Indications sur le TD 31

1 Tirer un nombre au hasard

1. On a déjà : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \frac{1}{2^n} \leq 1$

Il reste à vérifier que la somme vaut bien 1.

$\sum_{n>0} \frac{1}{2^n}$ on reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{2}$ sa somme vaut donc $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \dots = 1$.

2. A_k est l'ensemble des multiples de k d'où $A_k = \{kp | p > 0\}$.

$$P(A_k) = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{2^{pk}} = \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

3. On va utiliser le fait que $P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3)$. Un entier est dans $A_2 \cap A_3$ si et seulement s'il est divisible par 2 et par 3 si et seulement s'il est divisible par 6, si et seulement s'il appartient à A_6 . On a donc $P(A_2 \cup A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{63} = \frac{29}{63}$.

4. Notons m le ppcm de p et q . Alors $A_p \cap A_q = A_m$. Si A_p et A_q étaient indépendants, on aurait $P(A_m) = P(A_p) \times P(A_q)$ et donc

$$2^m = (2^p - 1)(2^q - 1)31 = 2^{p+q} + 2^p + 2^q + 2$$

Or, le membre de gauche est divisible par 4, et pas le membre de droite (tous les termes à droite sont divisibles par 4, sauf 2...). On a donc une contradiction.

2 Produit de convolution

1. La somme d'une famille positive est la borne supérieure de ses sommes finies.

Soit $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$:

— $0 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|$, on en déduit $0 \leq \|u\|$.

— Si F est une partie finie de $\mathbb{Z}$ alors $\sum_{n \in F} |\lambda u_n| = |\lambda| \sum_{n \in F} |u_n|$ d'où en passant aux bornes sup : $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.

— Soit F une partie finie de $\mathbb{Z}$,

$$\sum_F |u_n + v_n| \leq \sum_F |u_n| + |v_n| = \sum_F |u_n| + \sum_F |v_n| \leq \sum_{\mathbb{Z}} |u_n| + \sum_{\mathbb{Z}} |v_n|$$

Ceci étant vrai quelque soit F partie finie de $\mathbb{Z}$, il vient $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

— Soit $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ telle que $\|u\| = 0$.

Si $n \in \mathbb{Z}$, $|u_n| = \sum_{k \in \{n\}} |u_k| \leq \|u\| = 0$.

u est bien la famille nulle.

2. Si $n \in \mathbb{Z}$ alors $|u_n| = \sum_{k \in \{n\}} |u_k| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| = \|u\|$, la famille u est bien bornée.

3. On peut décomposer u_n en partie positive et partie négative.

4. On utilise le fait que la famille v est bornée.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. (n est fixé.)

Si F est une partie finie de $\mathbb{Z}$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| &\leq \sum_{k \in F} |u_k| \|v\| = \|v\| \sum_{k \in F} |u_k| \text{ (Question précédente)} \\ &\leq \|v\| \|u\| \end{aligned}$$

La famille $(u_k v_{n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est donc sommable et $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| \leq \|u\| \|v\|$.

5. Si k est fixé alors quand n décrit $\mathbb{Z}$, $n - k$ décrit aussi $\mathbb{Z}$ d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(|u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_{n-k}| \right) \quad (\text{Fubini}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(|u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n| \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| \end{aligned}$$

6. Soit F une partie finie de $\mathbb{Z}$,

$$\sum_{n \in F} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k} \right| \leq \sum_{n \in F} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| \leq \|u\| \|v\|.$$

D'où $(u \star v)$ est sommable est $|u \star v| \leq \|u\| \|v\|$.

7. — Élément neutre : On prend $v = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ défini par $v_0 = 1$ et $v_n = 0$ si $n \neq 0$.

— Commutativité, faire le changement d'indice $k' = n - k$

Pour $n \in \mathbb{Z}$:

Quand k décrit $\mathbb{Z}$, $k' = n - k$ décrit aussi $\mathbb{Z}$

$$(u \star v)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k} = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} u_{n-k'} v_{k'} = (v \star u)_n.$$

— associativité : Soient u, v , et w dans $\ell^1(\mathbb{Z})$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (u \star (v \star w))_n &= \sum_{p+q=n} u_p (v \star w)_q = \sum_{p+q=n} u_p \sum_{r+s=q} v_r w_s \\ &= \sum_{p+r+s=n} u_p v_r w_s \\ &= \sum_{t+s=n} \left(\sum_{p+r=t} u_p v_r \right) w_s = \sum_{t+s=n} (u \star v)_t w_s \\ &= ((u \star v) \star w)_n \end{aligned}$$

8. Considérer l'inverse potentiel et établir qu'il est soit nul soit non sommable.