Séries - exercices

Exercice 1 Soit $\alpha > 1$. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}$. En déduire un équivalent simple de R_n.

Exercice 2

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente et de somme $\ln 2$.
2. Sachant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, retrouver d'une autre façon le résultat précédent.

Exercice 3 Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}$. On justifiera la convergence de la série.

Exercice 4 Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (pour $n \geq 2$) est convergente, et calculer sa somme.

1. On intègre :

$$\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right).$$

On fait tendre x vers $+\infty$ et on trouve que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}a^{1-\alpha}.$$

2. On va comparer la somme à une intégrale. La fonction $x\mapsto x^{-\alpha}$ étant décroissante, on en déduit que, pour tout $k\geq 2$, on a

$$\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de $n+1$ à N. On trouve :

$$\int_{n+1}^{N+1}\frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On fait tendre N vers $+\infty$. En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve que

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

On en déduit que

$$\frac{R_n}{\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)}} \to 1$$

c'est-à-dire

$$R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

1. Remarquons d'abord par récurrence sur n que la dérivée n-ième de $f(t)=\ln(1+t)$ est :

$$f^{(n)}(t)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$

On va appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à cette fonction entre 0 et 1. Remarquons que si $t\in[0,1]$, on a :

$$\left|f^{(n)}(t)\right|\leq(n-1)!$$

On a donc :

$$\left|f(1)-f(0)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right|\leq\frac{1}{n},$$

ce qui en remplaçant les dérivées successives en zéro donne :

$$\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|\leq\frac{1}{n}.$$

Faire tendre n vers $+\infty$ donne le résultat.

2. Avec l'indication, il vient :

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}\right)dt=\int_0^1\frac{1-(-t)^n}{1+t}dt.$$

Or, $\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln 2$, et

$$\left|\int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t}dt\right|\leq\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}.$$

Il vient $|U_n-\ln 2|\leq\dfrac{1}{n+1}$, ce qui redonne bien le résultat de la première question.

On commence par remarquer que

$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2(n+1)}.$$

On va alors pouvoir simplifier les sommes partielles à l'aide d'un changement d'indices. En effet, on a pour $N\geq 3$

$$\begin{aligned}
S_N&=\sum_{n=2}^N\frac{(-1)^n}{n^2-1}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^N\frac{(-1)^n}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^N\frac{(-1)^n}{n+1}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^N\frac{(-1)^n}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N+2}\frac{(-1)^n}{n-1}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{(-1)^{N+1}}{2N}-\frac{(-1)^{N+2}}{2(N+1)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite (S_N) converge et que sa limite vaut $\frac{1}{4}$. C'est donc que la série converge et que

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}=\frac{1}{4}.$$

Remarquons qu'on aurait pu démontrer autrement la convergence de la série (par convergence absolue ou par le critère des séries alternées); notre méthode prouve en même temps la convergence de la série et donne sa somme.

On a affaire à une série télescopique un peu compliquée. Les simplifications se font sur l'écriture de 3 termes consécutifs. Précisément, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{2}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}\\ &= 1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

On prouve donc que la série converge, et que sa somme fait : $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On aurait aussi pu séparer la série en deux séries télescopiques, en écrivant

$$u_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Exercice 5 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives. On suppose que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent. Prouver la convergence de $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ et de $\sum_n \max(u_n, v_n)$.

Exercice 6 Discuter la nature de la série de terme général $u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$, où a et b sont deux nombres complexes, $a \neq 0$.

Exercice 7 Soit (u_n) une suite de réels positifs. On pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

1. Prouver que la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$.
2. Démontrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

Exercice 8 Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{n}{n^3+1}$
2. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$
3. $u_n = n\sin(\frac{1}{n})$
4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
5. $u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}$
6. $u_n = \frac{1}{n!}$
7. $u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 2^n}$
8. $u_n = \frac{n+1}{2^n+8}$
9. $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+1)}$
10. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$
11. $u_n = a^n n!,\ a \in \mathbb{R}_+$
12. $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$
13. $u_n = \frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$
14. $u_n = \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$
15. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$
16. $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$

Corrigé

On a $(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n})^2\geq 0$ ce qui prouve que $0\leq \sqrt{u_nv_n}\leq \frac{1}{2}(u_n+v_n)$. Par majoration d'une série à termes positifs par le terme général d'une série convergente, la série de terme général $\sqrt{u_nv_n}$ est convergente.
D'autre part, on a $0\leq \max(u_n,v_n)\leq u_n+v_n$ (le maximum est toujours égal à l'un ou l'autre, donc inférieur ou égal à la somme des deux puisqu'on a affaire à des séries à termes positifs). Pour la même raison, la série $\sum_n \max(u_n,v_n)$ converge.

Pour $|b| \leq 1$, la suite (b^n), qui est bornée, est négligeable devant $2^{\sqrt{n}}$. Par conséquent, $(2^{\sqrt{n}} + b^n) \sim_{+\infty} 2^{\sqrt{n}}$, et $u_n \sim a^n$. On en déduit alors que, pour $|a| \geq 1$, le terme général u_n ne tend pas vers 0 : la série $\sum_n u_n$ est donc divergente; Pour $|a| < 1$, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente car $|u_n| \sim_n |a^n|$, le terme de droite étant le terme général d'une série convergente.
Si maintenant $|b| > 1$, alors la suite $(2^{\sqrt{n}})$ est négligeable devant (b^n) (faire le quotient en passant par la notation exponentielle). On en déduit que $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{2^{\sqrt{n}} a^n}{b^n}$. Posons $v_n = \dfrac{2^{\sqrt{n}} |a|^n}{|b|^n}$, et étudions la série $\sum_n v_n$ en appliquant le critère de d'Alembert. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|a|}{|b|} 2^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$$

Puisque $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers 0 (multiplier par la quantité conjuguée), on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|a|}{|b|}$. Si $|a| < |b|$, alors la série $\sum_n v_n$ converge, et la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente. Si $|a| \geq |b|$, alors $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$, et la série $\sum_n u_n$ est divergente.

1. Il suffit d'étudier la fonction. Sa dérivée est $x \mapsto 1/(1+x)^2 \geq 0$, donc la fonction est croissante.
2. On distingue deux cas : si (u_n) tend vers 0, alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$, et ces deux suites sont positives. Par le critère d'équivalence, on en déduit que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ont la même nature. Si (u_n) ne tend pas vers 0 (ce qui implique que $\sum_n u_n$ diverge), alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $u_n \geq \varepsilon$ (rappelons que $u_n \geq 0$). Mais alors, d'après la première question, on a $v_n \geq \varepsilon/(1+\varepsilon) > 0$, et donc la suite (v_n) ne converge pas vers 0. Ainsi, la série $\sum_n v_n$ est aussi divergente, et dans ce cas, les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ont bien la même nature.

1. On a

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série est convergente.

2. Le raisonnement est identique :

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

et par comparaison à une série de Riemann convergente, la série est convergente.

3. On a $\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) = 1$ (rappelons que $\sin x \sim_0 x$) et la série est grossièrement divergente (son terme général ne tend pas vers 0).

4. Puisque $\ln(1+x) \sim_0 x$, on obtient

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n},$$

et la série est donc divergente par comparaison à une série de Riemann divergente.

5. On a $(-1)^n + n \sim_{+\infty} n$ et $n^2+1 \sim_{+\infty} n^2$, et donc

$$\frac{(-1)^n + n}{n^2+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum_n u_n$ est divergente.

6. Il suffit de remarquer que, pour $n \geq 2$, $n! \geq 2^{n-1}$ (ceci se démontre aisément par récurrence par exemple). On en déduit que

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Par comparaison à une série géométrique convergente, la série converge.

7. Il est facile de vérifier que $3^n + n^4 \sim_{+\infty} 3^n$ et que $5^n - 2^n \sim_{+\infty} 5^n$. On en déduit que

$$\frac{3^n + n^4}{5^n - 2^n} \sim_{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Par comparaison à une série géométrique convergente (tout est positif), on en déduit que la série converge.

8. Il est facile de vérifier que $u_n \sim_{+\infty} \frac{n}{2^n}$. Or la série $\sum \frac{n}{2^n}$ converge. En effet, par croissance comparée des polynômes et des puissances, on sait que

$$\frac{n}{(1.5)^n} \leq 1$$

pour n assez grand, et donc que

$$\frac{n}{2^n} \leq \left(\frac{1.5}{2}\right)^n.$$

Puisque $1.5/2 < 1$, on sait que $\sum \left(\frac{1.5}{2}\right)^n$ est convergente. On peut aussi utiliser la règle de D'Alembert pour prouver la convergence de la série de terme général $v_n = \frac{n}{2^n}$. En effet, $v_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{2n} \to 1/2 < 1.$$

9. On sait que

$$\frac{\sqrt{n}}{\ln(n^2+1)} = \frac{\sqrt{n}}{2\ln(n) + \ln(1+n^{-2})} \to +\infty.$$

En particulier, pour n assez grand,

$$\frac{1}{\ln(n^2+1)} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, il en est de même de $\sum \frac{1}{\ln(n^2+1)}$.

Exercice 9 Discuter, suivant la valeur des paramètres, la convergence des séries suivantes :

1. $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}$, $a, b \in \mathbb{R}$ **2.** $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - a - \frac{b}{n}$, $a, b \in \mathbb{R}$. **3.** $\frac{1}{an+b} - \frac{c}{n}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$

Exercice 10 Déterminer $\lim\limits_{a \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

Exercice 11 Soit $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n} \int_0^1 t^n f(t) dt$ est convergente.

Exercice 12 Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{\sin n^2}{n^2}$ **2.** $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ **3.** $u_n = \frac{\cos(n^2 \pi)}{n \ln n}$

1. On réalise un développement limité du terme général :

$$e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} = (1-a) + \frac{1-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $a \neq 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \to (1-a) \neq 0$ et la série diverge. Si $a = 1$ et $b \neq 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \sim_{+\infty} \frac{1-b}{n}$ et la série diverge. Si $a = 1$ et $b = 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série converge.

2. Avec un raisonnement similaire, en notant u_n le terme général,

$$u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - a - \frac{b}{n} = (1-a) - \frac{b}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $a \neq 1$, alors $u_n \to 1 - a \neq 0$ et la série diverge (grossièrement). Si $a = 1$ et $b \neq 0$, alors $u_n \sim_{+\infty} \frac{-b}{n}$ et par comparaison à une série de Riemann divergente, la série diverge. Si $a = 1$ et $b = 0$, alors $u_n \sim_{+\infty} \frac{-1}{2n^2}$ et par comparaison à une série de Riemann convergente, la série converge. Dans ce cas, la série converge donc si et seulement si $a = 1$ et $b = 0$.

3. Remarquons d'abord que si $b = 0$, alors le terme général de la série est $\left(\frac{1}{a} - c\right)\frac{1}{n}$ et donc que la série converge si et seulement si $ac = 1$. Supposons maintenant $b \neq 0$. Si $a = 0$, le terme général de la série tend vers $\frac{1}{b} \neq 0$ et donc la série diverge grossièrement. On peut donc supposer que $a =\neq 0$. Dans ce cas, un développement limité donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n} &= \frac{1}{an}\left(\frac{1}{1+\frac{b}{an}}\right) - \frac{c}{n} \\ &= \frac{1}{an}\left(1 - \frac{b}{an}\right) - \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a} - c\right)\frac{1}{n} - \frac{b}{a^2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Si $ac \neq 1$, alors le terme général est équivalent à $\left(\frac{1}{a} - c\right)\frac{1}{n}$ et donc on a divergence par comparaison à une série de Riemann divergente. Si $ac = 1$, alors le terme général est équivalent à $\frac{b}{a^2n^2}$ et on a convergence par comparaison à une série de Riemann convergente.
En résumé, on a convergence si et seulement si $ac = 1$.

Posons, pour $a > 0$, $S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$. Cette quantité est bien définie car on a affaire à une série à terme positif dont le terme général est équivalent à $\frac{a}{n^2}$. La fonction $x \mapsto \frac{a}{x^2+a^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit, par comparaison à une intégrale, que

$$\int_1^{N+1} \frac{a}{a^2+x^2} dx \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{n^2+a^2} \leq \int_0^N \frac{a}{a^2+x^2} dx.$$

On calcule ces intégrales et on trouve

$$\arctan\left(\frac{N+1}{a}\right) - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{n^2+a^2} \leq \arctan\left(\frac{N}{a}\right).$$

On fait tendre N vers $+\infty$ et on trouve

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \leq S(a) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

On va montrer que cette série est absolument convergente. Puisque f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée par M, et on a :

$$|u_n| \leq \frac{M}{n} \int_0^1 t^n dt \leq \frac{M}{n(n+1)}.$$

La série de terme général (u_n) est absolument convergente.

1. On a :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n^2},$$

et la série converge absolument.

2. La série est alternée, et le module du terme général décroît vers 0 à partir d'un certain rang : la série converge par application du critère des séries alternées.

3. Il s'agit d'une série alternée bien cachée. En effet, n^2 a la parité de n, et $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Le terme général vaut donc $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$. La série converge par application immédiate du critère spécial des séries alternées.

Exercice 13

1. Démontrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

1. Ceci est une conséquence directe du critère des séries alternées. La série est alternée, et la valeur absolue du terme général décroît vers zéro.
2. On écrit que

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

3. Notons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $w_n = -\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$. Notons U_n, V_n, W_n leurs sommes partielles respectives. Alors (V_n) est convergente (par le critère des séries alternées), (W_n) est divergente (puisque $w_n \sim \frac{-1}{n}$). Donc (U_n) est somme de d'une suite convergentes et d'une suite divergente. Elle est donc divergente. Autrement dit, la série de terme général u_n est divergente.
4. Bien que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim_{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, l'une des deux séries converge et l'autre diverge. Dans le théorème de comparaison de deux séries, on ne peut donc pas se passer de l'hypothèse que les termes généraux gardent le même signe. Une autre conclusion est que $u_n = (-1)^n a_n$, avec $a_n \geq 0$, (a_n) tend vers 0, et pourtant $\sum_n u_n$ diverge. Dans le critère des séries alternées, on ne peut donc pas se passer de l'hypothèse (a_n) décroit.

Exercice 14 Déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$, $x \in]-1,1[$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}$

Exercice 15 On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.

1. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
2. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que : $n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n}n^n e^{-n}$.

Exercice 16 On considère une suite (u_n) donnée par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}u_n$ pour $n \geq 1$.

1. Démontrer que (u_n) converge.
2. On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = \ln\left(n^{1/3}u_n\right)$.
   a) Démontrer que $v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   b) En déduire que la série de terme général $(v_{n+1} - v_n)$ converge.
   c) En déduire que la suite (v_n) converge. On notera λ sa limite.
3. Donner un équivalent simple de (u_n). La série de terme général u_n est-elle convergente ?
4. La série de terme général $(-1)^n u_n$ est-elle convergente ?

Exercice 17 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On fixe $\beta \in \mathbb{R}$ et on pose

$$v_n = \ln\left((n+1)^\beta u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\beta u_n\right).$$

1. Pour quel(s) $\beta \in \mathbb{R}$ y a-t-il convergence de la série de terme général v_n ?
2. En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^\star$ pour lequel $u_n \sim_{+\infty} An^\alpha$.

On écrit que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

On dérive cette égalité (on a bien une somme finie) :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

On multiplie par $x \in]-1,1[$, puis on fait tendre n vers l'infini. On trouve que

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = x\frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \to \frac{x}{(1-x)^2}$$

(on a utilisé que $nx^n \to 0$). Ceci prouve à la fois la convergence de la série et le fait que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

1. La première somme ne pose pas de problèmes :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n!}+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}+e=2e.$$

2. La deuxième somme est plus compliquée à cause du terme en n^2. Pour qu'il se simplifie bien avec le $n!$, le plus commode est de l'écrire

$$n^2=n(n-1)+n$$

de sorte que

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^2-2}{n!}=\sum_{n\geq 2}\frac{n(n-1)}{n!}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}-2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}=e+e-2e=0.$$

3. La méthode est similaire. Dit de façon algébrique, on va décomposer le polynôme X^3 dans la base $1,X,X(X-1),X(X-1)(X-2)$. En raisonnant d'abord avec le terme de plus haut degré, puis celui juste après, etc..., on trouve :

$$X^3=X(X-1)(X-2)+3X(X-1)+X.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{n^3}{n!}&=\sum_{n\geq 1}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}+3\sum_{n\geq 1}\frac{n(n-1)}{n!}+\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n!}\\&=\sum_{n\geq 3}\frac{1}{(n-3)!}+\sum_{n\geq 2}\frac{3}{(n-2)!}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}\\&=5e.\end{aligned}$$

1. On écrit $\sum_{n=1}^N y_n = x_{N+1} - x_1$ (la somme est télescopique). Ainsi, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=1}^N y_n)$ converge si et seulement si la suite (x_N) converge.

2. Un petit calcul prouve que :

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

On effectue un développement limité de v_n -il faut pousser le développement du logarithme jusqu'à l'ordre 3 - et on a :

$$v_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général v_n est donc convergente.

3. On écrit $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. Puisque la série $\sum_n v_n$ converge, d'après la première question la suite $\big(\ln(u_n)\big)$ converge vers un réel l, et en passant à l'exponentielle, on trouve que la suite (u_n) converge vers le réel e^l qui est strictement positif. Revenant à la définition de (u_n), ceci donne le résultat avec $C = e^{-l}$.

1. Par une récurrence immédiate, on remarque d'abord que la suite (u_n) est une suite de réels positifs. Ensuite, on a $u_{n+1}/u_n = (3n-1)/3n < 1$. La suite (u_n) est donc décroissante, et minorée, donc convergente.

2.

2.1. On écrit, en tenant compte des propriétés algébriques du logarithme, que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln\Big((n+1)^{1/3}u_{n+1}\Big) - \ln\Big(n^{1/3}u_n\Big) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)^{1/3}u_{n+1}}{n^{1/3}u_n}\right) \\ &= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}\frac{3n-1}{3n}\right) \\ &= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right). \end{aligned}$$

On conclut ensuite en utilisant le développement limité du logarithme :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{3n} - \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{2}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

2.2. On a $v_{n+1} - v_n \sim_{+\infty} \frac{-2}{9n^2}$. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_n (v_{n+1} - v_n)$ est convergente.

2.3. C'est classique! On passe d'une série télescopique à une suite. Pour $N \geq 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N-1}(v_{n+1} - v_n) = v_N - v_0.$$

Puisque la suite $\left(\sum_{n=1}^{N}(v_{n+1} - v_n)\right)_N$ est convergente, il en est de même de la suite $(v_N)_N$.

3. On a $\ln(n^{1/3}u_n)$ qui tend vers λ. Par composition des limites et par continuité de la fonction exponentielle en λ, $n^{1/3}u_n$ tend vers e^λ. Ainsi, $u_n \sim_{+\infty} \frac{e^\lambda}{n^{1/3}}$. Par comparaison à une série de Riemann divergente, la série de terme général (u_n) n'est pas convergente.

4. La suite (u_n) est décroissante (on l'a déjà remarqué à la première question). De plus, l'équivalent obtenu à la question précédente nous dit que (u_n) tend vers 0. Ainsi, on peut appliquer le critère des séries alternées et conclure que la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente.

1. On va faire un développement limité de v_n. Pour cela, on l'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \beta \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \frac{\alpha+\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

La série de terme général v_n converge donc si et seulement si $\beta = -\alpha$.

2. On choisit donc $\beta = -\alpha$ et on remarque que la somme partielle de la série de terme général v_n correspond à une somme télescopique de $\ln(n^\beta u_n)$. En effet, on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \ln(n^\beta u_n) - \ln(u_1).$$

Puisque la série de terme général v_n converge, on en déduit que la suite $\big(\ln(n^\beta u_n)\big)$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$. Par composition des limites, $(n^\beta u_n)$ converge vers $A = e^l$. Autrement dit, $u_n \sim_{+\infty} A n^\alpha$.