Colle : Espaces vectoriels euclidiens et préhilbertiens

1 Cours

1. Définition d'un produit scalaire / d'un espace euclidien
2. Montrer que $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit bien un produit scalaire.
3. Preuve de Inégalité de Cauchy Schwarz / inégalité triangulaire
4. Identité de polarisation.
5. Preuve de « une famille orthonormale est toujours libre»
6. Énoncer et savoir appliquer le procédé de Schmidt/ Bases orthonormales
7. Expression de la projection orthogonales sur un sev F en fonction d'une BON de F.
8. Distance d'un vecteur à un sev. Preuve que la distance est atteinte pour le projeté orthogonal.

2 Exercices

2.1 Exercices à rédiger

1. Déterminer les réels a et b qui minimisent $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2 - (ax+b)\right)^2 \mathrm{d}x$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $(A|B) = \mathrm{tr}(A^T B)$.
   Montrer que $(\mid)$ définir un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt, la famille (u, v, w) où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.2 Exercices d'entraînement

1. Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $u = (x, y)$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, on pose
   $$\varphi(u, v) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'$$
   A quelle(s) condition(s) sur a, b, c, d a-t-on φ produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?
2. Soit E un espace vectoriel euclidien et p une projection orthogonale de E.
   a) Montrer que $\forall (u, v) \in E^2 : \ (p(u)|v) = (u|p(v))$.
   b) en déduire que la matrice de p dans une base orthonormale est symétrique.
3. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$.
   Étudier les cas d'égalités.
4. Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
   Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
   Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.

5. Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E.
   Montrer que la projection p est orthogonale si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

6. L'espace étant muni d'un repère orthonormal, déterminer la distance entre le point $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le plan d'équation $x + y + 2z = 4$.

2.3 Exercice d'approfondissement

On considère $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
Soit $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

1. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
   Indication : Si $f \in F^\perp$ alors on pourra considérer $\varphi : x \mapsto x^2 f(x)$.
2. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.