Correction des exercices de révisions pour le concours blanc

Exercice 1 :

1. La fonction arctan étant impaire, f est paire (le numérateur est impair, le dénominateur aussi). La fonction f est par ailleurs définie sur $\mathbb{R}^*$.

2. Le cours nous dit que $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ au voisinage de 0, donc $f(x) = \frac{1}{x}(1 + x^2)\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right) = \frac{1}{x}\left(x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)\right) = 1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^3)$.

3. Puisque f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle y est dérivable après avoir été prolongée par continuité en posant $f(0) = 1$. De plus, $f'(0) = 0$, ce qui n'est évidemment guère surprenant pour une fonction paire. Enfin, $f(x) - 1 \sim \frac{2}{3}x^2 > 0$, donc la courbe sera au-dessus de sa tangente horizontale au voisinage de 0.

4. C'est hyper classique, on pose par exemple $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, g est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$, donc g est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Il suffit alors de calculer $g(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ pour conclure.

5. Commençons comme d'habitude par poser $X = \frac{1}{x}$ pour calculer $f(x) = \frac{(\frac{1}{X^2}+1)\arctan(\frac{1}{X})}{\frac{1}{X}} = \frac{(1+X^2)(\frac{\pi}{2} - \arctan(X))}{X}$, soit $Xf(x) = (1+X^2)\left(\frac{\pi}{2} - X + \frac{1}{3}X^3 + o(X^4)\right) = \frac{\pi}{2} - X + \frac{\pi}{2}X^2 - \frac{2}{3}X^3 + o(X^3)$, dont on déduit que $f(x) = \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{\pi}{2x} - \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. On observe

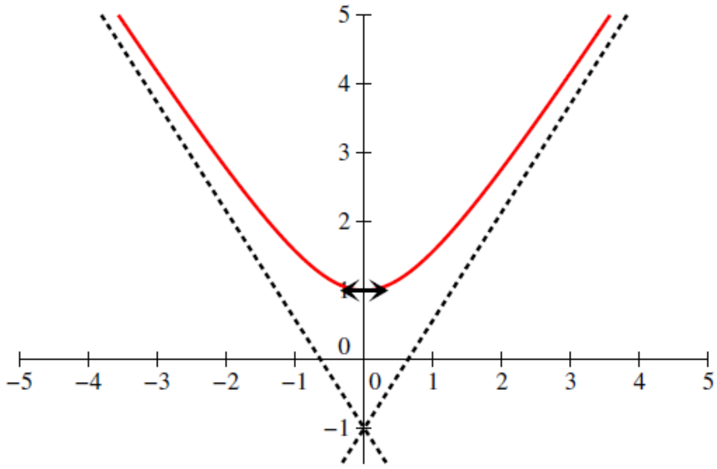
   bien la présence d'une asymptote oblique d'équation $y = \frac{\pi}{2}x - 1$, et $f(x)?\left(\frac{\pi}{2}x - 1\right) \sim \frac{\pi}{2x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, la courbe de f sera donc au-dessus de son asymptote dans un tel voisinage. En $-\infty$, le calcul précédent n'est plus directement valable car la formule de la question précédente ne marche que pour des valeurs strictement positives de x, mais on peut simplement utiliser la parité de f : on aura une asymptote oblique d'équation $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$, et la courbe sera également au-dessus de cette asymptote sur un voisinage de $-\infty$.

6. La fonction h est définie et dérivable sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, et $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-1)^2 - (x^2+1)^2}{(x^2+1)(x^2-1)^2} = -\frac{4x^2}{(x^2+1)(x^2-1)^2}$, qui est toujours négatif. Par ailleurs, $h(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = +\infty$ (calculs sans difficulté, et d'ailleurs inutile si on ne veut que le signe de la fonction h), et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$. On peut donc écrire le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
h	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$

7. Caculons donc $f'(x) = \frac{2x^2\arctan(x) + x - (x^2+1)\arctan(x)}{x^2} = \frac{(x^2-1)\arctan(x) + x}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}h(x)$. Comme $x^2 - 1$ est toujours du même signe que $h(x)$, on en déduit que f' est toujours positive, et donc que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Bien entendu, par parité de f, cette dernière sera décroissante sur $]-\infty, 0[$.

8. On n'oublie bien sûr pas les belles asymptotes :



Exercice 2 :

1. On suppose $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$.
   D'après le théorème de Bézout,
   $\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_1 p + v_1 a = 1$. (1)
   $\exists (u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_2 p + v_2 b = 1$. (2)
   En multipliant les équations (1) et (2), on obtient :
   $\underbrace{(u_1 u_2 p + u_1 v_2 b + u_2 v_1 a)}_{\in \mathbb{Z}} p + \underbrace{(v_1 v_2)}_{\in \mathbb{Z}}(ab) = 1.$
   Donc, d'après le théorème de Bézout, $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$.
   Donc $\binom{p}{k} k! = p(p-1)\ldots(p-k+1)$.
   donc $p \mid \binom{p}{k} k!$. (3)
   Or, $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $p \wedge i = 1$ (car p est premier) donc, d'après 1., $p \wedge k! = 1$.
   Donc, d'après le lemme de Gauss, (3) $\Longrightarrow p \mid \binom{p}{k}$.
   (b) Procédons par récurrence sur n.
   Pour $n = 0$ et pour $n = 1$, la propriété est vérifiée.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Supposons que la propriété (P_n) : $n^p \equiv n \mod p$ soit vérifiée.
   Alors, d'après la formule du binôme de Newton, $(n+1)^p = n^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + 1$. (4)
   Or $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \mid \binom{p}{k}$ donc $p \mid \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$.
   Donc d'après (4) et (P_n), $(n+1)^p \equiv n + 1 \mod p$ et (P_{n+1}) est vraie.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que p ne divise pas n.
   Comme p est premier, alors $p \wedge n = 1$.
   La question précédente donne p divise $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$.
   Or comme p est premier avec n, on en déduit, d'après le lemme de Gauss, que p divise $n^{p-1} - 1$.
   Ce qui signifie que $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$. (petit théorème de Fermat).

Exercice 3 :

1. On trouve comme solution de l'équation homogène sur $]0,+\infty[$ la droite vectorielle engendrée par $x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$.
   En effet, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{3}{2x}$ sur $]0,+\infty[$ est $x \longmapsto \dfrac{3}{2}\ln x$.
2. On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une fonction k telle que $x \longmapsto k(x)x^{\frac{3}{2}}$ soit une solution de l'équation complète (E) sur $]0,+\infty[$.
   On arrive alors à $2k'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}$ et on choisit $k(x) = -\dfrac{1}{2x}$.
   Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont donc les fonctions $x \longmapsto kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. On suppose qu'il existe une solution f de (E) sur $[0,+\infty[$.
   Alors f est aussi solution de E sur $]0,+\infty]$.
   Donc, il existe une constante k telle que $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
   De plus, comme f est solution de E sur $[0,+\infty[$ alors f est dérivable sur $[0,+\infty[$.
   Donc en particulier, f est continue en 0.
   Donc $f(0) = \lim\limits_{x\to 0}\left(kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right) = 0$.
   f doit également être dérivable en 0.
   Or, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = k\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$.
   Donc f n'est pas dérivable en 0.
   Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0,+\infty[$ est l'ensemble vide.

Exercice 4 :

Soit $P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$.
Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-2)^2$.
En déduire une forme factorisée de $P(X)$.
Par définition de la division euclidienne, il existe un polynôme Q et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$P(X) = (X-2)^2Q(X) + aX + b$
Pour $X = 2$, on obtient : $0 = 2a + b \Leftrightarrow b = -2a$.
En dérivant la relation de division euclidienne , on obtient :
$3X^2 - 8X + 5 = 2(X-2)Q(X) + (X-2)^2Q'(X) + a$ puis pour $X = 2 : 1 = a$
D'où : $P(X) = (X-2)^2Q(X) + X - 2$
Et alors : $P(X) - (X-2) = X^3 - 4X^2 + 4X = X(X^2 - 4X + 4) = X(X-2)^2$
d'où $P(X) = X(X-2)^2 + (X-2) = (X-2)(X(X-2)+1) = (X-2)(X^2 - 2X + 1) = (X-2)(X-1)^2$

Exercice 5 :

1. On sait que la fraction rationnelle admet une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}.$$

Par les techniques usuelles (identification, multiplication par X et faire $X = 0,\ldots$), on trouve

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1/2}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1/2}{X+2}.$$

2. Utilisant la décomposition en éléments simples précédente, il vient

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1/2}{k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que (S_n) converge vers $\frac{1}{4}$.