle inversible ?
3. En déduire la valeur de $det(A(x))$.
4. Ces résultats restent-ils vrais si $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$?

On commence par faire l'opération $L_1 + L_2 + L_3 \to L_1$. On obtient

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \\ &= (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On retire ensuite b fois la première ligne à la seconde, et c fois la première ligne à la troisième. On obtient alors

$$D = (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il reste une matrice triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale. Celle-ci est de déterminant 1 et donc $D = 1 + a + b + c$.

1. On développe suivant la première colonne. On trouve

$$\Delta_{n+2} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est Δ_{n+1}. Pour le second, on développe par rapport à la première ligne, et on retrouve alors Δ_n (on a barré 2 lignes et 2 colonnes). Ceci nous donne la formule voulue.

2. On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $r^2 = 3r - 2$. Ses racines sont $r = 1$ et $r = 2$. On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta_n = \lambda 2^n + \mu 1^n.$$

Mais $\Delta_1 = 3$ et $\Delta_2 = 7$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu & = & 3 \\ 4\lambda + \mu & = & 7. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que $\lambda = 2$ et $\mu = -1$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta_n = 2^{n+1} - 1.$$

1. Retranchons la première colonne à toutes les autres colonnes. Alors le déterminant de $A(x)$ est égal au déterminant d'une matrice dont la première colonne est constituée par des termes du type $a_{i,1}+x$ et tous les autres coefficients sont des constantes (ne dépendent pas de x). Si on développe ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve que

$$\det(A(x)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}(a_{i,1}+x)\det(A_i)$$

où A_i est une matrice à coefficients réels. D'où le résultat.

2. Soit $D(x)$ le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à chacun des coefficients. D'après la question précédente, on sait que $D(x)=\lambda x+\mu$ pour des réels λ et μ. De plus, $D(-a)$ est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont $\alpha_i - a$. D'où

$$D(-a) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - a).$$

De même, on a

$$D(-b) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - b).$$

λ et μ se déduisent alors facilement par la résolution d'un système 2×2 :

$$\begin{cases} \lambda &= \frac{D(-b)-D(-a)}{a-b} \\ \mu &= \frac{aD(-b)-bD(-a)}{a-b}. \end{cases}$$

Ce qui nous intéresse est la valeur $D(0)$, soit

$$D(0) = \frac{a\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - b) - b\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - a)}{a-b}.$$

On note $\Delta_n(x)$ le déterminant recherché. On remarque, en écrivant la formule qui donne la définition du déterminant, que $\Delta_n(x)$ est un polynôme de degré exactement égal à $2n$. De plus, le terme en x^{2n} ne peut s'obtenir qu'en faisant le produit des termes diagonaux. On en déduit que le coefficient devant x^{2n} est égal à 1. Calculons ensuite $\Delta_n(x)$ en effectuant un développement suivant la première ligne. On trouve

$$\Delta_n(x) = (1+x^2)\Delta_{n-1}(x) + x \begin{vmatrix} -x & -x & 0 & \dots & & \\ 0 & 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

On continue en effectuant un développement suivant la première colonne du déterminant restant. On trouve

$$\Delta_n(x) = (1+x^2)\Delta_{n-1}(x) - x^2\Delta_{n-2}(x).$$

Pour trouver vraiment la valeur de $\Delta_n(x)$, on calcule les premières itérations. On a

$$\Delta_1(x) = 1+x^2,\ \Delta_2(x) = 1+x^2+x^4, \dots$$

On conjecture que $\Delta_n(x) = 1+x^2+\dots+x^{2n}$. Démontrons ceci par récurrence double. La propriété est vraie aux rangs $n=1$ et $n=2$. Si elle est vraie simultanément aux rangs $n-2$ et $n-1$, la formule de récurrence précédente montre qu'elle est aussi vraie au rang n. On obtient donc $\Delta_n(x) = 1+x^2+\dots+x^{2n}$.

Il suffit de calculer le déterminant. Il faut le calculer de façon suffisamment intelligente pour qu'il apparaisse immédiatement sous forme factorisée. Pour la première matrice, commencer par tout ajouter sur la première colonne.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a-2 & -1 & 0 & -1 \\ a-2 & a & -1 & 0 \\ a-2 & -1 & a & -1 \\ a-2 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\
&= (a-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\
&= (a-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} \\
&= (a-2) \begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} \\
&= (a-2)a \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} \\
&= a(a-2)\big((a+1)^2-1\big) = a^2(a-2)(a+2).
\end{aligned}$$

La matrice A est donc inversible si et seulement si $a \neq 0, 2, -2$.

Pour la matrice B, on procède de la même façon, en commençant par mettre $m^2 - m = m(m-1)$ en facteur sur la dernière colonne.

$$\begin{aligned}
\det(B) &= m(m-1)\begin{vmatrix} 0 & m & m & 1 \\ 1 & m-1 & 2m-1 & 1 \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= m(m-1)\begin{vmatrix} 0 & m & m & 1 \\ 1 & m-1 & 2m-1 & 1 \\ 0 & m & m & 0 \\ 0 & 1 & m & -1 \end{vmatrix} (L4 - L2 \to L4) \\
&= -m(m-1)\begin{vmatrix} m & m & 1 \\ m & m & 0 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} \\
&= -m^2(m-1)\begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} \\
&= -m^2(m-1)\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix} (C2 - C1 \to C2) \\
&= m^2(m-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m-1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -m^2(m-1)^2
\end{aligned}$$

La matrice est inversible si et seulement si $m \neq 0, 1$.

Calculons le déterminant de cette famille (de $(n+1)$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$) par rapport à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$. On a

$$(X - z_i)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} z_i^{n-j} X^j.$$

Le déterminant recherché est donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} \binom{n}{0}(-z_0)^n & \binom{n}{0}(-z_1)^n & \dots & \binom{n}{0}(-z_n)^n \\ \binom{n}{1}(-z_0)^{n-1} & \binom{n}{1}(-z_1)^{n-1} & \dots & \binom{n}{1}(-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \dots & \binom{n}{n} \end{vmatrix}$$

$$= \binom{n}{0}\binom{n}{1}\dots\binom{n}{n} \begin{vmatrix} (-z_0)^n & (-z_1)^n & \dots & (-z_n)^n \\ (-z_0)^{n-1} & (-z_1)^{n-1} & \dots & (-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde, qui est non-nul puisque les z_i sont supposés tous distincts. La famille considérée est effectivement une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 16 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Calculer $\det(u)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u(P) = P + P'$; **2.** $u(P) = P(X+1) - P(X)$; **3.** $u(P) = XP' + P(1)$.

Exercice 17 Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(A) = {}^tA$. Calculer le déterminant de ϕ.

Exercice 18 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -id_E$.

1. À l'aide du déterminant, montrer que n est nécessairement un entier pair.

2. Donner un exemple d'application f convenable pour $n = 2$.

3. Généraliser en proposant un exemple pour tout entier pair.

1. Cherchons la matrice de u dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$. On a $u(1) = 1$ et pour $j \geq 1$, $u(X^j) = X^j + jX^{j-1}$. Autrement dit, la matrice de u dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice est triangulaire supérieure et on en déduit aisément que $\det(u) = 1$.

2. On peut appliquer la même méthode ou remarquer plus simplement que u n'est pas injective, car les polynômes constants sont dans $\ker(u)$. Ainsi, u n'étant pas inversible, $\det(u) = 0$.

3. On calcule toujours la matrice de u dans la base $(1, X, \dots, X^n)$. Puisque $u(1) = 1$ et $u(X^j) = jX^j + 1$, la matrice est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $1, 1, 2, \dots, n$. Ainsi, $\det(u) = n!$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme directe du sous-espace vectoriel des matrices symétriques et des matrices antisymétriques. Soit $(A_1, \dots, A_p)$ et $(B_1, \dots, B_q)$ une base respective de l'espace vectoriel des matrices symétriques et antisymétriques. $(A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_q)$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et il suffit de calculer le déterminant dans cette base. Mais $\phi(A_i) = A_i$ tandis que $\phi(B_j) = -B_j$. On a donc $\det(\phi) = (-1)^q$. Il suffit ensuite de se souvenir que $p = \frac{n(n+1)}{2}$, ou $q = \frac{n(n-1)}{2}$.