DERNIÈRE COLLE : RÉVISION

La colle de cette semaine reprend ces exercices des semaines passées.

- 1 - Soient un entier $n \geq 1$ et $p_1, p_2, \dots, p_n$ des réels. Pour $i = 1, 2, \dots, n$ on pose $P_i = \sum_{j=i}^n p_j$ et l'on convient que $P_{n+1} = 0$.

Montrer en intervertissant la sommation en i et celle en j que

$$\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{j=1}^n j p_j.$$

Exprimer pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, p_j en fonction de P_j et P_{j+1} , puis retrouver grâce à cette expression le résultat précédent.

- 2 - Soit $n \geq 1$ un entier naturel et $\theta \in]0, \pi[$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta)$.

Donner un majorant de $|S_n|$ indépendant de n .

- 3 - Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $z = e^{2i\pi/n}$. Pour $1 \leq k \leq n-1$, déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.

Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1| = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

- 4 - Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow I$ une fonction. On dit que f est k -lipschitzienne s'il existe un réel k tel que pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Montrer que les fonctions affines sont lipschitziennes.

La somme de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.

La fonction $\sqrt{\cdot}$ est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$?

La fonction $\sqrt{\cdot}$ est-elle lipschitzienne sur $[1, +\infty[$?

Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes bornées est une fonction lipschitzienne.

Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Montrer que f admet un prolongement continu sur $[a, b]$.

- 5 - Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\arctan(\operatorname{sh}x)| = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right).$$

- 6 - Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles positives.

On pose $A_n = a_1 + \dots + a_n$ et $B_n = b_1 + \dots + b_n$

On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = +\infty$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{B_n} = \ell$

- 7 - Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable.

Montrer que

$$\forall x > 0 \quad \exists c > 0 \quad f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$$

- 8 - Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x t f(t) dt + 1.$$

- 9 - Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable telle que pour tout réel $x \geq 0$:

$$f'(x) \leq \cos(x)f(x).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) \leq f(0) \exp(\sin(x)).$$

- 10 - Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt = \frac{\pi}{4}$$

En déduire

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t}$$

- 11 - Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+\ast}$.

Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n .

Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Donner un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 12 - Résoudre les deux équations $P'^2 = 4P$ et $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$ d'inconnues $P \in \mathbb{K}[X]$.

13 - Soient $(p, q) \in \mathcal{L}(E)^2$, démontrer l'équivalence :

$$p \circ q = p \text{ ET } q \circ p = q$$

$\iff p$ et q sont des projections de même noyau

14 - Soit une matrice carrée d'ordre n telle que $A^2 - 3A + 2I_n = (0)_n$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

En déduire l'expression de la matrice A^n comme une combinaison linéaire de A et de I_n .

Déterminer A^{-1} et A^n pour la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

En notant, dans le cas général, f un endomorphisme de matrice A , déterminer deux inclusions entre $\ker(f - \text{Id})$, $\ker(f - 2\text{Id})$, $\text{Im}(f - \text{Id})$ et $\text{Im}(f - 2\text{Id})$.

En déduire que $\ker(f - \text{Id})$ et $\ker(f - 2\text{Id})$ sont deux sev supplémentaires.

15 - Calculer le rang, l'image, le noyau de l'application linéaire associée canoniquement à la matrice M , et déterminer M^n .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

16 - Calculer un déterminant de Vandermonde d'ordre n .