Colle : Séries numériques

1 Remarque

Les étudiants doivent être capables d'utiliser les résultats sur le calcul asymptotique vus.
Les colleurs évalueront aussi le calcul de développement limité ou la recherche d'équivalent.

2 Questions de cours

1. Définition somme partielles / série convergente/ divergence grossière.
2. Énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral. *Le principe de la preuve est à connaître.* Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$
3. Preuve du critère de D'Alembert.
4. Preuve de si $u_n, v_n > 0$ et $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. $\left(u_n \sim v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \to 1\right)$
5. Savoir retrouver les comparaisons séries intégrales à partir d'un schéma.
6. Preuve de la convergence des séries de Riemann
7. Définition de la convergence absolue.
8. Preuve de la convergence absolue implique la convergence.
9. Séries alternées.

3 Exercices

3.1 Exercice à rédiger

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
2. Montrer que pour $n \to +\infty$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$
3. Étudier la convergence de $\sum \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ et de $\sum \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)$.

3.2 Exercices d'entraînement

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum \frac{2n+1}{\sqrt{1+n^2}}$.
2. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum \frac{2^n}{n!}$
3. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^2+2}$
4. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge mais n'est pas absolument convergente.
5. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$