LIMITES

Dans ce chapitre les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs réelles, les fonctions réelles f et g de variable x sont définies sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$, et dans un premier temps a et ℓ sont des nombres réels.

Définitions et premières propriétés

⊠ Une méthode de démonstration de l'égalité de deux réels x et y repose sur cette implication :

$$\big(\forall\, h>0 \quad |x-y|\le h\big) \Longrightarrow x=y$$

◊ La justification de cette implication peut se faire par contraposée ou par l'absurde. Cette implication équivalente en est la contraposée :

$$x\neq y \Longrightarrow \big(\exists\, h>0 \quad |x-y|>h\big) \qquad h=\frac{|x-y|}{2}>0 \text{ convient}$$

Limite d'une suite

• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\mathbb{R}$ à cette condition :

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\, N\in\mathbb{N} \quad \forall\, n\ge N \quad |u_n-\ell|\le\varepsilon$$

■ Dans ce cas ℓ est unique et est notée $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

∗ Ainsi sur un graphe représentant u_n en fonction de n, les termes u_n de la suite se rapprochent de la droite d'ordonnée ℓ lorsque n devient de plus en plus grand.

★ Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une demi-bande horizontale orientée dans le sens des abcisses croissantes, d'ordonnée centrée en ℓ et de hauteur 2ε qui contient à partir d'un certain rang tous les termes de la suite.

◊ Une des preuves de l'unicité de la limite, comme d'autres démonstrations d'analyse, repose sur la propriété précédente. Ces deux propositions valables pour tout $\varepsilon>0$ correspondent à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers les limites ℓ_1 et ℓ_2 :

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\, N_1\in\mathbb{N} \quad \forall\, n\ge N_1 \quad |u_n-\ell_1|\le\varepsilon$$
$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\, N_2\in\mathbb{N} \quad \forall\, n\ge N_2 \quad |u_n-\ell_2|\le\varepsilon \quad N=\max(N_1,N_2)\in\mathbb{N}$$
$$|\ell_1-\ell_2|=|\ell_1-u_N+u_N-\ell_2|\le|\ell_1-u_N|+|u_N-\ell_2|\le 2\varepsilon$$
$$\forall\, h>0 \quad |\ell_1-\ell_2|\le h \qquad \text{donc} \quad \ell_1=\ell_2$$

Pour $h>0$ donné puis $\varepsilon=h/2>0$ l'existence de N_1 et de N_2, puis celle de $N=\max(N_1,N_2)\in\mathbb{N}$ permet de définir u_N pour appliquer l'inégalité triangulaire essentielle de cette démonstration.

▶ La suite constante de valeur $a\in\mathbb{R}$ et la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent :

$$\lim_{n\to+\infty} a=a \qquad \lim_{n\to+\infty} 1/n=0$$

▷ Avec ces notations $N=0$ convient pour la suite constante, et tout $N\ge 1/\varepsilon$ convient pour la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, par exemple $N=\lfloor 1/\varepsilon\rfloor+1$:

$$N=\lfloor 1/\varepsilon\rfloor+1\in\mathbb{N}^* \qquad N\ge 1/\varepsilon>0 \qquad 0<\frac{1}{N}\le\varepsilon$$
$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \forall\, n\ge\lfloor 1/\varepsilon\rfloor+1 \quad 0<\frac{1}{n}\le\frac{1}{N}\le\varepsilon \qquad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

★ L'existence et la valeur de la limite d'une suite ne changent pas lorsqu'un nombre fini de termes est modifié ou n'est pas défini.
Il suffit pour cela de remplacer N par $\max(N,M+1)$ dans la définition de la convergence de la suite, en notant M le plus grand des indices des termes modifiés ; la suite n'est pas modifiée à partir du rang $M+1$.
L'entier M existe bien car il correspond au plus grand entier d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$. Au contraire les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ qui ne sont pas finis ne sont pas majorés et ne possèdent pas de plus grands éléments.

Limite d'une fonction

○ Cette condition signifie que a est dans le voisinage de $\mathcal{D}$, et définit a comme un point adhérent à $\mathcal{D}$:

$$\forall\, h>0 \quad [a-h,\, a+h]\cap\mathcal{D}\neq\emptyset$$

∗ Tout point a de $\mathcal{D}$ est adhérant à $\mathcal{D}$ car $a\in[a-h,\, a+h]\cap\mathcal{D}\neq\emptyset$.
Par ailleurs 0 est adhérent à $\mathbb{R}_+^*$ même si $0\notin\mathbb{R}_+^*$ du fait que $h/2>0$

est un élément de $[0-h,\, 0+h] \cap \mathbb{R}_+^*$.

• La fonction f converge en a vers $\ell \in \mathbb{R}$ à ces deux conditions :

$$\forall h>0 \quad [a-h,\, a+h] \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$$
$$\text{ET} \quad \forall \varepsilon>0 \ \ \exists \eta>0 \ \ \forall x \in [a-\eta,\, a+\eta] \cap \mathcal{D} \quad |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

■ Dans ce cas ℓ est unique et est notée $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

∗ Ainsi sur le graphe de l'application f, les images $f(x)$ se rapprochent de ℓ, à ε près, lorsque x est proche de a à $\eta>0$ près.

★ Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que le graphe de la fonction f ne sort ni vers le haut ni vers le bas du rectangle centré au point de coordonnées (a, ℓ) dont la base mesure 2η et la hauteur 2ε.

◊ La démonstration de l'unicité de la limite suit le même canevas que celle de la même propriété pour les suites, en remplaçant u_N par $f(x)$ où $x \in [a-\eta,\, a+\eta] \cap \mathcal{D}$, et $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ par $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$.

Continuité

□ Toute fonction f qui est définie en a et qui a une limite en a vérifie nécessairement $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

◊ La définition de la limite ℓ de f en a aboutit pour tout $\varepsilon>0$ à $|f(a)-\ell| \leq \varepsilon$, en prenant $x = a \in [a-\eta,\, a+\eta] \cap \mathcal{D}$; ainsi $f(a) = \ell$:

$$\big(\forall \varepsilon>0 \quad |f(a)-\ell| \leq \varepsilon\big) \Longrightarrow f(a)=\ell$$

• Une fonction f est dite continue en $a \in \mathcal{D}$ si et seulement si f a une limite en a, cette limite est obligatoirement $f(a)$:

$$f \text{ est continue en } a \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
$$\Longleftrightarrow \big(\forall \varepsilon>0 \quad \exists \eta>0 \quad \forall x \in [a-\eta,\, a+\eta] \quad |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$$

• Par définition l'application f est continue si et seulement si elle est continue en chaque point $a \in \mathcal{D}$.
L'ensemble des applications continues de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$.

∗ Ces fonctions dont l'application constante de valeur $u \in \mathbb{R}$ définies sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}^*$ sont continues :

$$x \mapsto u \qquad \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x \qquad |\bullet| : x \mapsto |x|$$
$$x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \sqrt{\bullet} : x \mapsto \sqrt{x}$$

∗ Sauf exception comme la partie entière $\lfloor \bullet \rfloor$, les fonctions usuelles sont continues, par exemple $\sqrt[3]{\bullet}$, sin, cos, tan, exp, ln, etc.

Exemples de preuve de continuité

► Continuité de l'application constante.

▷ Il suffit de vérifier, avec ces notations habituelles, que pour tout $\varepsilon>0$, la valeur $\eta = 1 > 0$ convient pour justifier la continuité en a de l'application constante f : $|f(a)-f(x)| = |u-u| = 0 \leq \varepsilon$.

► Continuité de l'application identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

▷ Une fois fixé $\varepsilon>0$, le choix de $\eta = \varepsilon > 0$ permet de prouver directement la continuité de l'application identité, et par l'inégalité triangulaire celle de la valeur absolue :

$$x \in [a-\varepsilon,\, a+\varepsilon] \Longrightarrow |x-a| \leq \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \big||x|-|a|\big| \leq |x-a| \leq \varepsilon$$

► Continuité de l'application inverse $x \mapsto 1/x$.

▷ Une preuve de la continuité de l'application inverse en $a \in \mathbb{R}^*$ cherche une condition suffisante sur $|a-x|$ de façon à obtenir la majoration suivante :

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a-x|}{|ax|} \leq \varepsilon \qquad \text{dès que } |a-x| \leq \frac{a^2\varepsilon}{2} \text{ et } |x| \geq \frac{|a|}{2} > 0$$

La condition $|x| \geq |a|/2$ est vérifiée dès que $|a-x| \leq |a|/2$.
Le graphe de la fonction inverse justifie que $\eta>0$ doit être plus petit lorsque a est proche de 0.
La rédaction de cette démonstration considère $\underline{\varepsilon > 0 \text{ quelconque}}$ et vérifie que la valeur $\underline{\eta = \min(a^2\varepsilon/2, |a|/2) > 0 \text{ convient}}$.
Si $\underline{x \in [a-\eta,\, a+\eta]}$ ces majorations terminent la démonstration :

$$|x-a| \leq \frac{a^2\varepsilon}{2} \qquad |a-x| \leq \frac{|a|}{2} \qquad |x| \geq \frac{|a|}{2} \qquad |ax| \geq \frac{a^2}{2} > 0$$
$$\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|a-x|}{|ax|} \leq \frac{a^2\varepsilon}{2} \times \frac{2}{a^2} = \varepsilon \qquad \underline{\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right| \leq \varepsilon}$$

Les expressions soulignées suivent la progression de la démonstration :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\eta > 0 \quad \forall\,x\in[a-\eta,\, a+\eta]\cap\mathbb{R}^* \quad \left|\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right| \le \varepsilon$$

$*$ Une preuve de la continuité de l'application carrée peut se faire de la même façon. Une autre preuve exploitant la continuité du produit de deux applications continues est donnée dans la partie suivante du cours.

▶ Continuité de l'application racine $x \mapsto \sqrt{x}$.

▷ Le graphe de l'application racine suggère que $\eta = \varepsilon^2 > 0$ convient pour prouver la continuité de $\sqrt{\bullet}$ en $a\in\mathbb{R}_+$.
La démonstration de la continuité de $\sqrt{\bullet}$ en $a\in\mathbb{R}_+$ repose sur l'inégalité $\sqrt{v}-\sqrt{u} \le \sqrt{v-u}$ dès que $0 \le u \le v$ justifiée dans le premier chapitre.
Les deux cas possibles sont $\sqrt{a} \ge \varepsilon$ et $\sqrt{a} \le \varepsilon$.
Les encadrements suivants découlent de l'inégalité précédente avec $v = a$ et $u = \varepsilon^2$, et de la croissance de l'application racine ; ils sont valables pour tout $\varepsilon > 0$ et justifient la continuité de l'application $\sqrt{\bullet}$ en a :
Si $\sqrt{a} \ge \varepsilon$ et $x\in\left[a-\varepsilon^2,\, a+\varepsilon^2\right]$:

$$\sqrt{a}-\varepsilon \le \sqrt{a-\varepsilon^2} \le \sqrt{x} \le \sqrt{a+\varepsilon^2} \le \sqrt{a+2\varepsilon\sqrt{a}+\varepsilon^2} = \sqrt{a}+\varepsilon$$

Si $\sqrt{a} \le \varepsilon$ et $x\in\left[0,\, a+\varepsilon^2\right]$:

$$\sqrt{a}-\varepsilon \le 0 \le \sqrt{x} \le \sqrt{a+\varepsilon^2} \le \sqrt{a+2\varepsilon\sqrt{a}+\varepsilon^2} = \sqrt{a}+\varepsilon$$

La rédaction de la preuve de la continuité de $\sqrt{\bullet}$ en $a\in\mathbb{R}_+$ est plutôt la suivante. Elle opère par déductions successives, sous forme de *synthèse*, et ne traduit pas nécessairement le cheminement du raisonnement qui commence généralement, durant la phase *d'analyse*, par rechercher des conditions suffisantes permettant d'obtenir le résultat final.
$\underline{\text{Soit } \varepsilon > 0}$, cherchons $\eta > 0$ vérifiant la proposition suivante :

$$\forall\,x\in[a-\eta,\, a+\eta]\cap\mathbb{R}_+ \quad \sqrt{a}-\varepsilon \le \sqrt{x} \le \sqrt{a}+\varepsilon$$

Pour cela vérifions que $\underline{\eta = \varepsilon^2 > 0 \text{ convient}}$.
Si $\underline{x\in\left[a-\varepsilon^2,\, a+\varepsilon^2\right]\cap\mathbb{R}_+}$ les encadrements ci-dessus distinguent deux cas et prouvent $\underline{\sqrt{x}\in[a-\varepsilon,\, a+\varepsilon]}$.

Les expressions soulignées balisent la progression de la démonstration.

Limites à gauche et à droite

• Les limites à gauche ℓ_g et à droite ℓ_d de f en a sont définies selon les mêmes principes ; si elles existent alors elles sont uniques :

$$\begin{array}{llll} \ell_g = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) : & & \forall\,h > 0 & [a-h,\, a[\,\cap\,\mathcal{D} \ne \emptyset \\ \mathsf{ET} & \forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\eta > 0 & \forall\,x\in[a-\eta,\, a[\,\cap\,\mathcal{D} & \left|f(x)-\ell_g\right| \le \varepsilon \\ \ell_d = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) : & & \forall\,h > 0 &]a,\, a+h]\cap\mathcal{D} \ne \emptyset \\ \mathsf{ET} & \forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\eta > 0 & \forall\,x\in]a,\, a+\eta]\cap\mathcal{D} & \left|f(x)-\ell_d\right| \le \varepsilon \end{array}$$

★ Ces définitions de limites à gauche et à droite ne considèrent pas la valeur de f en a au contraire de la notion précédente de limite générale.

○ Une fonction f est continue à gauche en $a\in\mathcal{D}$ si et seulement si sa limite à gauche en a existe et vaut $f(a)$, il en est de même pour sa limite à droite en a.

□ Les limites à gauche et à droite vérifient cette équivalence :

$$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \text{ [existe et] } = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \text{ [existe et] } = \ell \;[= f(a) \text{ si } a\in\mathcal{D}]$$

$$\iff \lim_{x\to a} f(x) \text{ [existe et] } = \ell$$

La fonction f est continue en $a\in\mathcal{D}$ si et seulement si elle continue à gauche et à droite en a.

◊ La démonstration de la première implication suppose que la limite de f en a existe et vaut ℓ, et démontre que les limites à gauche et à droite de f en a sont ℓ :

$$\begin{array}{llll} \forall\,\varepsilon > 0 & \exists\,\eta > 0 & \forall\,x\in[a-\eta,\, a+\eta]\cap\mathcal{D} & \left|f(x)-\ell\right| < \varepsilon \\ \forall\,\varepsilon_g > 0 & \exists\,\eta_g > 0 & \forall\,x\in[a-\eta,\, a[\,\cap\,\mathcal{D} & \left|f(x)-\ell\right| < \varepsilon_g \\ \forall\,\varepsilon_d > 0 & \exists\,\eta_d > 0 & \forall\,x\in]a,\, a+\eta]\cap\mathcal{D} & \left|f(x)-\ell\right| < \varepsilon_d \end{array}$$

Cette démonstration suppose la première ligne et montre les deux autres.
Soit $\varepsilon_g > 0$; l'hypothèse de la limite en a appliquée avec $\varepsilon = \varepsilon_g > 0$ justifie l'existence de $\eta > 0$. La valeur $\eta_g = \eta > 0$ convient à cause

de l'inclusion $[a-\eta,\, a[\, \subset [a-\eta,\, a+\eta]$:

$$\begin{aligned} &\forall\, x\in [a-\eta,\, a+\eta]\cap \mathcal{D} \quad |f(x)-\ell| < \varepsilon \\ \Longrightarrow\, &\forall\, x\in [a-\eta,\, a[\,\cap \mathcal{D} \quad |f(x)-\ell| < \varepsilon = \varepsilon_g \end{aligned}$$

La méthode est la même pour démontrer la limite à droite.

◊ Réciproquement supposons que f admette une même limite à gauche et à droite de valeur ℓ, et montrons que ℓ est la limite de f en a. Si $a\in\mathcal{D}$ cette hypothèse ajoute que $\ell = f(a)$.
Soit $\varepsilon > 0$; l'existence des limites à gauche et à droite justifie l'existence de $\eta_g > 0$ et de $\eta_d > 0$ pour la valeur $\varepsilon_g = \varepsilon_d = \varepsilon > 0$. Notons $\eta = \min(\eta_g, \eta_d) > 0$. L'inclusion suivante justifie la limite de f en a :

$$\begin{aligned} &[a-\eta,\, a+\eta] = [a-\eta,\, a[\, \cup \{a\} \cup\,]a,\, a+\eta] \\ &\subset [a-\eta_g,\, a[\, \cup \{a\} \cup\,]a,\, a+\eta_d] \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall\, x\in [a-\eta,\, a[\,\cap \mathcal{D} & |f(x)-\ell| < \varepsilon_g = \varepsilon & \\ \forall\, x\in\,]a,\, a+\eta]\cap \mathcal{D} & |f(x)-\ell| < \varepsilon_d = \varepsilon & \\ f(a) = \ell & |f(a)-\ell| = 0 < \varepsilon & \text{si } a\in\mathcal{D} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \forall\, x\in [a-\eta,\, a+\eta]\cap \mathcal{D} \quad |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

►► Cet exemple récapitule différents cas de limite et de continuité de la fonction paire $f(x) = -\lfloor -|x| \rfloor$.

▷▷ Cette application comporte différentes sortes de limites :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 1 = f(1) \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 2$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = 2 \qquad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = 1 = f(-1)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) \neq f(0) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 1/2\\ x<1/2}} f(x) = 1 = \lim_{\substack{x\to 1/2\\ x>1/2}} f(x) = \lim_{x\to 1/2} f(x) = f(1/2)$$

Les limites $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ne sont pas définies.
L'application f est continue à droite en -1 sans être continue à gauche en -1 ; elle est continue à gauche en 1 sans l'être à droite ; enfin f est continue en $1/2$ car continue à gauche et à droite.
Les limites à gauche et à droite de f en 0 sont bien définies et sont égales, et f n'a pas de limite en 0 et n'est pas continue en 0.

Limites infinies

• Ces conditions énoncent que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty : \quad \forall\, B\in\mathbb{R} \quad \exists\, N\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N \quad u_n \geq B$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty : \quad \forall\, B\in\mathbb{R} \quad \exists\, N\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N \quad u_n \leq B$$

►► Les limites suivantes sont infinies et dépendent de a :

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} an = \left\{ \begin{array}{rl} -\infty & \text{si } a < 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ +\infty & \text{si } a > 0 \end{array} \right.$$

▷▷ Avec les notations précédentes, les valeurs de N associées à $B \geq 0$ peuvent être dans les trois premiers cas $N = \lfloor B \rfloor + 1$, $N = \lfloor \sqrt{B} \rfloor + 1$ et $N = \lfloor B^2 \rfloor + 1$, car les applications identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, carrée et racine $\sqrt{\bullet}$ sont croissantes. Soit $n \geq N$:

$$\begin{aligned} u_n &= n \geq N = \lfloor B \rfloor + 1 \geq B \\ u_n &= n^2 \geq N^2 = (\lfloor \sqrt{B} \rfloor + 1)^2 \geq (\sqrt{B})^2 = B \\ u_n &= \sqrt{n} \geq \sqrt{N} = \sqrt{\lfloor B^2 \rfloor + 1} \geq \sqrt{B^2} = B \end{aligned}$$

Si $B \leq 0$ toute valeur de N convient, par exemple $N = 0$, car les trois suites sont à valeurs positives.

▷▷ La démonstration ci-dessous se limite au cas $a > 0$.
Soit $B\in\mathbb{R}$, la valeur de $N\in\mathbb{N}$ fait intervenir B/a à cause du produit par a ; par exemple $\underline{N = \lfloor B/a \rfloor + 1 \in\mathbb{N}}$ convient.
En effet $N > B/a$ et $\underline{\text{tout } n \geq N}$ vérifie $\underline{an \geq aN > aB/a = B}$.

▪ Ces propositions décrivent de façon similaire que l'application f diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ au point a supposé adhérent à $\mathcal{D}$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty : \forall\, B\in\mathbb{R}\ \exists\, \eta > 0\ \forall\, x\in [a-\eta,\, a+\eta]\cap\mathcal{D} \quad f(x) \geq B$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty : \forall\, B\in\mathbb{R}\ \exists\, \eta > 0\ \forall\, x\in [a-\eta,\, a+\eta]\cap\mathcal{D} \quad f(x) \leq B$$

★ Cette valeur $\pm\infty$ est appelée limite au sens large, mais le verbe « converger » et ses dérivés sont réservés au limites finies.

★ Le théorème d'unicité de la limite s'étend aux limites infinies : une suite ou une fonction en a ne peut ni avoir à la fois une limite finie et une limite infinie, ni avoir $-\infty$ et $+\infty$ comme limite.

★ Lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty$, le graphe de la fonction f possède un asymptote verticale d'équation $x = a$.

Limites à l'infini

• Ces propositions caractérisent les limites en $+\infty$ d'une fonction f :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell\in\mathbb{R}$:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,A\in\mathbb{R} \quad \forall\,x\in[A,\, +\infty[\,\cap\,\mathcal{D} \ |f(x)-\ell| \le \varepsilon$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

$$\forall\,B\in\mathbb{R} \quad \exists\,A\in\mathbb{R} \quad \forall\,x\in[A,\, +\infty[\,\cap\,\mathcal{D} \qquad f(x) \ge B$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$:

$$\forall\,B\in\mathbb{R} \quad \exists\,A\in\mathbb{R} \quad \forall\,x\in[A,\, +\infty[\,\cap\,\mathcal{D} \qquad f(x) \le B$$

∗ La définition de ces limites impose que la fonction f soit définie au voisinage de $+\infty$:

$$\forall\,A\in\mathbb{R} \quad [A,\, +\infty[\,\cap\,\mathcal{D} \neq \emptyset$$

○ La définition des limites en $-\infty$ est comparable, par exemple :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,A\in\mathbb{R} \quad \forall\,x\in]-\infty,\, A]\cap\mathcal{D} \quad |f(x)-\ell| \le \varepsilon$$

∗ Le graphe d'une fonction f possède un asymptote horizontale d'équation $y = \ell\in\mathbb{R}$ dès que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

Suites et fonctions à valeurs complexes

• Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes converge si et seulement si ses parties réelles et imaginaires ont une limite finie :

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{re} u_n = a \in \mathbb{R} \ \textsf{ET} \ \lim_{n\to+\infty} \operatorname{im} u_n = b \in \mathbb{R}$$
$$\iff \lim_{n\to+\infty} u_n = a + \mathrm{i}\,b$$

• La limite et la continuité d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont définies de la même manière par l'étude des parties réelles et imaginaires.

∗ L'application $t \mapsto e^{\mathrm{i}\,t} = \cos t + \mathrm{i}\,\sin t$ est donc continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

∗ La notion de limite infinie ne s'étend pas aux suites et aux fonctions à valeurs complexes.

Notion de voisinages

∗ Ce tableau récapitule les quinze définitions des limites d'une fonction f en a ; l'ordre des quantificateurs est toujours $\forall\cdots\ \exists\cdots\ \forall\,x\cdots$:

$$\forall \left|\begin{array}{l}\varepsilon > 0\\ B\in\mathbb{R}\end{array}\right. \quad \exists \left|\begin{array}{l}\eta > 0\\ A\in\mathbb{R}\end{array}\right. \quad \forall\,x\in\mathcal{D}\,\cap \left|\begin{array}{c}[a-\eta,\, a+\eta]\\ ]a,\, a+\eta]\\ [a-\eta,\, a[\\ ]-\infty,\, A]\\ [A,\, +\infty[\end{array}\right. \qquad f(x)\in \left|\begin{array}{c}[\ell-\varepsilon,\, \ell+\varepsilon]\\ ]-\infty,\, B]\\ [B,\, +\infty[\end{array}\right.$$

∗ Les inégalités $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ doivent être strictes ; les intervalles $[a-\eta,\, a+\eta]$, $]-\infty,\, A]$, $[A,\, +\infty[$, $[\ell-\varepsilon,\, \ell+\varepsilon]$, $]-\infty,\, B]$ et $[B,\, +\infty[$ peuvent être ouverts ou fermés. Le cours d'analyse approfondi ces notions et ces propriétés.

○ Les intervalles $[a-h,\, a+h]$ et $]a-h,\, a+h[$ avec $h > 0$ sont appelés des voisinages de a ; pour tout $A \in \mathbb{R}$ les intervalles $[A,\, +\infty[$ et $]A,\, +\infty[$ sont des voisinages de $+\infty$, et $]-\infty,\, A]$ et $]-\infty,\, A[$, des voisinages de $-\infty$.

∗ Les intervalles $]a-h,\, a[$ et $]a,\, a+h[$ intervenant dans les limites à gauche et à droite ne sont pas des voisinages de a.

∗ La définition des intervalles énonce ces équivalences :

$$|y-\ell| \le \varepsilon \iff y\in[\ell-\varepsilon,\, \ell+\varepsilon] \iff \ell-\varepsilon \le y \le \ell+\varepsilon$$

★ Les notations $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ne sont licites qu'après avoir justifié l'existence de ces limites, et aucun théorème dont les hypothèses portent sur des limites ne peut s'appliquer avant d'avoir vérifié leur existence.

Opérations et composition des limites

Extension des opérations à l'infini

$*$ Les symbole $+\infty$ représente approximativement un nombre positif « plus grand que tous les autres », et $-\infty$ correspond à $(-1)\times(+\infty)$.

• L'ensemble $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ est noté $\overline{\mathbb{R}}$.

• Les tableaux suivants précisent les règles de calcul s'appliquant à $\overline{\mathbb{R}}$; certaines formes sont indéterminées et notées ? :

$a+b$	$a=-\infty$	$a\in\mathbb{R}$	$a=+\infty$
$b=-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$b\in\mathbb{R}$	$-\infty$	$a+b\in\mathbb{R}$	$+\infty$
$b=+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$a\times b$	$a=-\infty$	$a\in\mathbb{R}_-^*$	$a=0$	$a\in\mathbb{R}_+^*$	$a=+\infty$
$b=-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$b\in\mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$ab\in\mathbb{R}_+^*$	0	$ab\in\mathbb{R}_-^*$	$-\infty$
$b=0$	?	0	0	0	?
$b\in\mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	$ab\in\mathbb{R}_-^*$	0	$ab\in\mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$b=+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

a	$-a$	e^a
$a=-\infty$	$+\infty$	0
$a\in\mathbb{R}$	$-a\in\mathbb{R}$	$e^a\in\mathbb{R}_+^*$
$a=+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

a	$1/a$
$a=-\infty$	0
$a\in\mathbb{R}_-^*$	$1/a\in\mathbb{R}_-^*$
$a=0$	?
$a\in\mathbb{R}_+^*$	$1/a\in\mathbb{R}_+^*$
$a=+\infty$	0

En outre le logarithme s'étend par $\ln(+\infty)=+\infty$.

$*$ Les formes $+\infty-\infty$, $0\times\infty$ et $1/0$ sont indéterminées.
Par conséquent les formes suivantes sont indéterminées :

$$\frac{0}{0}=0\times(1/0) \qquad \frac{\infty}{\infty}=\infty\times 0 \qquad 1^{\infty}=e^{\infty\times\ln 1}=e^{\infty\times 0}$$
$$\infty^0=e^{\ln\infty\times 0}=e^{\infty\times 0} \qquad 0^0=e^{\ln 0\times 0}=e^{-\infty\times 0}$$

★ L'addition et la multiplication ne sont pas des lois de composition interne sur $\overline{\mathbb{R}}$ car les formes indéterminées ne sont pas définies.

$*$ Certaines règles de calcul comme $a-a=0$ ou $1/(1/a)=a$ valable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$ ne s'étendent pas à $\overline{\mathbb{R}}$, avec $a=+\infty$ par exemple.

Opérations sur les limites

Dans ce paragraphe les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$, et les fonctions f et g définies sur un même ensemble de définition $\mathcal{D}$ ont des limites au sens large en $a\in\overline{\mathbb{R}}$

■ Les suites ci-dessous ont une limite dès que ces opérations n'aboutissent pas à une forme indéterminée :

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n|=\Big|\lim_{n\to+\infty}u_n\Big| \qquad \lim_{n\to+\infty}u_n+v_n=\lim_{n\to+\infty}u_n+\lim_{n\to+\infty}v_n$$
$$\lim_{n\to+\infty}\lambda u_n=\lambda\lim_{n\to+\infty}u_n \qquad \lim_{n\to+\infty}u_nv_n=\lim_{n\to+\infty}u_n\times\lim_{n\to+\infty}v_n$$

■ Les limites de fonctions sont régies par les mêmes propriétés :

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\Big|\lim_{x\to a}f(x)\Big| \qquad \lim_{x\to a}f(x)+g(x)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$
$$\lim_{x\to a}\lambda f(x)=\lambda\lim_{x\to a}f(x) \qquad \lim_{x\to a}f(x)\,g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)$$

■ Si les applications f et g sont continues en a alors les applications $f+g$ et fg sont continues en a.

■ La somme et le produit d'applications continues sont continus.

$*$ La continuité de l'application $x\mapsto x^2$ se déduit par produit de celle de l'application identité $x\mapsto x$.

★ Les opérations sur des suites dont les limites correspondent à une forme indéterminées peuvent aboutir à des résutats variés. L'exemple suivant l'illustre pour le produit $0\times\infty$:

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n} \quad v_n=n \quad u_nv_n=(-1)^n \quad \text{produit sans limite}$$
$$u_n=\frac{(-1)^n}{n^2} \quad v_n=n \quad u_nv_n=\frac{(-1)^n}{n} \quad \lim_{n\to+\infty}u_nv_n=0$$
$$u_n=\frac{a}{n} \quad v_n=n \quad u_nv_n=a \quad \lim_{n\to+\infty}u_nv_n=a\in\mathbb{R}$$
$$u_n=\frac{1}{n} \quad v_n=n^2 \quad u_nv_n=n \quad \lim_{n\to+\infty}u_nv_n=+\infty$$
$$u_n=\frac{-1}{n} \quad v_n=n^2 \quad u_nv_n=-n \quad \lim_{n\to+\infty}u_nv_n=-\infty$$

$*$ Les limites de sommes de trois, quatre ou p fixé suites ou applica-

tions sont les sommes des limites, de même pour les produits.
Ce résultat peut être démontré par récurrence.

★ Le nombre de termes doit être fixé et ne pas être variable. La limite des n termes de cette somme est 0, et la somme tend vers 1 :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=\frac{n}{n}=1 \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1\neq 0$$

Exemples de preuves des opérations sur les limites

Ce paragraphe n'énumère pas les dizaines de cas intervenant dans les théorèmes précédents : limites finies ou infinie en $a\in\mathbb{R}$ ou à l'infini. Ces quelques démonstrations ont toute la même structure et peuvent être combinées entre elles pour traiter des autres cas.

▶ Limite d'une somme de deux suites.

▷ La vérification complète de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ comporte sept cas, les deux autres correspondant aux formes indéterminées.
La preuve ci-dessous se limite au cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell_1\in\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell_2\in\mathbb{R}$. Elle repose sur le fait que si u_n est proche de ℓ_1 à ε près, et si v_n est proche de ℓ_2 à ε près, alors la somme u_n+v_n est proche de $\ell_1+\ell_2$ à 2ε.
Le but de la démonstration est d'avoir u_n+v_n proche de $\ell_1+\ell_2$ à ε, il suffit donc d'appliquer les hypothèses avec $\varepsilon/2>0$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient ces hypothèses :

$$\forall\varepsilon_1>0\ \ \exists N_1\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq N_1\quad \ell_1-\varepsilon_1\leq u_n\leq\ell_1+\varepsilon_1$$
$$\forall\varepsilon_2>0\ \ \exists N_2\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq N_2\quad \ell_2-\varepsilon_2\leq v_n\leq\ell_2+\varepsilon_2$$

<u>Soit $\varepsilon>0$</u>, les hypothèses appliquées avec $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2>0$ justifient <u>l'existence</u> de N_1, de N_2 et <u>de $N=\max(N_1,N_2)\in\mathbb{N}$</u>.
<u>Tout $n\geq N$</u> vérifie $n\geq N_1$ et $n\geq N_2$, et donc la somme de ces inégalités aboutit à la preuve de la convergence de la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\ell_1-\varepsilon/2\leq u_n\leq\ell_1+\varepsilon/2 \qquad \ell_2-\varepsilon/2\leq v_n\leq\ell_2+\varepsilon/2$$
$$\underline{\ell_1+\ell_2-\varepsilon\leq u_n+v_n\leq\ell_1+\ell_2+\varepsilon}$$

D'où la conclusion :
$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq N\quad \ell_1+\ell_2-\varepsilon\leq u_n+v_n\leq\ell_1+\ell_2+\varepsilon$$

▶ Somme d'une limite finie et d'une limite infinie de fonctions.

▷ La justification que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ entraîne que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+g(x)=+\infty$ peut se faire de la manière suivante.
Les deux premières lignes correspondent aux hypothèses, et la dernière à la conclusion recherchée :

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\widetilde{A}\in\mathbb{R}\ \ \forall x\in[\widetilde{A},+\infty[\cap\mathcal{D}\quad \ell-\varepsilon\leq f(x)\leq\ell+\varepsilon$$
$$\forall\widehat{B}\in\mathbb{R}\ \ \exists\widehat{A}\in\mathbb{R}\ \ \forall x\in[\widehat{A},+\infty[\cap\mathcal{D}\quad \widehat{B}\leq g(x)$$
$$\forall B\in\mathbb{R}\ \ \exists A\in\mathbb{R}\ \ \forall u\in[A,+\infty[\cap\mathcal{D}\quad B\leq f(u)+g(u)$$

Il suffit que $\ell-1\leq f(u)$ et $B-\ell+1\leq g(u)$ pour vérifier l'inégalité $B\leq f(u)+g(u)$. La suite de la démonstration exploite cette condition.
<u>Soit $B\in\mathbb{R}$</u>. D'une part, pour $\varepsilon=1$, l'hypothèse sur f affirme qu'il existe $\widetilde{B}$ tel que tout $x\in[\widetilde{A},+\infty[\cap\mathcal{D}$ vérifie $\ell-1\leq f(x)$; d'autre part pour $\widehat{B}=B-\ell+1$ il existe $\widehat{A}\in\mathbb{R}$ vérifiant $\widehat{B}\leq g(x)$ si $x\in[\widehat{A},+\infty[\cap\mathcal{D}$.
La somme de ces deux inégalités aboutit à la conclusion recherchée avec <u>$A=\max(\widetilde{A},\widehat{A})$</u>.

$$\forall u\in[A,+\infty[\cap\mathcal{D}\qquad \ell-1\leq f(u)\qquad \text{car } u\geq A\geq\widetilde{A}$$
$$\forall u\in[A,+\infty[\cap\mathcal{D}\qquad \widehat{B}=B-\ell+1\leq g(u)\qquad \text{car } u\geq A\geq\widehat{A}$$
$$\underline{\forall u\in[A,+\infty[\cap\mathcal{D}}\qquad \underline{B\leq f(u)+g(u)}$$

▶ Produit d'une limite infinie par une constante strictement positive.

▷ La preuve ci-dessous justifie $\lim\limits_{x\to a}\lambda f(x)=+\infty$ si $\lambda>0$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.
L'application f vérifie cette hypothèse :

$$\forall\widetilde{B}\in\mathbb{R}\ \ \exists\widetilde{\eta}>0\ \ \forall x\in[a-\widetilde{\eta},a+\widetilde{\eta}]\cap\mathcal{D}\quad f(x)\geq\widetilde{B}$$

<u>Soit $B\in\mathbb{R}$</u>, l'hypothèse précédente sur f appliquée avec $\widetilde{B}=B/\lambda$ justifie <u>l'existence de $\eta=\widetilde{\eta}>0$</u>, et ces inégalités aboutissent à la limite de $\lambda f(x)$:

$$\underline{\forall x\in[a-\eta,a+\eta]\cap\mathcal{D}}\quad f(x)\geq\frac{B}{\lambda}\quad \textsf{ET}\quad \underline{\lambda f(x)\geq B}$$

D'où la conclusion suivante :

$$\forall B\in\mathbb{R}\quad \exists\,\eta>0\quad \forall x\in[a-\eta,\,a+\eta]\cap\mathcal{D}\quad \lambda f(x)\geq B$$

► Convergence d'un produit de suites convergentes.

▷ La démonstration de la convergence d'un produit de suites convergentes commence par ces hypothèses :

$$\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon_1>0\quad \exists\,N_1\in\mathbb{N}\quad \forall\,N\geq N_1\quad |u_n-\ell_1|\leq\varepsilon_1\\ &\forall\,\varepsilon_2>0\quad \exists\,N_2\in\mathbb{N}\quad \forall\,N\geq N_2\quad |v_n-\ell_2|\leq\varepsilon_2\end{aligned}$$

Cette factorisation partielle suggère des conditions suffisantes pour encadrer la différence $u_nv_n-\ell_1\ell_2$:

$$\begin{aligned}|u_nv_n-\ell_1\ell_2|&\leq|u_nv_n-\ell_1v_n+\ell_1v_n-\ell_1\ell_2|\\ &=|u_n-\ell_1|\,|v_n|+|\ell_1|\,|v_n-\ell_2|\leq\varepsilon\end{aligned}$$

dès que ces trois conditions sont vérifiées :

$$|u_n-\ell_1|\leq\frac{\varepsilon}{2(|\ell_2|+1)}\qquad |v_n-\ell_2|\leq\frac{\varepsilon}{2(|\ell_1|+1)}\qquad |v_n|\leq|\ell_2|+1$$

Soit $\varepsilon>0$. La condition $|v_n-\ell_2|\leq1$ est suffisante pour obtenir la troisième condition ; les hypothèses sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appliquées à $\varepsilon_2=\min(1,\varepsilon/(2|\ell_1|+2))>0$ et $\varepsilon_1=\varepsilon/(2|\ell_2|+2)>0$ justifient l'existence de N_1 et N_2.
La valeur $N=\max(N_1,N_2)\in\mathbb{N}$ convient.
Tout $n\geq N$ vérifie ces majorations, ce qui termine la preuve de la convergence du produit :

$$\begin{aligned}|u_nv_n-\ell_1\ell_2|&\leq|u_n-\ell_1|\,|v_n|+|\ell_1|\,|v_n-\ell_2|\\ &\leq\frac{\varepsilon}{2(|\ell_2|+1)}\,(|\ell_2|+1)+|\ell_1|\,\frac{\varepsilon}{2(|\ell_1|+1)}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon\end{aligned}$$

► Limite d'un produit d'applications avec une limite infinie

▷ Cette preuve démontre $\lim\limits_{x\to a}f(x)\,g(x)=+\infty$ à partir des hypothèses $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell>0$ et $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty>0$.
Les deux premières lignes correspondent aux hypothèses, et la dernière à la conclusion à démontrer :

$$\begin{aligned}&\forall\,\widetilde{\varepsilon}>0\quad \exists\,\widetilde{\eta}>0\quad \forall\,x\in[a-\widetilde{\eta},\,a+\widetilde{\eta}]\cap\mathcal{D}\quad \ell-\widetilde{\varepsilon}\leq f(x)\leq\ell+\widetilde{\varepsilon}\\ &\forall\,\widehat{B}\in\mathbb{R}\quad \exists\,\widehat{\eta}>0\quad \forall\,x\in[a-\widehat{\eta},\,a+\widehat{\eta}]\cap\mathcal{D}\quad \widehat{B}\leq g(x)\\ &\forall\,B\in\mathbb{R}\quad \exists\,\eta>0\quad \forall\,u\in[a-\eta,\,a+\eta]\cap\mathcal{D}\quad B\leq f(x)\,g(x)\end{aligned}$$

Il suffit de $0<\ell/2\leq f(x)$ et de $2B/\ell\leq g(x)$ pour obtenir la minoration $B\leq f(x)\,g(x)$, quand $B\geq0$.

Soit $B\in\mathbb{R}$. Appliquer l'hypothèse sur la limite de f avec $\varepsilon=\ell/2>0$ aboutit à $0<\ell/2\leq f(x)$. La suite de la démonstration exploite l'hypothèse sur g avec $\widehat{B}=\max(2B/\ell,0)$; ces manipulations d'inégalités imposent en outre la condition $\widehat{B}\geq0$ rendue par $\widehat{B}=\max(0,\cdots)$:
La valeur de $\eta=\min(\widetilde{\eta},\widehat{\eta})>0$ convient :

$$\begin{aligned}&\forall\,u\in[a-\eta,\,a+\eta]\cap\mathcal{D}\quad 0\leq\frac{\ell}{2}\leq f(u)\\ &\qquad\text{car } \eta\leq\widetilde{\eta}\text{ et } [a-\eta,\,a+\eta]\subset[a-\widetilde{\eta},\,a+\widetilde{\eta}]\\ &\forall\,u\in[a-\eta,\,a+\eta]\cap\mathcal{D}\quad 0\leq\widehat{B}\leq g(u)\\ &\qquad\text{car } \eta\leq\widehat{\eta}\text{ et } [a-\eta,\,a+\eta]\subset[a-\widehat{\eta},\,a+\widehat{\eta}]\\ &\forall\,u\in[a-\eta,\,a+\eta]\cap\mathcal{D}\quad B\leq\widehat{B}\ell/2\leq f(u)\,g(u)\qquad B\leq f(u)\,g(u)\\ &\qquad \ell>0\text{ et } 2B/\ell\leq\widehat{B}\text{ entraînent } B\leq\widehat{B}\ell/2\end{aligned}$$

Suites et fonctions bornées

■ Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente est bornée :

$$\exists\,M\in\mathbb{R}\quad \forall\,n\in\mathbb{N}\quad |u_n|\leq M$$

◊ La convergence vers ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ écrite avec $\varepsilon=1$ énonce qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ vérifiant cette propriété :

$$\forall\,n\geq N\quad |u_n-\ell|\leq1\quad\text{donc}\quad \ell-1\leq u_n\leq\ell+1$$

L'ensemble $\left\{u_n\;/\;n<N\right\}$ contient au maximum N réels, est donc fini avec un plus petit élément m et un plus grand élément M ; cet encadrement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ termine la preuve :

$$\min(\ell-1,m)\leq\left\{\begin{array}{ll}m\leq u_n\leq M & \text{si } n<N\\ \ell-1\leq u_n\leq\ell+1 & \text{si } n\geq N\end{array}\right\}\leq\max(\ell+1,M)$$

$$\forall\,n\in\mathbb{N}\quad \min(\ell-1,m)\leq u_n\leq\max(\ell+1,M)$$

► Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ est minorée et n'est pas majorée :

$$\exists\,m\in\mathbb{R}\quad \forall\,n\in\mathbb{N}\quad m\leq u_n\qquad \forall\,M\in\mathbb{R}\quad \exists\,n\in\mathbb{N}\quad M<u_n$$

▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie cette proposition de limite infinie :

$$\forall\,B\in\mathbb{R}\quad \exists\,N\in\mathbb{N}\quad \forall\,n\geq N\quad B\leq u_n$$

Cette propriété appliquée avec $B=0$ prouve l'existence de N. L'ensemble $\left\{u_n\;/\;n<N\right\}$ est fini et a donc un plus petit élément m. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\min(0,m)$:

$$u_n \geq \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } n \geq N \\ m & \text{si } n < N \end{array} \right\} \geq \min(0, m)$$

⊳ La même propriété de limite infinie démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas majorée} \Longleftrightarrow \mathsf{NON}\ \big(\exists\, M\in\mathbb{R} \quad \forall\, p\in\mathbb{N} \quad u_p \leq M\big)$$
$$\Longleftrightarrow \forall\, M\in\mathbb{R} \quad \exists\, P\in\mathbb{N} \quad u_n > M$$

Soit $M \in \mathbb{R}$, la définition de la limite infinie avec $B = M + 1 > M$ justifie l'existence de N :

$$\forall\, B\in\mathbb{R} \quad \exists\, N\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N \quad B \leq u_n$$

Ainsi $u_N \geq B = M + 1$ et $P = N\in\mathbb{N}$ convient.

□ Toute fonction f qui converge vers $\ell\in\mathbb{R}$ en a est bornée sur un voisinage de a :

$$\exists\, M\in\mathbb{R} \quad \exists\, h > 0 \quad \forall\, x\in[a-h,\, a+h] \cap \mathcal{D} \quad |f(x)| \leq M \text{ quand } a\in\mathbb{R}$$
$$\exists\, M\in\mathbb{R} \quad \exists\, A > 0 \quad \forall\, x\in[A,\, +\infty[\, \cap\, \mathcal{D} \quad |f(x)| \leq M \qquad \text{si } a = +\infty$$

◊ La méthode est la même que pour les suites. La limite $\ell\in\mathbb{R}$ de la fonction en a énonce cette propriété qui appliqué à $\varepsilon = 1 > 0$ justifie que la fonction f est bornée sur $]a-h,\, a+h[$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \forall\, x\in\,]a-\eta,\, a+\eta[\, \cap\, \mathcal{D} \quad |f(x) - \ell| < 1$$
$$\exists\, h > 0 \quad \forall\, x\in\,]a-h,\, a+h[\, \cap\, \mathcal{D} \quad \ell - 1 < f(x) < \ell + 1$$

∗ Ainsi la fonction continue $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est bornée au voisinage de tout point $a\in\mathbb{R}$, et cette fonction n'est pas bornée :

$$\forall\, x\in[a-1,\, a+1] \quad |x| \leq |a| + 1 \qquad \forall\, M\in\mathbb{R} \quad \exists\, x\in\mathbb{R} \quad |x| > M$$

■ Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

◊ En effet, si $|u_n|$ est majoré par $M > 0$, alors la convergence de $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 se déduit de celle de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 :

$$\forall\, \widetilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists\, \widetilde{N}\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq \widetilde{N} \quad |v_n| \leq \widetilde{\varepsilon}$$

Soit $\varepsilon > 0$; en appliquant cette hypothèse avec $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon/M > 0$, tout $n \geq \widetilde{N}$ vérifie $|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leq \varepsilon/M \times M = \varepsilon$.
En conclusion la suite produit tend vers 0.

∗ À partir du même principe, si sur un voisinage de a la fonction f est bornée et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x) = 0$.

Suites extraites et compositions

Suites extraites

□ Une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifie $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

◊ La preuve par récurrence repose sur le fait que $\mathbb{N}$ est discret.
D'une part $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, donc $\varphi(0) \geq 0$, d'autre part la propriété $\varphi(n) \geq n$ se propage à l'ordre $n+1$ car $\mathbb{N}$ est discret :

$$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n \Longrightarrow \varphi(n+1) \geq n+1$$

L'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de ce paragraphe est strictement croissante.

• La suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite extraite par φ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

∗ Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, etc. sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car ces applications sont strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

$$n \mapsto 2n \qquad n \mapsto 2n+1 \qquad n \mapsto 3n \qquad n \mapsto n^2 \qquad n \mapsto 2^n$$

■ Toute suite extraite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possédant une limite admet cette même limite :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\in\overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$$

◊ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie ces hypothèses si $\ell\in\mathbb{R}$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Comme $\varphi(n) \geq n$ la suite extraite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie cette proposition :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N \quad \big|u_{\varphi(n)} - \ell\big| \leq \varepsilon$$

La méthode est la même pour les limites infinies.

★ La contraposée de ce théorème permet de prouver qu'une suite n'a pas de limite en cherchant deux suites extraites ayant des limites différentes.

∗ La suite bornée $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite car les suites extraites des termes pairs et des termes impairs sont constantes de valeurs différentes :

$$u_n = (-1)^n \qquad u_{2n} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$$
$$u_{2n+1} = -1 \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1 \neq 1$$

■ Réciproquement si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent la même limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ alors ℓ est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

◊ Les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient ces hypothèses :

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\widetilde{N}\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq\widetilde{N} \qquad |u_{2n}-\ell|\leq\varepsilon \qquad \text{si } \ell\in\mathbb{R}$$
$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\widehat{N}\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq\widehat{N} \qquad |u_{2n+1}-\ell|\leq\varepsilon$$

Soit $p\geq N=\max(2\widetilde{N}, 2\widehat{N}+1)$; si $p=2m$ est pair alors $m\geq\widetilde{N}$, et si $p=2m+1$ est impair, alors $m\geq\widehat{N}$. Dans les deux cas $|u_p-\ell|\leq\varepsilon$.

∗ La suite $(u_{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'application $\varphi(n)=n+p$ définie sur $\mathbb{N}$. Au contraire la suite $(u_{n-p})_{n\geq p}$ définie à partir du rang $n=p$ n'est pas une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

★ Pour tout entier $p\in\mathbb{N}$ fixé, l'existence de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne que les suites décalées $(u_{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$ — qui est une suite extraite — et $(u_{n-p})_{n\in\mathbb{N}}$ — définie pour $n\geq p$ — ont la même limite :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+p} = \lim_{n\to+\infty} u_{n-p}$$

◊ Les démonstrations consistent à remplacer N par $N\pm p$ dans la définition des limites.

▶▸ La convergence des suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers a, b et c entraîne celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $a=b=c$.

▷▹ Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ alors convergent vers a et b alors la suite extraite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois la suite extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ par l'application $n\mapsto 3n$ de limite a, et la suite extraite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ par l'application $n\mapsto 2n$ de limite c.
Par unicité de la limite la suite extraite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $a=c$.
De même $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois la suite extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ par l'application $n\mapsto 3n+1$ de limite b car $u_{6n+3}=u_{2(3n+1)+1}$ et la suite extraite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ par l'application $n\mapsto 2n+1$ de limite c.

L'unicité de la limite prouve $b=c$.
Les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $a=c=b$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite $a=b=c$.

Image d'une suite par une application

Ce paragraphe suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, et que la limite de la fonction f en a est bien définies dans $\overline{\mathbb{R}}$; il fait aussi l'hypothèse que la suite image $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définies.

■ Ce théorème de composition des limites est valable aussi bien si a et b sont des nombres réels que s'ils sont de valeur infinie :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \text{ ET } \lim_{x\to a} f(x) = b \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b$$

◊ Ce théorème regroupe $3^2=9$ cas selon que a et b sont finis ou non. Cette démonstration présente uniquement le cas des limites finies qui corrrespondent à ces hypothèses sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de l'application f :

$$\forall\widetilde{\varepsilon}>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq N \quad |u_n-a|\leq\widetilde{\varepsilon}$$
$$\forall\widehat{\varepsilon}>0 \quad \exists\widehat{\eta}>0 \quad \forall x\in[a-\widehat{\eta},\, a+\widehat{\eta}] \quad |f(x)-b|\leq\widehat{\varepsilon}$$

<u>Soit $\varepsilon>0$</u> ; cette démonstration recherche une condition pour avoir $|f(u_n)-b|\leq\varepsilon$, ceci amène à appliquer l'hypothèse sur la limite de f avec $\widehat{\varepsilon}=\varepsilon>0$ et affirmer l'existence de $\widehat{\eta}>0$. Dès que $|u_n-a|\leq\widehat{\eta}$ la condition $|f(u_n)-b|\leq\varepsilon$ est vérifiée.
L'hypothèse sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appliquée avec $\widetilde{\varepsilon}=\widehat{\eta}>0$ permet ensuite de <u>trouver $N\in\mathbb{N}$</u> tel que $|u_n-a|\leq\widehat{\eta}$ dès que $n\geq N$.
Cette valeur de N convient pour montrer la limite de l'image de la suite :

$$\underline{n\geq N} \Longrightarrow u_n\in[a-\widetilde{\varepsilon},\, a+\widetilde{\varepsilon}] = [a-\widehat{\eta},\, a+\widehat{\eta}]$$
$$\Longrightarrow \underline{f(u_n)}\in[b-\widehat{\varepsilon},\, b+\widehat{\varepsilon}] = \underline{[b-\varepsilon,\, b+\varepsilon]}$$

En conclusion cette preuve démontrer la convergence de la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq N \quad |f(u_n)-b|<\varepsilon$$

★ Ce théorème est souvent utilisé pour démontrer qu'une application n'est pas continue en a ; pour cela il suffit de trouver une suite de limite a dont l'image n'a pas pour limite $f(a)$. Cette méthode exploitant les propriétés des suites convergentes porte le nom de critère séquentiel.

$*$ Ainsi la fonction partie entière $\lfloor \bullet \rfloor$ n'est pas continue en $p \in \mathbb{Z}$; en effet la limite de la partie entière d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement la partie entière de sa limite.

$$\begin{array}{ll} u_n = p - \dfrac{1}{n} & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = p \\ \lfloor u_n \rfloor = p - 1 & \lim\limits_{n\to+\infty} \lfloor u_n \rfloor = p - 1 \neq \lfloor p \rfloor \end{array}$$

Limite d'une composition d'application

De façon comparable ce paragraphe suppose que les limites des fonctions f et g sont bien définies dans $\overline{\mathbb{R}}$; il fait aussi l'hypothèse que l'application composée $g \circ f$ est bien définies.

■ La propriété de composition des limites est valables aussi bien si a, b et c sont des nombres réels que s'ils sont de valeur infinie :

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ ET } \lim_{y\to b} g(y) = c \Longrightarrow \lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = c$$

◊ Ce théorème regroupe $3^3 = 27$ cas possibles selon que a, b et c sont finis ou non. La méthode de démontration est la même que dans le cas précédent ; la démonstration suivante se limite au cas $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec ces hypothèses :

$$\forall \widetilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists \widetilde{\eta} > 0 \quad \forall x \in [a - \widetilde{\eta},\, a + \widetilde{\eta}] \quad |f(x) - b| \leq \widetilde{\varepsilon}$$
$$\forall \widehat{\varepsilon} > 0 \quad \exists \widehat{\eta} > 0 \quad \forall y \in [b - \widehat{\eta},\, b + \widehat{\eta}] \quad |g(y) - c| \leq \widehat{\varepsilon}$$

<u>Soit $\varepsilon > 0$</u> ; cette démonstration recherche, comme la précédente, une condition pour avoir $|(g \circ f)(u) - c| = |g(f(u)) - c| \leq \varepsilon$; pour cela elle applique d'abord l'hypothèse sur la limite de g avec $\widehat{\varepsilon} = \varepsilon > 0$ pour affirmer l'existence de $\widehat{\eta} > 0$. Dès que $|f(u) - b| \leq \widehat{\eta}$ la condition $|(g \circ f)(u) - c| \leq \varepsilon$ est vérifiée.
L'hypothèse sur f appliquée avec $\widetilde{\varepsilon} = \widehat{\eta} > 0$ prouve ensuite l'existence de $\widetilde{\eta} > 0$ vérifiant $|f(u) - b| \leq \widehat{\eta}$ dès que $|u - a| \leq \widetilde{\eta}$.
Ces implications avec $\underline{\eta = \widetilde{\eta} > 0}$ démontrent la limite de l'application composée :

$$\begin{aligned} &\underline{u \in [a - \eta,\, a + \eta]} = [a - \widetilde{\eta},\, a + \widetilde{\eta}] \\ \Longrightarrow\ & f(u) \in [b - \widetilde{\varepsilon},\, b + \widetilde{\varepsilon}] = [b - \widehat{\eta},\, b + \widehat{\eta}] \\ \Longrightarrow\ & g(f(u)) = \underline{(g\circ f)(u) \in [c - \widehat{\varepsilon},\, c + \widehat{\varepsilon}]} = \underline{[c - \varepsilon,\, c + \varepsilon]} \end{aligned}$$

■ Si l'application f est continue en a et si l'application g est continue en $f(a)$, alors la composée $g \circ f$ continue en a :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue en } a \\ g \text{ est continue en } f(a) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ est continue en } a$$

■ La composée de deux fonctions continues est continue.

★ Les théorèmes de composition des limites opèrent sur les limites finies ou infinies et ne s'adaptent pas aux limites à gauche et à droite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \lfloor x \rfloor = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \lfloor x \rfloor = -1$$

$$u_n = \left\lfloor \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor = \frac{(-1)^n - 1}{2} = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite.

Inégalités et limites

Limites et valeurs absolues

□ La limite finie ℓ d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou d'une fonction f en a vérifie ces équivalences :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} (f(x) - \ell) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x) - \ell| = 0$$

◊ La raison en est les équivalences suivantes :

$$u_n \in [\ell - \varepsilon,\, \ell + \varepsilon] \Longleftrightarrow \big||u_n - \ell|\big| = |u_n - \ell| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow u_n - \ell \in [-\varepsilon,\, +\varepsilon]$$

$*$ En particulier une suite ou une fonction dont la valeur absolue converge vers 0 converge elle aussi vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \qquad \lim_{x\to a} |f(x)| = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0$$

$*$ Cette implication est fausse pour une limite non nulle : $|(-1)^n| = 1$ converge vers 1 et la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

$*$ L'implication réciproque provient de la continuité de l'application valeur absolue :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$$

Théorèmes de comparaison

■ Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possèdent des limites qui vérifient $\lim_{n\to+\infty} u_n < \lim_{n\to+\infty} v_n$ alors à partir d'un certain rang $u_n < v_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n < \lim_{n\to+\infty} v_n \implies \big(\exists\, N\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N \quad u_n < v_n\big)$$

$\lozenge$ La démonstration repose, comme la preuve de l'unicité des limites, sur les définitions des limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appliquées à $\varepsilon = (\ell_2 - \ell_1)/3 > 0$, $\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} u_n \in\mathbb{R}$ et $\ell_2 = \lim_{n\to+\infty} v_n \in\mathbb{R}$:

$$\exists\, N_1\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N_1 \quad \ell_1 - \varepsilon \leq u_n \leq \ell_1 + \varepsilon$$
$$\exists\, N_2\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N_2 \quad \ell_2 - \varepsilon \leq v_n \leq \ell_2 + \varepsilon$$
$$N = \max(N_1, N_2)\in\mathbb{N} \qquad N \geq N_1 \qquad N \geq N_2$$
$$\forall\, n \geq N \quad u_n \leq \ell_1 + \varepsilon = \frac{2\ell_1 + \ell_2}{3} < \frac{\ell_1 + 2\ell_2}{3} = \ell_2 - \varepsilon \leq v_n \leq \ell_2 + \varepsilon$$

■ Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont une limite et vérifient à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$.

$\lozenge$ Dans le cas où les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont une limite, la preuve de cette propriété repose sur la contraposée de la précédente :

$$\big(\exists\, P\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq P \quad u_n \leq v_n\big)$$
$$\Longrightarrow \big(\forall\, N\in\mathbb{N} \quad \exists\, n \geq N \quad u_n \leq v_n\big) \qquad \text{par exemple } n = \max(N, P)$$
$$\Longrightarrow \textsf{NON}\ \big(\exists\, N\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N \quad u_n > v_n\big) \qquad \text{par négation}$$
$$\Longrightarrow \textsf{NON}\ (\lim_{n\to+\infty} u_n > \lim_{n\to+\infty} v_n) \qquad \text{le théorème précédent}$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

⊠ Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie à partir d'un certain rang $|u_n| \leq v_n$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \ \textsf{ET}\ \big(\exists\, P\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq P \quad |u_n| \leq v_n\big) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

$\lozenge$ La convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ justifie pour tout $\varepsilon > 0$ l'existence de

Q :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, Q\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq Q \quad |v_n| \leq \varepsilon$$

Ces majorations prouvent la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$N = \max(P, Q) \qquad N \geq P \qquad N \geq Q \qquad \forall\, n \geq N \quad |u_n| \leq |v_n| \leq \varepsilon$

■ Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont une même limite et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même limite : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n$.

$\lozenge$ L'étude des suites $(w_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ démontre ce théorème à partir du lemme précédent :

$$0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n \ \textsf{ET}\ \lim_{n\to+\infty} w_n - u_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} u_n + 0 = \lim_{n\to+\infty} u_n \qquad \text{par somme de limites}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} v_n \quad \text{par somme de suites convergentes } u_n + (v_n - u_n) = v_n$$

$*$ Ces théorèmes s'adaptent aux limites infinies même si les démonstrations effectuées ne considèrent que le cas des limites finies.

$*$ Les fonctions au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$ donné possèdent des théorèmes d'encadrement similaires.

★ Le passage à la limite conserve les inégalités larges et pas nécessairement les inégalités strictes, ainsi pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \frac{n-1}{n} \leq 1 \qquad 0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1 \leq 1$$
$$-\frac{1}{n} < \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$$

$*$ Ces théorèmes s'appliquent en particulier aux suites constantes dont la limite est la valeur de cette constante.

$*$ Les propriétés suivantes découlent des théorèmes précédents :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \text{ existe } \mathsf{ET} \left(\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n\in[a,\, b]\right) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n\in[a,\, b]$$
$$\lim u_n = \ell > 0 \Longrightarrow \left(\exists\, N\in\mathbb{N} \quad \forall\, n\geq N \quad u_n > 0\right)$$
$$\left(\forall\, n\in\mathbb{N} \quad u_n \geq n\right) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
$$\left(\forall\, x\in[0,\, 1] \quad |f(x)| \leq x\right) \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$$

Application aux limites d'inverses

$*$ Les théorèmes sur les limites d'inverses contiennent le théorème de composition des limites pour l'application inverse $x \mapsto 1/x$ qui est continue et énoncent des conditions sur certaines limites de la forme $1/0$.

$\square$ Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite non nulle, la suite $(1/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie à partir d'un certain rang et converge ; de même si la fonction f a une limite non nulle, la fonction $1/f$ est définie sur un voisinage de a et a une limite :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n} \qquad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)}$$

$\lozenge$ Le théorème de comparaison stricte des limites justifie qu'à partir d'un certain rang la suite est strictement positive et donc que la suite inverse est bien définie.
La limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou de la fonction f est non nulle, donc par le théorème de compostion la limite de $(1/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou de $1/f(x)$ est $1/\ell$ car l'application inverse a une limite en tout point de $\mathbb{R}^* \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$\blacksquare$ Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs strictement positives et toute fonction f strictement positive sur un voisinage de a vérifient ces équivalences :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

$\lozenge$ La limite à droite en 0 de l'application inverse est $+\infty$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1/x = +\infty \qquad \forall\, B\in\mathbb{R} \quad \exists\, \eta > 0 \quad \forall\, x\in]0,\, \eta[\quad \frac{1}{x} > B$$
Si $B \leq 0$ alors $\eta = 1$ est une possibilité, et sinon $\eta = 1/B > 0$ convient :
$$0 < x < \eta = \frac{1}{B} \Longrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\frac{1}{B}} = B > 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$\lozenge$ La démonstration du sens direct repose sur cette limite combinée avec les hypothèses sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$\left(\forall\, n\in\mathbb{N} \quad u_n > 0\right) \qquad \left(\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N \quad 0 < u_n < \varepsilon\right)$$
Soit $B\in\mathbb{R}$. Si $B \leq 0$ la suite $(1/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $B \leq 0 < 1/u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Supposons $B > 0$; appliquer l'hypothèse sur la limite de la suite avec $\varepsilon = 1/B > 0$ justifie l'existence de $N\in\mathbb{N}$.
Cette valeur de N permet de montrer que la suite inverse diverge vers $+\infty$; soit $n \geq N$:
$$\frac{1}{u_n} > \frac{1}{\varepsilon} = B \qquad 0 < u_n < \varepsilon = \frac{1}{B}$$

$\lozenge$ L'implication réciproque correspond exactement au théorème de composition pour l'application inverse de limite 0 en $+\infty$.

$*$ La forme $1/0$ est indéterminée, cependant la propriété précédente permet de lever cette indétermination lorsque la fonction ou la suite sont à valeurs strictement positives :
$$\lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \frac{1}{x} \text{ n'a pas de limite en } 0$$
$$\lim_{x\to 0} |x| = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

Autres exemples de limites

$\blacktriangleright$ La limite de la suite puissance $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend de $a\in\mathbb{R}$:
$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{pour } a\in]-1,\, 1[\\ 1 & \text{pour } a = 1 \\ +\infty & \text{pour } a > 1 \\ \text{n'est pas définie pour } a \leq -1 \end{cases}$$

$*$ Le calcul de cette limite repose sur l'inégalité $(1+h)^n \geq nh$ issue de la formule du binôme lorsque $a = 1 + h > 1$, et sur les propriétés relatives à l'inverse des limites.

⊳ Si $a > 1$ les théorèmes de comparaison justifient cette limite infinie :

$$h = a - 1 > 0 \qquad a = 1 + h$$

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \geq nh \qquad \text{obtenu pour } k = 1$$

les autres termes de la somme sont positifs

$$\lim_{n\to+\infty} nh = +\infty \qquad \text{car } h > 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$$

⊳ Ces implications prouvent que la limite est nulle si $a \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned}
0 < a < 1 &\Longrightarrow 1/a > 1 \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} (1/a)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n} = +\infty \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a^n = 0 \\
a = 0 &\Longrightarrow a^n = 0 \qquad \text{si } n \neq 0 \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a^n = 0 \\
-1 < a < 0 &\Longrightarrow 0 < |a| < 1 \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |a|^n = \lim_{n\to+\infty} |a^n| = 0 \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a^n = 0
\end{aligned}$$

De même la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et de limite 1 si $a = 1$.

⊳ Si $a = -1$ les deux suites extraites $\left(a^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(a^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes de valeurs 1 et -1 donc la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. De même si $a < -1$ les deux suites extraites $\left(a^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(a^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ont respectivement pour limites $+\infty$ et $-\infty$ et donc la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

★ La limite d'une série géométrique en découle lorsque $|q| < 1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$$

▶ La limite de la forme *a priori* indéterminée $(q^n/n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $+\infty$ si $q > 1$.

⊳ Cette minoration pour $n \geq 2$ prouve le résultat recherché :

$$q = 1 + h > 1 \qquad h = q - 1 > 0$$

$$\frac{q^n}{n} = \frac{(1+h)^n}{n} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k}{n} \geq \binom{n}{2} \frac{h^2}{n} = \frac{n(n-1)h^2}{2n} = \frac{(n-1)h^2}{2}$$

de limite infinie quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers $+\infty$

▶ La limite nulle de la suite $(n^p q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $|q| < 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$ se déduit de la limite précédente.

⊳ Si $q = 0$ alors la suite est constante et converge vers 0, sinon la valeur absolue de l'inverse de la suite précédente tend vers $+\infty$:

$$\left|\frac{1}{n^p q^n}\right| = \left(\frac{\left(\sqrt[p]{\frac{1}{|q|}}\right)^n}{n}\right)^p \qquad \frac{1}{|q|} > 1 \qquad \sqrt[p]{\frac{1}{|q|}} > 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[p]{\frac{1}{|q|}}\right)^n}{n} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\left(\sqrt[p]{\frac{1}{|q|}}\right)^n}{n}\right)^p = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p |q|^n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^p |q|^n = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} n^p q^n = 0$$

Continuité, prolongements et restrictions

Prolongement par continuité en un point

■ Si une fonction f non définie en a admet une limite finie en a, alors l'application prolongée par continuité $\widetilde{f}$ en a avec $\widetilde{f}(a) = \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ est continue en a :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \widetilde{f} : \mathcal{D} \cup \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in \mathcal{D} \\ \lim_{x\to a} f(x) & \text{pour } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

★ Un abus de notation habituel consiste à confondre l'application f et l'application prolongée $\widetilde{f}$ et à noter $f(a)$ la valeur de la limite en a.

◊ La définition de la limite et celle du prolongement par continuité sont équivalentes lorsque $\widetilde{f}(a) = \ell$:

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\eta>0\quad \forall\,x\in[a-\eta,\,a+\eta]\cap\mathcal{D}\qquad\qquad |f(x)-\ell|\leq\varepsilon$$
$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\eta>0\quad \forall\,x\in[a-\eta,\,a+\eta]\cap(\mathcal{D}\cup\{a\})\quad \left|\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(a)\right|\leq\varepsilon$$
En effet la seule différence entre ces deux propositions correspond au cas $x=a$ pour lequel $\left|\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(a)\right|=\left|\widetilde{f}(x)-\ell\right|=0\leq\varepsilon$.

∗ La notion de prolongement par continuité de f en $a\notin\mathcal{D}$ est donc une autre manière de parler de limite finie ℓ en a.

∗ Si une fonction f non définie en a est continue sur son ensemble de définition $\mathcal{D}$ et converge vers une limite finie en a, alors l'application prolongée par continuité en a par $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ est continue sur $\mathcal{D}\cup\{a\}$.

► Prolongement par continuité en 0 de $f: x\mapsto x\,\sin(1/x)$:

▷ Cette application f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Le théorème d'encadrement des limites justifie le prolongement par continuité en 0 de f par $f(0)=0$. L'application prolongée à $\mathbb{R}$ est continue :

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x\,\sin(1/x) \end{aligned}\qquad |f(x)|\leq|x|\qquad \lim_{x\to0} f(x)=0$$

∗ Pour montrer qu'une application ne se prolonge pas par continuité en a, il suffit de trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes vers a dont les images ont deux limites différentes. Une suite dont l'image a une limite infinie convient également.

► Le prolongement par continuité en 0 de $g: x\mapsto\sin(1/x)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est impossible.

▷ Un critère séquentiel justifie l'absence de limite en 0 :

$$u_n=\frac{1}{2n\pi}\qquad \lim_{n\to+\infty}u_n=0\quad g(u_n)=0\quad \lim_{n\to+\infty}g(u_n)=0$$
$$v_n=\frac{1}{\pi/2+2n\pi}\qquad \lim_{n\to+\infty}v_n=0\quad g(v_n)=1\quad \lim_{n\to+\infty}g(v_n)=1\neq0$$

∗ Lorsque $a\notin\mathcal{D}$ les notions de limites finies en a et de prolongement par continuité au point a sont équivalentes.
Dans le cas où $a\in\mathcal{D}$ l'existence d'une limite finie en a et la continuité en a sont synonymes.
Les définitions de continuité et de prolongement par continuité sont différentes : dans un cas $a\in\mathcal{D}$ et dans l'autre $a\notin\mathcal{D}$.

∗ La fonction $f: x\mapsto 1/x^2$ définie sur $\mathbb{R}^*$ illustre ces notions :

$$\begin{aligned} & f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^* \text{ et continue en tout point de } \mathbb{R}^* \\ \Longleftrightarrow\ & f \text{ est continue} \\ & \lim_{x\to0} f(x)=+\infty \\ \Longrightarrow\ & f \text{ n'admet pas de limite finie en } 0 \\ \Longleftrightarrow\ & f \text{ n'a pas de prolongement par continuité en } 0. \end{aligned}$$

L'étude de la continuité de f en 0 n'a aucun sens car $0\notin\mathbb{R}^*$.

Restrictions et prolongements d'applications continues

⊠ Si I est un intervalle ouvert et si $a\in I$ alors il existe $h>0$ vérifiant $]a-h,\,a+h[\;\subset I$.

◊ Dans le cas où $I=]u,\,v[$ alors $h=\min(a-u,v-a)>0$ convient :

$$h=\min(a-u,v-a)>0\qquad h\leq a-u\qquad h\leq v-a$$
$$u=a-(a-u)\leq a-h<a<a+h\leq a+(v-a)=v$$
$$]a-h,\,a+h[\;\subset\;]u,\,v[$$

Lorsque $I=]u,\,+\infty[$ ou $I=]-\infty,\,u[$ alors $h=|a-u|>0$ convient, et si $I=\mathbb{R}$ alors $]u-1,\,u+1[\;\subset\mathbb{R}$ avec $h=1$.

□ Toute restriction d'une application continue [respectivement en a] est continue [respectivement en a].

□ Réciproquement si la restriction à un intervalle ouvert I d'une fonction est continue en $a\in I$ alors l'application f est continue en a. Si la restriction à un intervalle ouvert I d'une fonction est continue alors l'application f est continue en tout point de I.

◊ Si l'application f définie sur $\mathcal{D}$ est continue en a alors sa restriction à $I\subset\mathcal{D}$ est continue car la première de ces propositions implique la seconde à cause de l'inclusion $I\subset\mathcal{D}$:

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\eta>0\quad \forall\,x\in[a-\eta,\,a+\eta]\cap\mathcal{D}\quad |f(x)-f(a)|\leq\varepsilon$$
$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\eta>0\quad \forall\,x\in[a-\eta,\,a+\eta]\cap I\quad |f(x)-f(a)|\leq\varepsilon$$

◊ Réciproquement si $I\subset\mathcal{D}$ est un intervalle ouvert contenant a, la première proposition entraîne la seconde dès que la dernière inclusion est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \widetilde{\eta} > 0 \quad \forall x \in [a-\widetilde{\eta},\, a+\widetilde{\eta}] \cap I \quad |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in [a-\eta,\, a+\eta] \cap \mathcal{D} \quad |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$$
$$[a-\eta,\, a+\eta] \cap \mathcal{D} \subset [a-\widetilde{\eta},\, a+\widetilde{\eta}] \cap I$$

Pour cela la valeur $\eta = \min(\widetilde{\eta}, h) > 0$ convient où une valeur possible de $h > 0$ est donnée par le lemme précédent :

$$0 < \eta = \min(\widetilde{\eta}, h) \leq \widetilde{\eta} \qquad [a-\eta,\, a+\eta] \subset [a-\widetilde{\eta},\, a+\widetilde{\eta}]$$
$$\eta \leq h \qquad [a-\eta,\, a+\eta] \subset [a-h,\, a+h] \subset I$$
$$[a-\eta,\, a+\eta] \cap \mathcal{D} \subset [a-\eta,\, a+\eta] \subset [a-\widetilde{\eta},\, a+\widetilde{\eta}] \cap I$$

$*$ L'hypothèse sur les intervalles ouverts est nécessaire : l'application partie entière $\lfloor \bullet \rfloor$ est constante sur $[0,\, 1[$, de valeur 1, la restriction $\lfloor varpoint \rfloor_{/[0,\,1[}$ est donc continue, par ailleurs l'application partie entière $\lfloor \bullet \rfloor$ n'est pas continue en 0, car elle n'est pas continue à gauche en 0.

$\square$ Si, en supposant $a < b < c$, la restriction de $f_{/[a,\,b]}$ est continue à gauche en b, et si la restriction de $f_{/[b,\,c]}$ est continue à droite en b, alors l'application f est continue en b.

$\square$ Si les restrictions de f à $]a,\, b]$ et à $[b,\, c[$ sont continues alors l'application f est continue en tout point de $]a,\, c[$.

$*$ Ces propriétés s'adaptent aux intervalles d'extrémités infinies $\pm\infty$.

$\diamond$ L'application f est donc continue à gauche et à droite en b, donc continue en b.

$\diamond$ Si en outre les restrictions à $]a,\, b]$ et $[b,\, c[$ de l'application f sont continue, alors les restrictions aux intervalles ouverts $]a,\, b[$ et $]b,\, c[$ sont continues, et l'application f est continue en tout point de $]a,\, c[$.

► L'application définie par $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)(\lfloor x \rfloor - x + 1)$ est continue.

▷ Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, la restriction à $]p,\, p+1[$ de l'application $\lfloor \bullet \rfloor$ est continue car constante sur cet intervalle ouvert, et donc la restriction à $]p,\, p+1[$ de l'application f est continue car construite à partir de sommes et produits d'applications continues sur $]p,\, p+1[$.
L'application f est donc continue en tout point de $]p,\, p+1[$ car cet intervalle est ouvert. La valeur de $p \in \mathbb{Z}$ étant quelconque l'application f est en fait continue en tout point d'un quelconque des intervalles de cette forme, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

L'application $\lfloor \bullet \rfloor$ est continue à droite de $p \in \mathbb{Z}$, l'application f est donc continue à droite de p. Cette limite à gauche en $p \in \mathbb{Z}$ justifie que f est continue à gauche en p, donc continue en p :

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x < p}} \lfloor x \rfloor = p - 1$$
$$\lim_{\substack{x \to p \\ x < p}} f(x) = (p - (p-1))(p - 1 - p + 1) = 0 = f(p)$$

L'application f est continue en $p \in \mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En conclusion l'application f est continue.