

Objectifs du chapitre :

- comprendre la notion de produit scalaire et de distance dans un espace vectoriel autre que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
- savoir déterminer le supplémentaire orthogonal d'un espace donné
- savoir exploiter les bases orthonormales (et en calculer) pour effectuer des calculs de projections

Dans tout le chapitre, on se place dans des espaces vectoriels réels, pouvant être de dimension infinie.

1. Produit scalaire

Définition

- On appelle **produit scalaire** dans un espace vectoriel réel E toute forme bilinéaire symétrique définie positive, autrement dit toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés fondamentales suivantes :

- **bilinéarité** : $\forall (u, v, w) \in E^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \varphi(\lambda u + \mu v, w) = \lambda \varphi(u, w) + \mu \varphi(v, w)$
et $\varphi(u, \lambda v + \mu w) = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u, w)$
- **symétrie** : $\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$
- **définie positivité** : $\forall u \in E, \varphi(u, u) \geq 0$ et $\varphi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Si φ est un produit scalaire, $\varphi(u, v)$ sera souvent noté $u.v$, ou $\langle u, v \rangle$ ou même $(u|v)$.

- Un **espace préhilbertien** est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire.
Si E est de dimension finie, on parlera plutôt d'**espace euclidien**.

Remarque : en pratique, pour démontrer qu'une application φ est un produit scalaire, on se contente de prouver la linéarité à gauche, celle à droite découlant ensuite de la symétrie.

Propriété

- L'application $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(u, v) = \sum_{k=1}^n u_k v_k$ (en notant u_i et v_i les coordonnées respectives des vecteurs u et v dans la base canonique) est un produit scalaire appelé **produit scalaire canonique** sur $\mathbb{R}^n$.
- L'application φ définie sur $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2$ par $\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{i,j}$ est un produit scalaire appelé **produit scalaire canonique** sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Remarque : on peut en fait calculer le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de façon matricielle : en notant X et Y les matrices-colonnes des coordonnées des deux vecteurs u et v dans la base canonique, alors $u.v = X^T Y$.

Démonstration (colles) :

Exemples :

- **Exemple 1 :** En notant $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$, $\varphi(u, v) = 2xx' + xy' + x'y + 2yy'$ est un produit scalaire. En effet :

- **Exemple 2 :** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, l'application définie par $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$ est un produit scalaire.

- **Exemple 3 (colles) :** Sur l'espace vectoriel E des fonctions continues sur $[0, 1]$, on peut définir un produit scalaire par la formule suivante : $f.g = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Définition

Soit $(E, .)$ un espace vectoriel préhilbertien et $(u, v) \in E^2$.

- La **norme** du vecteur u est le réel positif $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$
- La **distance** entre les vecteurs u et v est le réel positif $d(u, v) = \|u - v\|$.
- Un vecteur $u \in E$ préhilbertien est dit **unitaire** (ou normé) si $\|u\| = 1$.

Remarque : la distance entre deux vecteurs dépend du choix initial du produit scalaire.

Par exemple, si on se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, les applications φ et ψ définies par $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^3 a_k b_k$ (où a_i et b_i désignent les coefficients des polynômes P et Q) et $\psi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ sont des produits scalaires. La distance entre les polynômes $P(X) = 1$ et $Q(X) = 2X^2 - X$ et la distance entre $R(X) = X$ et $S(X) = 2X + X^2$ valent :

Propriétés : lien entre normes et produit scalaire

Si $(E, \cdot)$ est un espace vectoriel.

- $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$
- $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$
- $\langle u + v, u - v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$
- $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$ (identités de polarisation)
- $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ (identité du parallélogramme)
- $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \times \|v\|$ (inégalité de Cauchy-Schwartz),
avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire),
avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires de même sens

Remarque : les formules de polarisation permettent d'exprimer le produit scalaire en fonction de la norme euclidienne associée.

Démonstrations (colles) :

Remarque : L'inégalité de Cauchy-Schwartz permet de démontrer de nombreuses inégalités. Par exemple, si on l'applique dans $\mathbb{R}^n$ aux vecteurs $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (1, \dots, 1)$, on obtient la majoration :

2. Orthogonalité

a) bases orthogonales

Définition

Soit E un espace vectoriel préhilbertien, alors :

- deux vecteurs $(u, v) \in E$ sont **orthogonaux** si $\langle u, v \rangle = 0$. On le notera $u \perp v$.
- deux sous-ensembles F et G de E (pas nécessairement des sous-espaces vectoriels) sont **orthogonaux** si $\forall (u, v) \in F \times G, \langle u, v \rangle = 0$. On le notera $F \perp G$.
- une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_k)$ est **orthogonale** si elle est constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux, **orthonormale** si de plus les vecteurs de la famille sont tous unitaires.
- une **base orthonormale** (ou simplement orthogonale) dans un espace euclidien est une base qui forme une famille orthonormale (respectivement orthogonale).

Exemples :

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique.
De même pour la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Si on reprend par contre les deux exemples de produits scalaires sur $\mathbb{R}_3[X]$, la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est orthonormale pour φ , mais pas du tout pour ψ .

Théorème de Pythagore :

Deux vecteurs $(u, v) \in E$ sont orthogonaux si et seulement si $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Démonstration :

Remarque : on peut généraliser le principe du théorème de Pythagore à une somme de k vecteurs :

si la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est orthogonale, alors $\left\| \sum_{i=1}^k u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^k \|u_i\|^2$

Corollaire :

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls dans un espace préhilbertien est toujours libre.

Démonstration (colles) : Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une famille orthogonale.

Propriété

Soit $u \in E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , alors $u = \sum_{k=1}^n \langle u, e_k \rangle e_k$.

Autrement dit, les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont ses produits scalaires avec les vecteurs de $\mathcal{B}$.

Démonstration : Soient $(u_1, \dots, u_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E .

Le produit scalaire des vecteurs $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ peut se calculer par la formule

$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$, où les réels u_i et v_i sont les coordonnées des deux vecteurs dans la base $\mathcal{B}$.

Par conséquent, $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2$

Démonstration :

b) orthonormalisation de Gram-Schmidt

Propriété

Si la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est orthonormale, et $u \in E$.

Alors le vecteur $u - \sum_{i=1}^k \langle u, e_i \rangle e_i$ est orthogonal à tous les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_k$

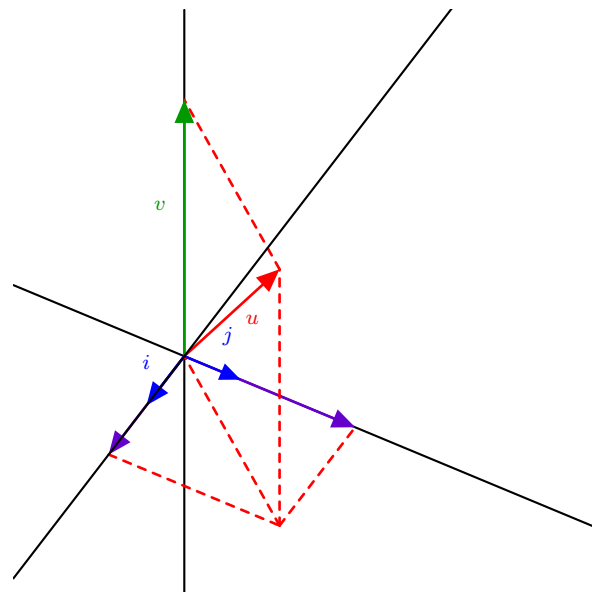
Illustration dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$:

Sur la figure ci-contre :

la famille (i, j) est orthonormale
et le vecteur $v = u - \langle u, i \rangle i - \langle u, j \rangle j$
est orthogonal à la fois à i et à j .

Les vecteurs $\langle u, i \rangle i$ et $\langle u, j \rangle j$
sont indiqués avec une flèche
(ce sont les deux vecteurs colinéaires à i et j).

Démonstration :



Théorème : procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base d'un espace vectoriel euclidien E .

On peut alors construire une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E en procédant de la façon suivante :

- on pose $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$
 - on calcule $u'_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1$, puis on pose $e_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|}$
 - plus généralement :
pour tout entier $k \leq n$, en supposant avoir déjà construit les $k - 1$ vecteurs $(e_1, \dots, e_{k-1})$,
on calcule $u'_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle e_i$, puis on normalise le vecteur u'_k en posant $e_k = \frac{u'_k}{\|u'_k\|}$.
- De plus, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad Vect(e_1, \dots, e_k) = Vect(u_1, \dots, u_k)$.

Remarques :

1. u'_k est u_k moins sa projection sur $Vect(e_1, \dots, e_{k-1})$
2. u_k s'obtient en rendant unitaire le vecteur u'_k .
3. Dans le cas d'une base, le procédé de Schmidt conserve l'orientation.

Démonstration :

Corollaire : théorème de la base orthonormale incomplète

Il existe des bases orthonormales dans tout espace euclidien E .

De plus, on peut compléter toute famille orthonormale de E en une base orthonormale de E .

Démonstration

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire $P.Q = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Appliquons le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique pour obtenir une base orthonormale de E pour ce produit scalaire :

c) supplémentaires orthogonaux

Définition

Soit E un espace préhilbertien et $F \subset E$.

On appelle **orthogonal** de F , et on note $F^\perp$, l'ensemble $F^\perp = \{u \in E \mid \forall v \in F \quad \langle u, v \rangle = 0\}$

Exemples :

- $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.
- Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, $\{(1, 1, 1)\}^\perp =$

Propriétés de l'orthogonal :

- $F^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel de E .
- si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F et $F^\perp$ sont en somme directe
- si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , alors $F^\perp$ est un supplémentaire de F , appelé **supplémentaire orthogonal** de F .
- $F \subset (F^\perp)^\perp$, avec égalité dans le cas où F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

Démonstration :

Exemples :

- on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. Les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

- $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère les sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^4$ définis par : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z + t = 0 \text{ et } -x + 2y + 3z - t = 0\}$ et $G = \text{vect}((1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, -1))$. Déterminer une base de $F^\perp$ et de $G^\perp$.

d) projections orthogonales**Définition**

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

La **projection orthogonale** sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$

Propriété

Si $(e_1, \dots, e_k)$ est une base orthonormale de F .

Alors l'application p de E dans E définie par : $p : u \mapsto \sum_{i=1}^k \langle u, e_i \rangle e_i$ est un projecteur de E dont l'image

est F et le noyau est $F^\perp$. Autrement dit : le projeté orthogonal de u sur F est égal à $\sum_{i=1}^k \langle u, e_i \rangle e_i$

Démonstration :

Attention ! le fait que la base soit orthonormale est essentiel.

Exemple : on se place dans l'espace E des fonctions continues sur $[0, 2\pi]$, muni du produit scalaire intégral $f.g = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. On pose dans cet espace $f(t) = t$ et on souhaite calculer le projeté orthogonal de f sur le sous-espace vectoriel F de E engendré par les fonctions cos et sin .

Définition

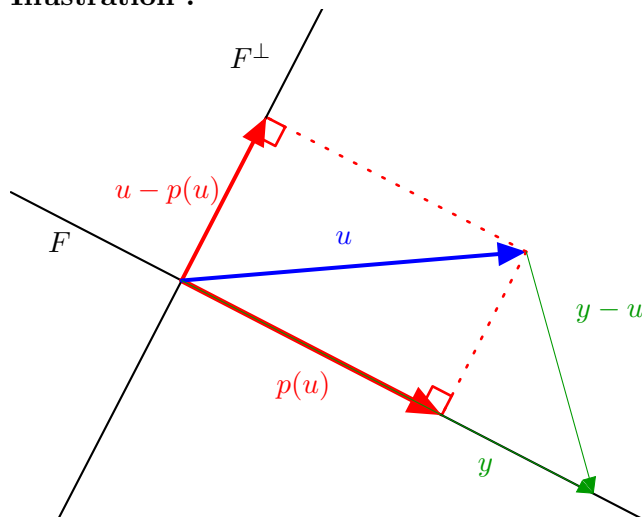
Soit E un espace préhilbertien et A un sous-ensemble quelconque (non vide) de E . Pour tout vecteur $u \in E$, on appelle **distance** de u à A le réel positif $d(u, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$

Propriété

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $p(u)$ le projeté orthogonal de u sur F .
Alors $d(u, F) = \|u - p(u)\|$, et ce minimum est atteint uniquement pour le projeté orthogonal.
De plus, $d(u, F)^2 = \|u\|^2 - \|p(u)\|^2$.

Démonstration (colles) :

Illustration :



Exemple : déterminons les réels a et b pour lesquels l'intégrale $J = \int_0^{2\pi} (t - a\cos(t) - b\sin(t))^2 dt$ est minimale, ainsi que la valeur de cette intégrale.

e) hyperplan affine

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel de **dimension finie**

Définition

Soit H un hyperplan affine de E de direction $\vec{H}$.

On appelle **vecteur normal** à H tout vecteur non nul de $\vec{H}^\perp$.

Remarque : tous les vecteurs normaux à H sont colinéaires.

Propriété

Un hyperplan affine H de E est entièrement défini par un point et un vecteur normal.

Démonstration : En effet, si $A \in H$ et $\vec{u}$ est normal à H alors $H = \{M \in E \mid \langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle = 0\}$

Remarque : Cette propriété permet de trouver une équation cartésienne de H .

Propriété

Si A est un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul et λ un scalaire.

Alors $\{M \mid \langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle = \lambda\}$ est un hyperplan affine normal à $\vec{u}$.

Propriété

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E , si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sont n réels non tous nuls si $b \in \mathbb{R}$.

Alors $\{M(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ tels que } a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b\}$ est un hyperplan normal au vecteur $\vec{u} = (a_1, \dots, a_n)$.

Remarque : cette propriété permet de déterminer un vecteur normal à un hyperplan dont on connaît une équation cartésienne.

Propriété : distance à un hyperplan

Soient H un hyperplan de E , A un point de H et $\vec{n}$ un vecteur normal **unitaire** à H .

Pour tout M de E , on a $d(M, H) = |\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle|$

En particulier :

- Si dans un plan muni d'un repère orthonormal, D est la droite d'équation $ax + by = c$
alors pour tout point $M(x, y)$ du plan $d(M, D) = \frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- Si dans l'espace muni d'un repère orthonormal, P est le plan d'équation $ax + by + cz = d$
alors pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace $d(M, P) = \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Exemple : Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose, pour $(P, Q) \in E^2$,
 $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$. On a ainsi défini un produit scalaire sur E . En effet :

Une base orthonormée de E est :

On en déduit que la distance de $Q \in E$ au sous-espace $H = \left\{ P \in E; \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$ est égale à :