

Contrôle du 10/05/2025

Calculatrices interdites

1 Dénombrement et probabilités

1. Dans cette question, on acceptera que les résultats fassent intervenir des factorielles des coefficients binomiaux ou des puissances.

Les résultats numériques sans un minimum d'explication ne seront pas pris en compte.

On tire 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.

Combien de tirages différents peut-on obtenir :

- a) contenant tous les cœurs ?
- b) contenant les 4 as ?
- c) contenant 5 cœurs et 3 trèfles ?
- d) contenant 5 cœurs ni plus ni moins et 3 rois ni plus ni moins ?

2. Deux joueurs A et B jouent aux échecs.

Le joueur B gagne la première partie.

Ensuite, la probabilité que A remporte la partie sachant qu'il a remporté la précédente est de $\frac{3}{5}$;

alors que la probabilité que B remporte la partie sachant qu'il a remporté la précédente est de $\frac{1}{2}$.

On admet qu'un joueur est déclaré gagnant à chaque partie.

- a) Si la troisième partie est remportée par A, quelle est la probabilité qu'il ait également remporté la deuxième partie ?
- b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n la probabilité que A remporte la n -ième partie.

Déterminer le terme général de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2 Un lancer truqué

On effectue une suite de lancers indépendants d'une même pièce truquée donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $q = 1 - p$ (avec $p \in]0, 1[$). Pour tout entier $k \geq 2$, on dira que le lancer numéro k est un changement s'il donne un résultat différent du lancer numéro $k - 1$.

On note de plus X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements obtenus lors des n premiers lancers de la pièce.

Pour alléger la rédaction, on pourra noter P_k et F_k les événements

« La pièce est tombée sur Pile au lancer numéro k » et « La pièce est tombée sur Face au lancer numéro k ».

On autorisera les abréviations du type $P_1 F_2$ pour désigner l'événement $P_1 \cap F_2$.

En outre, pour $k \geq 2$, on note Z_k la variable aléatoire valant 1 si le lancer numéro k est un changement, 0 sinon.

1. Donner la loi de la variable Z_k pour $k \geq 2$.
2. Exprimer X_n en fonction des Z_k et en déduire l'espérance de X_n .
3. Les événements $(Z_2 = 1)$ et $(Z_3 = 1)$ sont-ils indépendants ?
Si nécessaire, vous préciserez dans quel cas les événements sont indépendants.
4. Donner la loi de X_3 et vérifier que $E(X_3) = 4pq$
et $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.
5. Dans le cas général, calculer $P(X_n = 0)$.
6. Montrer que si $p \neq q$ alors $P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q - p}(q^{n-1} - p^{n-1})$.
7. En distinguant deux cas suivant la parité de n , calculer $P(X_n = n - 1)$.
8. Dans le cas particulier où $p = q = \frac{1}{2}$, déterminer la loi suivie par la variable X_n .

On pourra admettre que dans ce cas les $(Z_k)_{2 \leq k \leq n}$ sont mutuellement indépendantes.

3 Variables aléatoires

Les trois exercices sont indépendants.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire définie sur $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et telle que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P([X = k]) = \frac{a}{2^k}$.
 - Déterminer a pour que l'on ait bien défini une loi de probabilité.
 - On pose $Y = 2^X$. Déterminer $E(Y)$ puis $V(Y)$.
- On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de loi $\mathcal{B}(p)$. Soient $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
 - Déterminer la loi du couple (U, V) ainsi que la covariance de U et V .
 - Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telles que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la loi conditionnelle de X sachant $[Y = k]$ soit la loi uniforme sur $\llbracket 0, k \rrbracket$.
On note, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $p_k = P(Y = k)$.
 - Déterminer la loi du couple (X, Y) , puis exprimer la loi de X avec le symbole $\sum$ et des p_k .
 - En déduire que $E(X) = \frac{1}{2}E(Y)$, puis que $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{2}V(Y)$.

4 Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geq 2$.

On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1.

Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} \geq 0 \quad (1)$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \quad (2)$$

- Vérifier que la condition (2) équivaut à la condition $AU = U$.
- En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques carrées d'ordre n est stable pour le produit matriciel.
Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$ où les x_i sont les coefficients de X .
- Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les questions suivantes, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell$$

- Montrer que $\ker(A^p - I_n) = \text{Vect}(U)$.
Indication : soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un indice tel que $x_s = \max_{1 \leq j \leq n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout j .
- Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.