

Colle : Déterminants, Produit scalaire

1 Cours

1.1 Sur les déterminants

1. Les questions de cours de la semaine précédente.
2. Déterminant de Vandermonde, justification de la valeur.
3. Comatrice, Définition et énoncé de la formule $A \operatorname{com}(A)^T = \operatorname{com}(A)^T A = \dots$

1.2 Sur les produits scalaires.

1. Définition d'un produit scalaire / d'un espace euclidien
2. Montrer que $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ définit bien un produit scalaire.
3. Preuve de Inégalité de Cauchy Schwarz / inégalité triangulaire
4. Identité de polarisation.
5. Définition de l'orthogonal.

2 Exercices

2.1 Exercices à rédiger

1. Exercice d'entraînement n° 3.
2. On définit une application $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})Q(e^{-i\theta})d\theta$$

- a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- b) Montrer que $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille orthonormée pour ce produit scalaire.
3. On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$.

2.2 Exercices d'entraînement

1. Exercices de la semaine dernière sur les déterminants.
2. Soient n un entier supérieur à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 - a) Établir

$$\begin{cases} \operatorname{rg}(A) = n & \Rightarrow \operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = n \\ \operatorname{rg}(A) = n - 1 & \Rightarrow \operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = 1 \\ \operatorname{rg}(A) \leq n - 2 & \Rightarrow \operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = 0 \end{cases}$$

- b) Montrer

$$\det(\operatorname{com}(A)) = (\det A)^{n-1}$$

- c) En déduire

$$\operatorname{com}(\operatorname{com}(A))$$

3. On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A .

Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

4. Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $u = (x, y)$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\varphi(u, v) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'$$

A quelle(s) condition(s) sur a, b, c, d a-t-on φ produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

5. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$.

Étudier les cas d'égalités.

6. Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.