MPSI2

Familles sommables - exercices

Exercice 1 Démontrer que pour $|q| < 1$, la famille $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et déterminer sa somme.

Exercice 2 Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1. $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$;
2. $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

Exercice 3 On pose, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $a_{m,n} = \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre donné.
Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4 Soit $(a_p)_{p\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_p a_p$ est absolument convergente.
On pose $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour $(n,p) \in I$, on pose $u_{n,p} = \frac{p}{n(n+1)}a_p$ si $p \leq n$, $u_{n,p} = 0$ sinon.
Démontrer que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 5 Démontrer l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Exercice 6 Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}$.

Corrigé

Écrivons que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_-^* \cup \mathbb{N}$. Démontrer la sommabilité de la famille $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ revient à démontrer la sommabilité des deux familles $(q^{|n|})_{n\geq 0}$ et $(q^{|n|})_{n<0}$. Puisque $\mathbb{Z}_-^*$ et $\mathbb{N}$ peuvent être facilement mis en bijection avec $\mathbb{N}$, il s'agit de démontrer que les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ et $\sum_{n\geq 1} q^{|-n|}$ convergent absolument. C'est bien le cas puisqu'on a deux séries géométriques de raison dont le module est strictement inférieur à 1. Pour la somme, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{|n|} &= \sum_{n\geq 0} q^n + \sum_{n\geq 1} q^n \\ &= 2\sum_{n\geq 0} q^n - 1 \\ &= \frac{2}{1-q} - 1 = \frac{1+q}{1-q}.\end{aligned}$$

1. Il y a une infinité de termes dans $\mathbb{Q}\cap[1,2]$. En particulier, il y a une infinité de termes de la famille qui sont supérieurs à $1/4$. Ceci entraîne que la famille n'est pas sommable, ce qu'on peut retrouver en utilisant la définition. Si chaque somme finie de la série était majorée par M, il suffirait de prendre un ensemble fini F de $\mathbb{Q}\cap[1,2]$ contenant strictement plus de $4M$ éléments pour obtenir

$$\sum_{x\in F}\frac{1}{x^2}>M,$$

ce qui est une contradiction.

2. Si la famille était sommable, toute sous-famille serait sommable. Prenons $I=\{(n+1,n);\ n\in\mathbb{N}\}$. La famille $(a_{n,m})_{(n,m)\in I}=(a_{n+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ serait donc sommable. Ceci serait équivalent à la convergence de la série

$$\sum_n a_{n+1,n}=\sum_n\frac{1}{2n+1}.$$

Cette dernière série n'étant pas convergente, la famille n'est pas sommable.

Notons $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour $p \geq 2$, $I_p = \{(m,n) \in I ; m+n = p\}$. Alors $(I_p)_{p\geq 2}$ est une partition de I. De plus, I_p a pour cardinal $p-1$ et on a donc

$$\sum_{i \in I_p} a_i = \frac{p-1}{p^\alpha}.$$

Par le théorème de sommation par paquets, la convergence de la série $\sum_i a_i$ est équivalent à la convergence de la série $\sum_p \left(\sum_{i \in I_p} a_i\right) = \sum_p \frac{p-1}{p^\alpha}$. Par comparaison à une série de Riemann, cette dernière série converge si et seulement si $\alpha > 2$. La famille est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

Par le théorème de permutation des sommes, il suffit de prouver que, pour tout $p \geq 1$, la série $\sum_n |u_{n,p}|$ est convergente, et que la série $\sum_p \left(\sum_{n\geq 1} |u_{n,p}|\right)$ est convergente. Soit donc $p \geq 1$. Alors :

$$\sum_{n\geq 0} |u_{n,p}| = \sum_{n\geq p} \frac{p|a_p|}{n(n+1)} = p|a_p| \sum_{n\geq p} \frac{1}{n(n+1)} = |a_p|$$

où la dernière égalité vient de l'écriture $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et du fait qu'on réalise une somme télescopique. La série $\sum_n |u_{n,p}|$ est donc bien convergente de somme $|a_p|$. Puisque la série $\sum_p a_p$ est absolument convergente, on a bien prouvé que la famille était sommable et sa somme est précisément la somme de la série $\sum_p a_p$.

On doit montrer la sommabilité de la famille et calculer sa somme. Pour cela, il suffit de prouver que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_p \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge, puis que la série $\sum_q \sum_{p\geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$. La somme de la famille sera alors égale la somme de cette dernière série.
Mais, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}$$

et donc

$$\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{N+q^2+1}.$$

On en déduit la convergence de la série $\sum_p \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ et de plus

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{q^2}.$$

Ceci est le terme général d'une série convergente, et on a

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q\geq 1} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On va permuter l'ordre des séries. Pour cela, il suffit de prouver que la famille $(\frac{1}{k!})_{(n,k)\in I}$ où $I=\{(n,k)\in\mathbb{N}^2;k\geq n\}$ est sommable. S'agissant d'une famille dont tous les termes sont positifs, il suffit de vérifier que la série

$$\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n\leq k}\frac{1}{k!}\right)$$

converge (remarquons qu'à l'intérieur, la somme est finie). Mais,

$$\left(\sum_{n\leq k}\frac{1}{k!}\right)=\frac{k+1}{k!}$$

qui est le terme général d'une série convergente, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k\geq 0}\frac{(k+1)}{k!}=2e.$$

Exercice 7 Calculer les sommes suivantes, après en avoir justifié l'existence.

1. $\displaystyle\sum_{p,q\geq 0} \frac{z^p}{q!}$, $|z|<1$ **2.** $\displaystyle\sum_{p,q\geq 0} \frac{a^p b^q}{p!q!}$ **3.** $\displaystyle\sum_{p,q\geq 0} \frac{q^p z^p}{p!q!}$ **4.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$, $|z|<1$

Exercice 8

1. Déterminer, pour $\alpha > 1$, un équivalent de $\displaystyle R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

2. En déduire les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.

3. Retrouver ce résultat d'une autre façon, en démontrant de plus que pour ces valeurs de α,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Exercice 9 Les familles suivantes sont-elles sommables ?

1. $\displaystyle\left(\frac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n,p\geq 2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ **2.** $\displaystyle\left(\frac{1}{np(n+p)}\right)_{n,p\geq 1}$ **3.** $\displaystyle\left(\frac{1}{a^p+b^q}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$, $a,b>0$.

Exercice 10 Soit $x \in]-1,1[$.

1. Démontrer que la famille $(x^{kl})_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$ où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

1. On a $\frac{z^p}{q!} = z^p \times \frac{1}{q!}$ et donc on voit apparaître une famille sommable "produit". Puisque la famille $(z^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est sommable et que la famille $(\frac{1}{q!})_{q\in\mathbb{N}}$ est sommable, il en est de même de la famille initiale et

$$\sum_{p,q\geq 0} \frac{z^p}{q!} = \left(\sum_{p\geq 0} z^p\right)\left(\sum_{q\geq 0} \frac{1}{q!}\right) = \frac{e}{1-z}.$$

2. On raisonne exactement de la même façon et on trouve

$$\sum_{p,q\geq 0} \frac{a^p b^q}{p!q!} = \left(\sum_{p\geq 0} \frac{a^p}{p!}\right)\left(\sum_{q\geq 0} \frac{b^q}{q!}\right) = e^a e^b.$$

3. On commence par montrer la sommabilité de la famille en utilisant le théorème de permutation des sommes. On a, pour $q \geq 0$,

$$\sum_{p\geq 0} \frac{q^p |z|^p}{p!} = \exp(q|z|) = \big(\exp(|z|)\big)^q.$$

Cela entraîne que

$$\sum_{q\geq 0}\sum_{p\geq 0} \frac{q^p |z|^p}{q!p!} = \sum_{q\geq 0} \frac{\big(\exp(|z|)\big)^q}{q!} = \exp(\exp(|z|)).$$

Ceci prouve que la famille est sommable. Reprenant le même calcul mais sans les modules, on trouve

$$\sum_{p,q\geq 0} \frac{q^p z^p}{q!p!} = \exp(\exp(z)).$$

Puisque $|z| < 1$, on peut écrire par sommation géométrique

$$\frac{1}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}.$$

Tout entier naturel non nul p s'écrit de façon unique sous la forme

$$p = 2^n(2k+1) \text{ avec } n, k \in \mathbb{N}.$$

On peut donc affirmer que $\mathbb{N}^*$ est la réunion des ensembles deux à deux disjoints suivants

$$A_n = \left\{2^n(2k+1) \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Puisque la famille $(z^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, on peut sommer par paquets et écrire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m\in A_n} z^m = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}.$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z}.$$

1. C'est très classique, il suffit de comparer à une intégrale. En effet, pour $k \geq 2$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

En sommant cette inégalité pour k allant de $n+1$ à $+\infty$, et en calculant les intégrales résultantes, on trouve

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

et donc

$$R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

2. Pour que la série à l'intérieur converge, il est nécessaire et suffisant que $\alpha > 1$. On a alors trouvé un équivalent de cette somme, et pour que la série à l'extérieur converge, il est alors nécessaire et suffisant que $\alpha > 2$. On peut donc donner un sens à cette expression si et seulement si $\alpha > 2$.

3. Comme les termes de la famille sont positifs, démontrer que cette expression a un sens revient à prouver que la famille est sommable, ou encore que l'on peut donner un sens à la double somme "permutée", c'est-à-dire à

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n<k} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Mais la somme à l'intérieur vaut $\frac{1}{k^{\alpha-1}}$ et on est ramené à l'étude de la série $\sum_k \frac{1}{k^{\alpha-1}}$ qui converge si et seulement si $\alpha > 2$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n<k} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

1. Remarquons d'abord que si $\alpha \leq 0$, alors $\frac{1}{n^{\alpha p}} \geq 1$, ce qui empêche la famille d'être sommable. Supposons donc $\alpha > 0$. On va utiliser le théorème de permutation des sommes. On commence par remarquer que

$$\sum_{p\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha p}} = \frac{\frac{1}{n^{2\alpha}}}{1-\frac{1}{n^{\alpha}}} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$ et donc la famille est sommable si et seulement si $\alpha > 1/2$.

2. On va utiliser le théorème de permutation des sommes. Soit $n \geq 1$. Alors on a

$$\frac{1}{p(n+p)} = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+n}\right).$$

On a donc une série télescopique et

$$\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p(n+p)} = \frac{1}{n}\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Il s'agit donc maintenant d'étudier la convergence de

$$\sum \frac{1}{n^2}\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

En utilisant l'estimation bien connue

$$1+\cdots+\frac{1}{n} \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$$

on obtient

$$\frac{1}{n^2}\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

et puisque $\frac{\ln(n)}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, la série est convergente. Donc la famille est sommable.

3. On commence par remarquer que si $a \leq 1$, la famille n'est pas sommable. En effet, la sous-famille $(\frac{1}{a^p+b^q})_{(p,q)\in I}$ où $I = \{(p,1) :\ p \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas sommable puisque la série

$$\sum \frac{1}{a^p+1}$$

n'est pas convergente. De même, si $b \leq 1$, la famille n'est pas sommable. On peut donc supposer $a > 1$ et $b > 1$. Dans ce cas, puisque $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ pour tout $x, y \geq 0$ (développer $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$), on sait que

$$\frac{1}{a^p+b^q} \leq \frac{1}{2a^{p/2}b^{q/2}}.$$

Mais

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}} \frac{1}{a^{p/2}b^{q/2}} = \left(\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{a^{p/2}}\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} \frac{1}{b^{q/2}}\right) < +\infty$$

puisque $\sqrt{a}, \sqrt{b} > 1$. Finalement, on a prouvé que la famille est sommable.

1. Il suffit, par le théorème de permutation des sommes, de démontrer que, pour chaque $k \geq 1$, la série $\sum_l |x|^{kl}$ converge, et que la série $\sum_k \sum_{l\geq 1} |x|^{kl}$ est aussi convergente. Mais, puisque $|x| < 1$, la première série converge, de somme

$$\sum_{l\geq 1} x^{kl} = \frac{|x|^k}{1-|x|^k}.$$

Maintenant,

$$\frac{|x|^k}{1-|x|^k} \sim_{k\to+\infty} |x|^k$$

et donc la série $\sum_{k\geq 1} \frac{|x|^k}{1-|x|^k}$ est convergente.

2. Calculons de deux façons différentes la somme de la famille sommable. D'une part, en procédant par sommation successive comme dans la question précédente, on a

$$\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} x^{kl} = \sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{1-x^k}.$$

D'autre part, posons, pour $n \geq 1$, $I_n = \{(k,l);\ k\cdot l = n\}$. Alors on a aussi

$$\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} x^{kl} = \sum_{n\geq 1} \sum_{(k,l)\in I_n} x^{kl} = \sum_{n\geq 1} \mathrm{card}(I_n) x^n.$$

Mais le cardinal de I_n est justement le nombre de diviseurs de n (on peut choisir pour k n'importe quel diviseur positif de n, et ceci définit aussi uniquement l).

Exercice 11 Démontrer que la famille $(u_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}^2}$ définie par, pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $u_{p,q}=\dfrac{1}{p!q!(p+q+1)}$ est sommable. Calculer sa somme.

Exercice 12 Justifier $\displaystyle\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{3}{4p^2}$. En déduire $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}\neq\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}$

Qu'en déduire ?

Exercice 13 On pose $a_{p,q}=\dfrac{2p+1}{p+q+2}-\dfrac{p}{p+q+1}-\dfrac{p+1}{p+q+3}$. Calculer $\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}a_{p,q}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}a_{p,q}$.

Qu'en déduire ?

Exercice 14 Soit $r\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Justifier l'existence et calculer : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}e^{in\theta}$

Commençons par remarquer que, pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $u_{p,q}\geq 0$. Pour $p\in\mathbb{N}$ (provisoirement fixé), la série $\sum_q u_{p,q}$ est sommable. En effet,

$$u_{p,q}\leq \frac{1}{p!}\times\frac{1}{q!}$$

et la série de terme général $\frac{1}{q!}$ est sommable. Posons alors

$$s_p=\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\leq\frac{1}{p!}\sum_{q=0}^{+\infty}\leq\frac{e}{p!}.$$

Ceci prouve que la série $\sum_p s_p$ est sommable, et par le théorème de sommation par paquets, la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.
Pour calculer la somme de cette série, on va utiliser une autre façon de former les paquets. Pour cela, pour $n\geq 0$, on pose

$$I_n=\{(p,q)\in\mathbb{N}^2:\ p+q=n\}$$

et on remarque que $\mathbb{N}^2=\bigcup_{n=0}^{+\infty}I_n$. D'autre part, pour $n\geq 0$ fixé, on a

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in I_n}u_{p,q}&=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!(n-p)!(n+1)}\\&=\frac{1}{n!(n+1)}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\\&=\frac{2^n}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Par le théorème de sommation par paquets, la somme de la famille sommable vaut alors

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}u_{p,q}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\\&=\frac{1}{2}(e^2-1).\end{aligned}$$

La série converge compte tenu des critères usuels.

$$\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right).$$

Par télescopage :

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2p}\right).$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^2-p^2}=-\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p-1}+\cdots+1+\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{2p-1}\right)$$

donc

$$\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}\right)=\frac{3}{4p^2}$$

puis

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2}>0.$$

Cependant

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{4n^2}=-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2}$$

donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}\neq\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}.$$

On en déduit que la familles des $1/(n^2-p^2)$ avec $(p,n)\in\mathbb{N}^{*2}$, $p\neq n$ n'est pas sommable.

D'une part $\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 0$ donc $\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 0$.
D'autre par $\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$ donc $\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = 1$.
La formule de Fubini ne s'applique pas, la famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ n'est donc pas sommable.

Étudions la sommabilité de $\left(\left|r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right|\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.
On peut décomposer

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-^*.$$

La sous-famille $\left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable car la série géométrique $\sum r^n$ converge.
De même, la sous-famille $\left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}_-^*}$ est sommable.

Par sommation par paquets $\left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
La somme étudiée existe donc et en sommant par paquets

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}_-^*} r^{-n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 1 + \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \frac{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

Exercice 15 Soient $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tels que $|a|<1$ et $|b|<1$. Prouver que

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{(1-a)(1-b)} & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a\neq b, \\ \dfrac{1}{(1-a)^2} & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n & \text{si } a=b. \end{array}\right.$$

Exercice 16 Soit a un complexe de module strictement inférieur à 1. En introduisant la famille de nombres $u_{p,q}=a^{p(2q-1)}$ (pour $p,q\geq 1$), établir l'identité $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{a^p}{1-a^{2p}}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}$

Exercice 17 Pour $n \geq 0$, on pose $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$.

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

Exercice 18 Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$

Exercice 19 Etablir que c $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$ avec $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 20 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille sommable. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$.
Montrer que la famille $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et exprimer sa somme en fonction de celle la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 21 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir que $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ f(x)f(y) = f(x+y)$. La fonction f est en fait la fonction exponentielle...

L'exercice repose sur la définition de l'exponentielle par une série : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

1. Pour chaque $n \geq 0$, w_n est positif et satisfait

$$w_n \leq 2^{-n} \exp(4).$$

   Puisque la série de terme général $2^{-n} \exp(4)$ est convergente, il en est de même de la série de terme général w_n.
2. Écrivons le produit de Cauchy de $\sum_{k \geq 0} \frac{b^k}{k!}$ par $\sum_{k \geq 0} a^k$, où a et b sont des réels avec $|a| < 1$. Ces deux séries sont absolument convergentes, et on a :

$$\exp(b) \times \frac{1}{1-a} = \left(\sum_{k \geq 0} \frac{b^k}{k!}\right) \times \left(\sum_{k \geq 0} a^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

   où u_n est défini par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(b/a)^k}{k!}.$$

   Pour $a = 1/2$ et $b = 2$, on trouve $w_n = u_n$. Ainsi, on a

$$\sum_{n \geq 0} w_n = \exp(2) \times \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \exp(2).$$

Par produit de Cauchy de série convergeant absolument

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\frac{1}{3^{n-k}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{3^m}\right) = \frac{9}{4}.$$

Par produit de Cauchy de séries convergeant absolument

$$\mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{(-1)^{k-1}}{k.k!}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{(-1)^{k-1}}{k.k!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Il reste à montrer par récurrence sur $n\geq 1$ que

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

ce qui se fait par

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{n+1}\binom{n+1}{k}=\frac{1}{n+1}-\frac{(1-1)^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

On a

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \times \frac{1}{2^{n-k}}.$$

La série $\sum v_n$ est donc la série produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{2^n}$. Puisqu'elles sont toutes deux absolument convergentes, la série $\sum v_n$ est absolument convergente, donc convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

(a) Pour $x = 0$, la convergence de la série définissant $f(0)$ est immédiate.
Pour $x \neq 0$, la convergence (absolue) de la série définissant $f(x)$ découle de la règle de d'Alembert

$$\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

(b) Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes,

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

On fait apparaître un terme $1/n!$ et un coefficient du binôme pour conclure :

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n = f(x+y) \end{aligned}$$