# Indications sur le contrôle du 10/05/2025

## 1 Dénombrement et probabilités

1. a) Comme il y a exactement 8 cœurs dans un paquet de 32 cartes.
   $\boxed{\text{Il n'y a qu'un tirage de 8 cœurs}}$.
   b) Un tel tirage contient outre les 4 as 4 cartes parmi les 28 restantes.
   $\boxed{\text{Il y a donc } \binom{28}{4} \text{ tirages contenant les 4 as.}}$
   c) Il y a $\binom{8}{5}$ façons de choisir les 5 cœurs et $\binom{8}{3}$ façons de choisir les 3 trèfles d'où $\boxed{\binom{8}{5} \times \binom{8}{3} \text{ tirages possibles.}}$
   d) Il y a deux ensembles disjoints de tel tirage.
   — ceux qui contiennent le roi de cœur.
   Il sont composés du roi de cœur, 4 autres cœurs et 2 autres rois ce qui fait 7 cartes que l'on complète par une carte prise parmi les $(32 - 8 - 3) = 21$ cartes restantes ce qui fait $\binom{7}{4} \times \binom{3}{2} \times 21$ possibilités.
   — Ceux qui ne contiennent pas le roi de cœur, ils sont composés de 5 autres cœurs et des 3 autres rois ce qui fait $\binom{7}{5}$ possibilités.
   $\boxed{\text{On a donc } 63\binom{7}{4} + \binom{7}{5} \text{ tirages composés de 5 cœurs et 3 rois.}}$
2. Je note $A_k$ l'évènement « Le jour A remporte la $k^{\text{e}}$ partie».
   a) La formule de Bayes donne $P_{A_3}(A_2) = \frac{P_{A_2}(A_3)\,P(A_2)}{P(A_3)}$.
   On a $P_{A_2}(A_3) = \frac{3}{5}$.
   Les probabilités totales donnent :
   $P(A_2) = P(A_1)\,P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1})\,P_{\overline{A_1}}(A_2) = 0 + 1\,(1 - 1/2) = \frac{1}{2}$.
   De même $P(A_3) = P(A_2)\,P_{A_2}(A_3) + P(\overline{A_2})\,P_{\overline{A_2}}(A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{20}$.
   $\boxed{\text{On a donc } P_{A_3}(A_2) = \frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}}{\frac{11}{20}} = \frac{6}{11}}$.
   b) En utilisant les probabilités totales, on obtient :
   $P(A_{n+1}) = P(A_n)\,P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})\,P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n)$
   $(p_n)$ vérifie donc la relation de récurrence $p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{1}{2}$ de plus $p_1 = 0$
   d'où $p_n = \frac{50}{9\times 10^n} - \frac{5}{9}$

## 2 Lancer truqué

1. Pour $k \geqslant 2$, $Z_k$ est une variable de Bernoulli.
   On a $(Z_k = 1) = (P_{k-1}, F_k) \cup (F_{k-1}, P_k)$ l'union étant disjointe et les lancers étant indépendants, on obtient :
   $P(Z_k = 1) = 2\,p\,q$.
   $\boxed{Z'_k \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètres } 2\,p\,q.}$
2. $X_n$ est le nombre de changements d'où $X_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} Z_k$.
   $\boxed{\text{On sait que } E(Z_k) = p\,q\text{, l'espérance étant linéaire, } E(X_n) = (n-1)p\,q.}$
3. $(Z_2 = 1, Z_3 = 1)$ correspond aux tirages $P, F, P$ ou $F, P, S$.
   Les lancers étant indépendants et les deux cas incompatibles,
   $P(Z_2 = 1, Z_3 = 1) = p^2\,q + p\,q^2 = p\,q\,(p + q) = p\,q$.

$P(Z_2=1)\times P(Z_3=1)=4\,p^2\,q^2$.
$p$ et $q$ étant non nuls, $4\,p^2\,q^2=p\,q$ équivaut à $4\,p\,q=1$
c'est à dire $4\,p\,(1-p)=0$ soit $p=\frac{1}{2}$.

$\boxed{(Z_2=1) \text{ et } Z_3=1) \text{ ne sont indépendants que dans le cas où } p=q=\frac{1}{2}.}$

4. On a déjà $P(X_3=2)=P(Z_2=1,Z_3=1)=p\,q$
de plus $P(X_3=0)=P(P_1\,P_2\,P_3 \text{ ou } F_1\,F_2\,F_3)=p^3+q^3=(p+q)(p^2-p\,q+q^2)=(p^2-p\,q+q^2)$
Il ne reste plus que
$P(X_3=1)=1-P(X_3=0)-P(X_3=2)=1-(p^2-p\,q+q^2)-p\,q=1-(p^2+2\,p\,q+q^2)+3\,p\,q-p\,q=2\,p\,q$.

$$\boxed{\text{On a donc}\quad \begin{array}{l} P(X_3=0)=p^3+q^3 \\ P(X_3=1)=2p\,q \\ P(X_3=2)=p\,q \end{array}\quad .}$$

$\boxed{\text{On retrouve bien } E(X_3)=E(Z_2)+E(Z_3)=4\,p\,q.}$

$E(X_3)^2=0\,P(X_3=0)+1^2\,P(X_3=1)+2^2\,P(X_3=2)=6\,p\,q$.

$\boxed{\text{d'où } V(X_3)=E(X_3^2)-E(X_3)^2=6\,p\,q-16\,p^2\,q^2=2\,p\,q\,(3-8\,p\,q)}$

5. l'évènement $(X_n=0)$ correspond à lancers constants, on a deux cas disjoints et des lancers indépendants d'où
$P(X_n=0)=p^n+q^n$.
6. Pour un seul changement, si on note $k$ le numéro du lancer précédent le changement et en distinguant suivant que l'on commence par un pile ou un face on a :
$p\neq q$ d'où $\frac{p}{q}\neq 1$.

$$\begin{aligned}
P(X_n=1) &= \sum_{k=1}^{n-1} p^k\,q^{n-k}+\sum_{k=1}^{n-1} q^k\,p^{n-k}=q^n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^k+p^n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k \\
&= q^n\frac{p}{q}\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}}{1-\frac{p}{q}}+p^n\frac{q}{p}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\frac{q}{p}} \\
&= q\,p\,\frac{q^{n-1}-p^{n-1}}{q-p}+p\,q\,\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q}=2\,q\,p\,\frac{q^{n-1}-p^{n-1}}{q-p}
\end{aligned}$$

7. Cela correspond à un changement à chaque lancer.
   — Si $n=2m$ cela correspond à $m$ «Piles» et $m$ «Faces». Il y a deux possibilités suivant le premier lancers et dans ce cas $P(X_n=n-1)=2\,p^m\,q^m=2\,p^{\frac{n}{n}}\,q^{\frac{n}{2}}$ .
   — Si $n=2m+1$ alors le premier résultat d'un lancer sera aussi le résultat du dernier lancer, en distinguant les deux cas.
   $P(X_n=n-1)=p^{m+1}\,q^m+p^m\,q^{m+1}=(p+q)\,p^m\,q^m=(p\,q)^{\frac{n-1}{2}}/$
8. On a un schéma de Bernoulli d'où une loi binomiale.

# 3 Variables aléatoires

1. a) Pour avoir une loi de probabilité, il faut que $P(X(\Omega))=1$ soit

$$1=\sum_{k=1}^{n}P(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{2^k}=\frac{a}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=a\frac{2^n-1}{2^n}\text{ (Somme géométrique).}$$

$\boxed{\text{D'où } a=\frac{2^n}{2^n-1}.}$

b) La formule du transfert donne

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{n}2^kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n}2^k\frac{a}{2^k}=n\,a.$$

$\boxed{\text{On a donc } E(Y)=n\,a=\frac{n\,2^n}{2^n-1}.}$

La formule du transfert donne

$$E(Y^2)=\sum_{k=1}^{n}2^{2\,k}P(X=k)=\sum_{k=1}^{n}a\,2^k=2a(2^n-1)=2^{n+1}$$

$\boxed{\text{On a donc } V(Y)=2^{n+1}-\frac{n^2\,4^n}{(2^n-1)^2}.}$

2. a) On remarque que $U\in\{0,1,2\}$ et $V\in\{-1,0,1\}$ et que $X=\frac{U+V}{2}$ et $Y=\frac{U-V}{2}$.
Les variables aléatoires $X$ et $Y$ étant indépendantes,
Si $(i,j)\in[\![0,2]\!]\times[\![-1,1]\!]$ alors
$P(U=i,V=j)=P(X=\frac{i+j}{2},Y=\frac{i-j}{2})=P(X=\frac{i+j}{2})\,P(Y=\frac{i-j}{2})$
En mettant un tableau en sommant par ligne et par colonne on obtient la loi conjointe et les lois marginales :

| $U\setminus V$ | $-1$ | $0$ | $1$ | |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $(1-p)^2$ | $0$ | $(1-p)^2$ |
| $1$ | $p(1-p)$ | $0$ | $p(1-p)$ | $2p(1-p)$ |
| $2$ | $0$ | $p^2$ | $0$ | $p^2$ |
| | $p(1-p)$ | $p^2+(1-p)^2$ | $p(1-p)$ | |

Nous savons que $cov(U,V)=E(U\,V)-E(U)\,E(V)$.
L'espérance étant linéaire, $E(U)=2p$ et $E(V)=0$.
De plus $U\,V=X^2-Y^2$ d'où $E(U\,V)=E(X^2)-E(Y^2)=p-p=0$

$\boxed{\text{On a donc } cov(U,V)=0.}$

b) On remarque que $P(U=0,V=-1)=0$ mais que $P(U=0)\,P(V=-1)=(1-p^2)\,p(1-p)\neq 0$.

$\boxed{\text{Les variables aléatoires ne sont donc pas indépendantes.}}$

3. a) En utilisant les probabilités composées, on a
Si $(\ell,k)\in[\![0,n]\!]^2$ alors

$$\boxed{P(X=\ell,Y=k)=P(Y=k)\,P_{Y=k}(X=\ell)=\begin{cases}0 \text{ si } \ell>k\\ \frac{p_k}{k+1} \text{ si } 0\leqslant\ell\leqslant k\end{cases}.}$$

On calcule la loi de $X$.

$$\boxed{P(X=\ell)=\sum_{k=0}^{n}P(X=\ell,Y=k)=\sum_{k=\ell}^{n}\frac{p_k}{k+1}.}$$

b)

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{\ell=0}^{n}\ell\,P(X=\ell)=\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=\ell}^{n}\ell\frac{p_k}{k+1}\sum_{0\leqslant\ell\leqslant k\leqslant n}\ell\frac{p_k}{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k}{k+1}\sum_{\ell=0}^{k}\ell\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k}{k+1}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}k\,p_=\frac{1}{2}E(Y)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a bien } E(X)=\frac{1}{2}E(Y).}$

De même,

$$\begin{aligned} E(X\,Y) &= \sum_{0\leqslant \ell,k\leqslant n} \ell\, k P(X=\ell, Y=k) = \sum_{0\leqslant \ell\leqslant k\leqslant n} \frac{\ell\, k\, p_k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k\, p_k}{k+1} \sum_{\ell=0}^{k} \ell \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} k^2\, p_k = \frac{1}{2} E(Y^2) \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{cov(X,Y) = E(X\,Y) - E(X)\,E(Y) = \frac{1}{2}(E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{2}V(Y).}$

# 4 Matrices stochastiques

1. On écrit le calcul de la $i^{\text{e}}$ coordonnée de $A\,U$.
2. — On écrit la formule du produit matriciel et on en déduit que le produit de deux matrices à coefficients positifs et une matrice à coefficients positifs.
   — Si $A$ et $B$ sont deux matrices à coefficients positif alors $(A\,B)\,U = A\,(B\,U) = A\,U = U$.

   On en déduit qu'un produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.
3. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $A\,X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$|y_i| \quad = \quad \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\, |x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \|X\|_\infty = \|X\|_\infty \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \|X\|_\infty$$

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A^p - I_n)$

   soit $s$ un indice tel que $x_s = \max(x_i)$

   Notons $a_{i,j}^{(p)}$ le coefficient de la $i^{\text{e}}$ ligne $j^{\text{e}}$ colonne de $A^p$ , en considérant la $s^{\text{e}}$ composante de $A^p X$ on trouve et en utilisant la propriété (2)

$$x_s = \sum_{j=1}^{n} x_s a_{s,j}^{(p)} = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{s,j}^{(p)} \text{ soit } \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{s,j}^{(p)}}_{>0} \underbrace{(x_s - x_j)}_{\geqslant 0} = 0.$$

   On a donc nécessairement $\forall j :\ x_j = x_s$ d'où $X \in \text{Vect}(U)$.

   D'où $\ker(A^p - I_n) \subset \text{Vect}(U)$.

   $A$ étant une matrice stochastique, $A^p$ l'est aussi d'où $A^p\,U = U$, on en déduit l'autre inclusion.
5. La question 2) nous permet de dire que $\forall l :\ A^\ell$ est stochastique,

   On en déduit d'abord que les coefficients de $R_k$ sont bien positifs

   puis que

$$R_k U = \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^{k} A^\ell\, U = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} U = U.$$

   $R_k$ est bien une matrice stochastique.