MPSI2

Géométrie euclidienne

Exercice 1 Soit $E=\mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$. Pour $f,g\in E$, on pose $\varphi(f,g)=f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$.
Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 2 Montrer que $\varphi(f,g)=\int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$ définit un produit scalaire sur $E=\mathcal{C}([-1;1],\mathbb{R})$.

1. Si $\langle f, f\rangle = 0$, alors on a à la fois $(f(0))^2 = 0$, donc $f(0) = 0$, et

$$\int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 dt = 0.$$

Or, $(f')^2$ est continue et positive sur $[0,1]$. Puisque son intégrale est nulle, c'est que f' est nulle sur $[0,1]$. On en déduit que f est constante sur $[0,1]$, puis, comme $f(0) = 0$, que f est identiquement nulle sur $[0,1]$.

Symétrie, bilinéarité et positivité : claires.
Si $\varphi(f,f)=0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive, on a pour tout $t\in[-1\,;1]$, $f(t)^2(1-t^2)=0$ et donc pour tout $t\in\,]-1\,;1[$, $f(t)=0$.
Par continuité de f en 1 et -1, on obtient $f(t)=0$ sur $[-1\,;1]$.
On peut alors conclure que φ est un produit scalaire.

Exercice 3 Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel.
Établir $||\frac{x}{||x||^2} - \frac{y}{||y||^2}|| = \frac{||x-y||}{||x||||y||}$

Exercice 4 Démontrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Exercice 5 Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout $t \in [a,b]$, on a $f^2(t) \leq (t-a) \int_a^t f'^2(u)du$.

2. En déduire que $\int_a^b f^2(t)dt \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u)du$.

Exercice 6 Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$.
Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$. Préciser les cas d'égalité.

En développant le produit scalaire

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\|^2 = \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{(x\,|\,y)}{\|x\|^2\|y\|^2} + \frac{1}{\|y\|^2} = \left(\frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|} \right)^2.$$

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, avec $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(2^{-1},\cdots,2^{-n})$. Il vient

$$\left|\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k}\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{2k}}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}$$

Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, et en utilisant la formule donnant la somme d'une suite géométrique, on trouve

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k}\right)^2 &\leq \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4^{n+1}}}{1-\frac{1}{4}}\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\\ &\leq \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\\ &\leq \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right).\end{aligned}$$

1. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ et s'annule en a, on a par le théorème fondamental du calcul intégral

$$f(t) = \int_a^t f'(u)du = \int_a^t 1 \times f'(u)du.$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} f^2(t) &\leq \left(\int_a^t 1du\right)\left(\int_a^t f'^2(u)du\right) \\ &\leq (t-a)\int_a^t f'^2(u)du \\ &\leq (t-a)\int_a^b f'^2(u)du \end{aligned}$$

puisque $f'^2 \geq 0$ et que $t \in [a,b]$. On intègre ensuite cette inégalité pour $t \in [a,b]$, et on trouve

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(t)dt &\leq \left(\int_a^b (t-a)dt\right)\left(\int_a^b f'^2(u)du\right) \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(u)du. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_k}} \sqrt{x_k}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, il y a colinéarité des n-uplets

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) \text{ et } \left(\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n}\right)$$

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E.
Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par $(P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Sans calculs, déterminer une base orthonormée pour ce produit scalaire.

($\Longrightarrow$) Via Pythagore
($\Longleftarrow$) Si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ alors $2\lambda(x\,|\,y) + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0$.

Il s'agit d'un polynôme de second degré qui est donc toujours de signe positif si et seulement si son discriminant est négatif.
Or son discriminant est égal au carré du produit scalaire des vecteurs x et y
Comme un carré est toujours positif, cela ne peut se faire qu'à l'unique condition que le produit scalaire indiqué est nul.

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement symétrique. Sa bilinéarité vient de la linéarité de la dérivation et de l'évaluation en un point. De plus, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{(P^{(k)}(a))^2}{(k!)^2} \geq 0.$$

De plus, $\langle P, P \rangle = 0$ si et seulement si, pour tout $k = 0, \dots, n$, $P^{(k)}(a) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si a est racine de multiplicité au moins $n+1$ de P. Puisque P est de degré au plus n, $P = 0$.
Posons ensuite $P_j(X) = (X-a)^j$. Alors $P_j^{(k)}(a) = 0$ si $k \neq j$ et $P_j^{(j)}(a) = j!$. Ainsi, on a pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle P_j, P \rangle = \frac{P^{(j)}(a)}{j!}.$$

Appliquant ceci aux P_ℓ, on constate que $(P_j)_{j=0,\dots,n}$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$. En particulier, c'est une famille libre qui comporte $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$, et c'est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 9 $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère le sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ défini par : $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x+z+t=0 \text{ et } x-y+z=0\}$.
Déterminer une base orthonormale de F.

Exercice 10 Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

On commence par chercher une base de F. On remarque que

$$(x,y,z,t)\in F \iff \begin{cases} x &= -z-t \\ y &= x+z=-t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -z-t \\ y &= -t \\ z &= z \\ t &= t \end{cases}$$

Posons alors $u_1=(-1,0,1,0)$ et $u_2=(-1,-1,0,1)$. Alors (u_1,u_2) est une base de F. Malheureusement, elle n'est pas orthonormale. On l'orthonormalise en posant

$$v_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0).$$

On pose ensuite

$$\begin{aligned} u_2' &= u_2-\langle u_2,v_1\rangle v_1 \\ &= (-1,-1,0,1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0) \\ &= (-1/2,-1,-1/2,1) \end{aligned}$$

de sorte que $\langle u_2',v_1\rangle=0$. On normalise enfin u_2' en posant

$$v_2=\frac{u_2'}{\|u_2'\|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(-1/2,-1,-1/2,1).$$

La famille (v_1,v_2) est une base orthonormale de F.

On va orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$. Commençons par normaliser 1. Sa norme est $\sqrt{2}$. On pose donc

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Considérons ensuite

$$Q_1(X) = X + \lambda P$$

où λ est choisi de sorte que $\langle Q_1, P\rangle = 0$. Mais,

$$\langle Q_1, P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}} dt + \lambda\langle P, P\rangle = \lambda.$$

On doit donc avoir $\lambda = 0$ (en réalité, les deux vecteurs 1 et X sont déjà orthogonaux!), et donc $Q_1 = X$. On normalise ce vecteur en

$$Q(X) = \sqrt{\frac{3}{2}} X.$$

On pose enfin

$$R_1 = X^2 + \lambda P + \mu Q$$

de sorte que $\langle R_1, P\rangle = 0$ et $\langle R_1, Q\rangle = 0$. Mais, X^2 est déjà orthogonal à X, et donc par un calcul similaire au précédent, on va trouver que $\mu = 0$. D'autre part,

$$\langle R_1, P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^2 dt + \lambda = \frac{\sqrt{2}}{3} + \lambda.$$

On trouve $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ et donc

$$R_1(X) = X^2 - \frac{1}{3}.$$

Reste à normaliser ce vecteur en

$$R(X) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1).$$

Ainsi, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} X, \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 11 $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer un système d'équations de $G^\perp$ où G est le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par : $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y - z + t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + t = 0\}$.

Exercice 12 Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

Exercice 13 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E.

1. Montrer que : $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Que se passe-t-il en dimension finie ?

Exercice 14 Soient E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ une application surjective telle que pour tout $x, y \in E$, on ait $(f(x)|f(y)) = (x|y)$. Montrer que f est un endomorphisme de E.

On commence par chercher une base de G. On remarque que

$$
\begin{aligned}
(x,y,z,t)\in G &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z+t &=& 0\\ x+2y+3z+t &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z+t &=& 0\\ y+4z &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y+z-t=5z-t\\ y &=& -4z\\ z &=& z\\ t &=& t\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Ainsi, si on pose $u_1=(5,-4,1,0)$ et $u_2=(-1,0,0,1)$, on sait que (u_1,u_2) est une base de G. On détermine alors facilement un système d'équations pour $G^\perp$:

$$
\begin{aligned}
(x,y,z,t)\in G^\perp &\iff (x,y,z,t)\perp u_1 \text{ et } (x,y,z,t)\perp u_2\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 5x-4y+z &=& 0\\ -x+t &=& 0\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

1. Soit $y \in B^\perp$. Alors, pour tout $x \in A$, on a $x \in B$ et donc $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui prouve que $y \in A^\perp$.
2. On commence par prendre $x \in (A \cup B)^\perp$, et prouvons que $x \in A^\perp$. En effet, si $y \in A$, on a $y \in A \cup B$, et donc $\langle x, y\rangle = 0$. Ceci montre la première inclusion. Réciproquement, si $x \in A^\perp \cap B^\perp$, prenons $y \in (A \cup B)$. Alors si $y \in A$, on a bien $\langle x, y\rangle = 0$ puisque $x \in A^\perp$, et le cas où $y \in B$ se résoud de la même façon.
3. D'après la première question, puisque $A \subset \mathrm{vect}(A)$, on a

$$\mathrm{vect}(A)^\perp \subset A^\perp.$$

Réciproquement, si $y \in A^\perp$, prenons $x \in \mathrm{vect}(A)$. Alors on peut trouver des éléments $a_1, \dots, a_n$ de A et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\langle y, x\rangle &= \langle y, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n\rangle\\ &= \lambda_1\langle y, a_1\rangle + \dots + \lambda_n\langle y, a_n\rangle\\ &= \lambda_1 0 + \dots + \lambda_n 0\\ &= 0,\end{aligned}$$

et donc $y \in \mathrm{vect}(A)^\perp$.

4. On va commencer par prouver que $A \subset (A^\perp)^\perp$. Mais, soit $x \in A$. Choisissons $y \in A^\perp$. On a alors $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui prouve que $x \in A^{\perp\perp}$. D'autre part, $(A^\perp)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient A. Il contient donc le sous-espace vectoriel engendré par A et on a bien l'inclusion demandée.

5. Notons $B = \mathrm{vect}(A)$ et $n = \dim(E)$. Alors d'après la question précédente,

$$(A^\perp)^\perp = (B^\perp)^\perp.$$

D'autre part,

$$\dim(B^\perp) = n - \dim B \implies \dim((B^\perp)^\perp) = n - \dim(B^\perp) = \dim(B).$$

Ainsi, d'après la question précédente, on a $B \subset (B^\perp)^\perp$ et ces deux sous-espaces ont la même dimension. Ils sont donc égaux!

On remarque d'abord que si $A \subset B$, alors on a $B^\perp \subset A^\perp$, ce qui est immédiat en appliquant la définition. Ainsi, puisque $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, on obtient $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Prenons maintenant $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Tout $z \in F+G$ s'écrit $z = f+g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. Alors :

$$(x,z) = (x,f) + (x,g) = 0,$$

ce qui prouve que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$. D'autre part, on a $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$, ce qui donne respectivement $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Puisque $(F \cap G)^\perp$ est un sous-espace vectoriel, il est stable par addition, et donc on a $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Dans le cas où E est un espace de dimension finie, on peut obtenir l'autre inclusion en comparant les dimensions des sous-espaces :

$$\begin{aligned}
\dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp) \\
&= \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F+G)^\perp \\
&= \dim(E) - \dim(F) - \dim(G) + \dim(F+G) \\
&= \dim(E) - \dim(F \cap G) \\
&= \dim((F \cap G)^\perp).
\end{aligned}$$

Soit $g \in F^\perp$. Remarquons que la fonction h définie par $h(x) = xg(x)$ est dans F. On en déduit que $(g,h) = 0$, ce qui donne $\int_0^1 xg^2(x) = 0$. Or, la fonction $x \mapsto xg^2(x)$ est positive et continue sur $[0,1]$. Puisque son intégrale est nulle, c'est qu'il s'agit de la fonction identiquement nulle. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $g(x) = 0$. Maintenant, g est continue, et donc on obtient que g est identiquement nulle. Ainsi, $F^\perp = \{0\}$. D'autre part, si F admettait un supplémentaire orthogonal, on aurait $F \oplus F^\perp = E$. Ici, $F \oplus F^\perp = F \neq E$. Donc F n'admet pas de supplémentaire orthogonal!

$$
\begin{aligned}
(f(\lambda x+\lambda' x')\,|\,f(y)) &= (\lambda x+\lambda' x'\,|\,y)\\
&= \lambda(x\,|\,y)+\lambda'(x'\,|\,y)\\
&= \lambda(f(x)\,|\,f(y))+\lambda'(f(x')\,|\,f(y))\\
&= (\lambda f(x)+\lambda' f(x')\,|\,f(y))
\end{aligned}
$$

donc

$$
f(\lambda x+\lambda' x')-(\lambda f(x)+\lambda' f(x'))\in(\operatorname{Im} f)^{\perp}=\{0\}
$$

d'où la linéarité de f.
En fait, l'hypothèse de surjectivité n'est pas nécessaire pour résoudre cet exercice mais permet un « argument rapide ».

Posons $E=\mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt$. On a $\int_0^1 |x^2-ax-b|^2dx=\|x^2-(ax+b)\|^2$. Quand (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$, $ax+b$ décrit $F=\mathrm{vect}(1,x)$ et donc

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 |x^2-ax-b|^2dx=\inf_{f\in F}\|x^2-f\|^2.$$

Mais on sait que

$$\inf_{f\in F}\|x^2-f\|=\|x^2-p(x^2)\|$$

où $p(x^2)$ est la projection orthogonale de x^2 sur F. Il s'agit donc de calculer cette projection. Ceci peut se faire de deux façons. D'une part, on peut fabriquer une base orthonormale de F par le procédé de Gram-Schmidt à partir de $1,x$ et on sait que

$$p(x^2)=\langle x^2,e_1\rangle e_1+\langle x^2,e_2\rangle e_2.$$

On peut aussi poser a priori $p(x^2)=ax+b$ et écrire que $x^2-(ax+b)\perp 1$, $x^2-(ax+b)\perp x$. On obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\int_0^1 x^2-(ax+b)dx&=&0\\ \int_0^1 x^3-(ax^2+bx)dx&=&0\end{array}\right.$$

qui permet de calculer a et b. Par l'une ou l'autre méthode, on trouve que $p(x^2)=x-1/6$ et donc que $\|x^2-p(x^2)\|=\frac{1}{\sqrt{180}}$. La borne inférieure recherchée est donc $1/180$ (il ne faut pas oublier de reprendre le carré).

Exercice 15 Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace vectoriel défini par $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\}$.
Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 8, 1, 1)$ sur F.

Exercice 16 Soient E un espace vectoriel euclidien, et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux.
Démontrer l'équivalence entre : **1.** $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$; **2.** Pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

On commencer par rechercher une base de F. Pour cela on écrit que

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t)\in F &\iff \begin{cases} x+y+t &= 0 \\ x+y+2z-t &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y+t &= 0 \\ 2z-2t &= 0 \quad L_2\leftarrow L_2-L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= -y \quad -t \\ y &= y \\ z &= \quad t \\ t &= \quad t \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $u_1=(-1,1,0,0)$ et $u_2=(-1,0,1,1)$, on trouve que (u_1,u_2) est une base de F. Notons ensuite $p_F(u)$ le projeté orthogonal de u sur F et donnons deux méthodes pour le calculer. Une première méthode consiste à écrire que $p_F(u)=au_1+bu_2=(-a-b,a,b,b)$ de sorte que $u-p_F(u)=(1+a+b,8-a,1-b,1-b)$. On sait que $u-p_F(u)\perp u_1$. Calculant le produit scalaire, on trouve

$$-1-a-b+8-a=0 \iff 2a+b=7.$$

On sait aussi que $u-p_F(u)\perp u_2$ et toujours avec l'aide du produit scalaire :

$$-1-a-b+1-b+1-b=0 \iff a+3b=1.$$

Ainsi, (a,b) est solution du système suivant, que l'on va résoudre :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a+3b &= 1 \\ 2a+b &= 7 \end{cases} &\iff \begin{cases} a+3b &= 1 \\ -5b &= 5 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a &= 4 \\ b &= -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

On trouve $p_F(u)=(-3,4,-1,-1)$.

Deuxième méthode : on va orthonormaliser la base (u_1, u_2). Puisque $\|u_1\| = \sqrt{2}$, on pose

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0).$$

On cherche ensuite $u_2' = u_2 + \alpha v_1$ de sorte que $\langle u_2', v_1\rangle = 0$. Ceci donne

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \alpha = 0 \iff \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

On obtient

$$u_2' = (-1, 0, 1, 1) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right).$$

D'autre part,

$$\|u_2'\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{10}{4}$$

et donc on pose

$$v_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, -1, 2, 2).$$

On sait ensuite que $p_F(u) = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2$. Or,

$$\langle u, v_1\rangle = \frac{7}{\sqrt{2}} \text{ et } \langle u, v_2\rangle = \frac{-5}{\sqrt{10}}$$

de sorte que

$$\langle u, v_1\rangle v_1 = \left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0\right)$$

et

$$\langle u, v_2\rangle v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1\right).$$

Après un dernier petit calcul, on retrouve bien $p_F(u) = (-3, 4, -1, -1)$.

On va se simplifier la vie en travaillant avec les noyaux plutôt que les images. Il est en effet clair que, si F et G sont deux sous-espaces de E, alors

$$F \subset G \iff G^\perp \subset F^\perp.$$

De plus, s'agissant de projections orthogonales, $\mathrm{Im}(p)^\perp = \ker(p)$. L'assertion 1 est donc équivalente à

$$(3) \qquad\qquad \ker(q) \subset \ker(p).$$

Démontrons alors que $2 \implies 3$. Supposons 2 et prenons $y \in \ker(q)$. Alors on a

$$\|p(y)\| \leq \|q(y)\| = 0$$

et donc $p(y) = 0$. Réciproquement, supposement $\ker(q) \subset \ker(p)$ et prouvons 2. Soit $x \in E$, que l'on décompose en $x = x_1 + x_2$ dans $\ker(q) \oplus \mathrm{Im}(q)$. Alors,

$$q(x) = x_2 \text{ et } p(x) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_2).$$

p étant une projection orthogonale, on a toujours

$$\|p(x_2)\| \leq \|x_2\|$$

(c'est par exemple une conséquence du théorème de Pythagore, en décomposant x_2 dans la somme directe orthogonale $\mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$). Ainsi, on a bien prouvé que

$$\|p(x)\| \leq \|q(x)\|.$$

Exercice 17 Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
On considère G le sous-espace vectoriel des quadruplets (x_1, x_2, x_3, x_4) de E tels que $\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$

1. Déterminer une base orthonormale de G.
2. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p_G sur G.
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E. Déterminer la distance de x à G.

Exercice 18 Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^T N)$.
On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.
3. Calculer la distance de J à F.

Exercice 19 Soit E un espace préhilbertien. Pour $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E, on appelle matrice de Gram la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $(\langle x_i, x_j\rangle)_{i,j}$. On appelle déterminant de Gram des vecteurs $x_1, \dots, x_p$, et on note $G(x_1, \dots, x_p)$, le déterminant de cette matrice.

1. Démontrer que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre si et seulement si $G(x_1, \dots, x_p) \neq 0$.
2. On suppose désormais que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre, et on note $F = \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_p)$.
   Soit également $x \in E$. Démontrer que $d(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, \dots, x_p)}$.

1. On commence par trouver une base de G. Mais on a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= -x_1 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= -x_3. \end{cases}$$

On en déduit que $(e_1 - e_2, e_3 - e_4)$ est une base de G. Ces deux vecteurs sont déjà orthogonaux, il suffit de les normaliser. Si on pose $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4)$, alors (u_1, u_2) est une base orthonormale de G.

2. On va calculer $p_G(e_i)$ par la formule

$$p_G(e_i) = \langle e_i, u_1 \rangle u_1 + \langle e_i, u_2 \rangle u_2.$$

On en déduit que la matrice de p_G dans la base canonique est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On sait que $d(x, G) = \|x - p_G(x)\|$. Écrivons $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Alors

$$p_G(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2, -x_1 + x_2, x_3 - x_4, -x_3 + x_4)$$

et donc

$$x - p_G(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_3 + x_4).$$

Il vient

$$d(x, G)^2 = \frac{1}{2}\left((x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2\right).$$

1. On remarque d'abord qu'une matrice M appartient à F si et seulement si elle s'écrit $aI_2 + bK$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Autrement dit, F est l'espace vectoriel engendré par les matrices I_2 et K.

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ un élément de E. Alors M est élément de $F^\perp$ si et seulement si M est orthogonale à I_2 et à K. Maintenant,

$$\langle M, I_2 \rangle = x + t \text{ et } \langle M, K \rangle = y - z.$$

Ainsi, M est élément de $F^\perp$ si et seulement si $t = -x$ et $z = y$. Autrement dit, on a prouvé que

$$F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix};\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Une base de $F^\perp$ est donnée par (A, B), avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On va orthonormaliser cette base pour obtenir une base orthonormale de $F^\perp$. On ne va pas avoir à utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, car A et B sont déjà orthogonales : $\langle A, B \rangle = 0$. De plus,

$$\|A\| = \|B\| = \sqrt{2}$$

comme le montre un rapide calcul. Si on pose

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} A \text{ et } B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} B,$$

alors (A_1, B_1) est une base orthonormée de $F^\perp$.

2. Il suffit d'appliquer le résultat qui exprime le projeté dans une base orthonormale :

$$\begin{aligned} p_{F^\perp}(J) &= \langle J, A_1\rangle A_1 + \langle J, B_1\rangle B_1 \\ &= 0 + \frac{2}{\sqrt{2}} B_1 \\ &= B. \end{aligned}$$

3. On sait que

$$\operatorname{dist}(J, F) = \|J - p_F(J)\| = \|p_{F^\perp}(J)\| = \|B\| = \sqrt{2}.$$

1. D'abord, remarquons que si $(x_1,\dots,x_p)$ est une famille liée, un des vecteurs, disons le j-ième, est combinaison linéaire des autres. Mais alors cette relation se reporte sur la matrice de Gram, dont la j-ième colonne est combinaison linéaire des autres. Et donc $G(x_1,\dots,x_p)=0$.
Supposons ensuite que $G(x_1,\dots,x_p)=0$. Les vecteurs colonnes de la matrice de Gram sont donc liés. Ceci signifie qu'il existe des scalaires $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ non tous nuls tels que, pour tout $i=1,\dots,p$, on a

$$\langle \lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_p x_p, x_i\rangle = 0.$$

On obtient ainsi p relations. Multiplions la première par λ_1, la deuxième par λ_2, etc..., et faisons la somme de ces relations. Par bilinéarité du produit scalaire, on trouve :

$$\langle \lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_p x_p, \lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_p x_p\rangle = \|\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_p x_p\|^2 = 0.$$

Autrement dit, on a

$$\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_p x_p = 0$$

et donc la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée.
2. Écrivons $x=u+v$, avec $u\in F$ et $v\in F^\perp$, et rappelons que $d(x,F)=\|v\|$. Si on regarde la matrice de Gram associée, et tenant compte de l'orthogonalité de v avec les autres vecteurs $x_1,\dots,x_p$, on trouve :

$$G(x,x_1,\dots,x_p)=\begin{vmatrix} \|u\|^2+\|v\|^2 & \langle u,x_1\rangle & \dots & \langle u,x_p\rangle \\ \langle x_1,u\rangle+0 & \langle x_1,x_1\rangle & \dots & \langle x_1,x_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle x_p,u\rangle+0 & \langle x_p,x_1\rangle & \dots & \langle x_p,x_p\rangle \end{vmatrix}.$$

Par multilinéarité du déterminant, et en inspectant la première colonne, on trouve

$$G(x,x_1,\dots,x_p)=G(u,x_1,\dots,x_p)+\begin{vmatrix} \|v\|^2 & \langle u,x_1\rangle & \dots & \langle u,x_p\rangle \\ 0 & \langle x_1,x_1\rangle & \dots & \langle x_1,x_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \langle x_p,x_1\rangle & \dots & \langle x_p,x_p\rangle \end{vmatrix}.$$

Mais $G(u,x_1,\dots,x_p)$ est nul car la famille $(u,x_1,\dots,x_p)$ est liée. Le second déterminant est lui égal à $\|v\|^2 G(x_1,\dots,x_p)$, ce qui achève la preuve.

Exercice 20 **Les questions de cet exercice sont indépendantes**

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $u(3,4,3)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+y-z=0$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $M(3,4,5)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+y-z+2=0$.

Exercice 21 Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3, b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3)=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

On pose H l'hyperplan $H=\{P\in E;\ P(1)=0\}$.

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H. Retrouver ce résultat d'une autre manière.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est donnée par $v = (2, 1, -1)$. Ainsi, par une formule du cours,

$$d(u, \mathcal{P}) = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|v\|} = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

Un vecteur normal du plan est $u = (2, 1, -1)$. Un point du plan est $A = (0, 0, 2)$. On en déduit que la distance recherchée est

$$d = \frac{|\langle u, \overrightarrow{AM}\rangle|}{\|u\|} = \frac{\langle (2, 1, -1), (3, 4, 3)\rangle}{\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

1. Puisque H est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ (c'est le noyau d'une forme linéaire), sa dimension est 3. Pour trouver une base de H, il suffit de trouver trois vecteurs indépendants. Posons par exemple $R_1(X) = X - 1$, $R_2(X) = X^2 - X$ et $R_3(X) = X^3 - X^2$. (R_1, R_2, R_3) est une famille de 3 éléments de H, qui est libre car les degrés respectifs des R_i sont distincts. On a donc bien une base de l'hyperplan. Il est possible aussi de déterminer une base de l'hyperplan comme on le fait usuellement quand on connait l'équation d'un sous-espace vectoriel. Notons $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. On a donc

$$\begin{aligned} P \in H &\iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ &\iff a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \\ &\iff \begin{cases} a_0 &= -a_1 \quad -a_2 \quad -a_3 \\ a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_2 \\ a_3 &= a_3. \end{cases} \end{aligned}$$

Cette méthode donne comme base $(X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1)$.

2. Il suffit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à partir de l'une des bases construites à la question précédente. On a donc :

$$P_1 = R_1/\|R_1\| = \sqrt{\frac{1}{2}}(X - 1).$$

Posons $P_2' = R_2 + \lambda P_1$, avec λ de sorte que $(P_2', P_1) = 0$, ce qui entraîne $\lambda = -(P_1, R_2)$. Après normalisation, on trouve

$$P_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(X^2 - (X + 1)/2).$$

On procède de même pour P_3, et on trouve

$$P_3 = \sqrt{\frac{3}{4}}\left(X^3 - (X^2 + X + 1)/3\right).$$

3. On a

$$P_H(x) = \sum_{j=1}^{3} (X, P_j) P_j = \frac{-1}{4}\left(X^3 + X^2 - 3X + 1\right).$$

Il vient :

$$d^2(x, H) = \|x\|^2 - \|P_H(x)\|^2 = 1 - 3/4 = 1/4.$$

Si on n'avait pas calculé une base orthonormale de H, on aurait pu remarquer que le polynôme $Q = X^3 + X^2 + X + 1$ est normal à l'hyperplan H et donc que

$$d(X, H) = \frac{|\langle X, Q\rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{2}.$$