

Exercice 1 Soit $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$.
Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

Exercice 2 Montrer que $\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1 - t^2)dt$ définit un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$.

Exercice 3 Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel.
Établir $\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}$

Exercice 4 Démontrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k} \right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n x_k^2$.

Exercice 5 Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout $t \in [a, b]$, on a $f^2(t) \leq (t - a) \int_a^t f'^2(u)du$.
2. En déduire que $\int_a^b f^2(t)dt \leq \frac{(b - a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u)du$.

Exercice 6 Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$.
Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$. Préciser les cas d'égalité.

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E .
Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Sans calculs, déterminer une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 9 $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère le sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ défini par : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + z + t = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$. Déterminer une base orthonormale de F .

Exercice 10 Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.

Exercice 11 $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer un système d'équations de $G^\perp$ où G est le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par : $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + t = 0\}$.

Exercice 12 Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E . Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

Exercice 13 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E .

1. Montrer que : $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Que se passe-t-il en dimension finie ?

Exercice 14 Soient E un espace préhilbertien réel et $f : E \rightarrow E$ une application surjective telle que pour tout $x, y \in E$, on ait $(f(x)|f(y)) = (x|y)$. Montrer que f est un endomorphisme de E .

Exercice 15 Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace vectoriel défini par $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\}$. Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 8, 1, 1)$ sur F .

Exercice 16 Soient E un espace vectoriel euclidien, et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux. Démontrer l'équivalence entre : 1. $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)$; 2. Pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

Exercice 17 Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel des quadruplets (x_1, x_2, x_3, x_4) de E tels que
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de G .
2. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p_G sur G .
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E . Déterminer la distance de x à G .

Exercice 18 Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire $\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M^T N)$.

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.
3. Calculer la distance de J à F .

Exercice 19 Soit E un espace préhilbertien. Pour $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E , on appelle matrice de Gram la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $(\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j}$. On appelle déterminant de Gram des vecteurs $x_1, \dots, x_p$, et on note $G(x_1, \dots, x_p)$, le déterminant de cette matrice.

1. Démontrer que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre si et seulement si $G(x_1, \dots, x_p) \neq 0$.
2. On suppose désormais que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre, et on note $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Soit également $x \in E$. Démontrer que $d(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, \dots, x_p)}$.

Exercice 20 Les questions de cet exercice sont indépendantes

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $u(3, 4, 3)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z = 0$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $M(3, 4, 5)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z + 2 = 0$.

Exercice 21 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

On pose H l'hyperplan $H = \{P \in E; P(1) = 0\}$.

1. Déterminer une base de H .
2. Déterminer une base orthonormale de H .
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H , puis la distance de X à H . Retrouver ce résultat d'une autre manière.