MPSI2

Fonctions de deux variables

Exercice 1 Représenter les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$f_1(x,y) = \ln(2x+y-2)$ $f_2(x,y) = \sqrt{1-xy}$ $f_3(x,y) = \dfrac{\ln(y-x)}{x}$ $f_4(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \sqrt{4-x^2-y^2}$.

Exercice 2 Représenter les lignes de niveau (c'est-à-dire les solutions (x,y) de l'équation $f(x,y) = k$) pour : $f_1(x,y) = y^2$, avec $k=-1$ et $k=1$ $f_2(x,y) = \frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}$ avec $k=2$.

Exercice 3 Représenter les lignes de niveau des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x+y-1$ **2**. $f(x,y) = e^{y-x^2}$ **3**. $f(x,y) = \sin(xy)$

1. Le logarithme est défini si $2x + y - 2 > 0$. On trouve donc le demi-plan supérieur délimité par la droite d'équation $2x + y - 2 = 0$.
2. $1 - xy \geq 0$ si et seulement si $y \leq 1/x$, dans le cas où $x > 0$, $y \geq \frac{1}{x}$ si $x < 0$. Le domaine de définition est la réunion de :
   - la partie située sous l'hyperbole $y = 1/x$ pour $x > 0$,
   - la partie située au-dessus de l'hyperbole pour $x < 0$,
   - l'axe des ordonnées.
3. Les conditions sont $x \neq 0$ et $y - x > 0$. On trouve donc un demi-plan, auquel on a retiré une (portion de) droite.
4. Les conditions sont cette fois $x^2 + y^2 - 1 > 0$ et $x^2 + y^2 \leq 4$. On trouve donc la couronne située entre les cercles de centre O et de rayon respectifs 1 et 2, le premier cercle n'étant pas dans le domaine, le second si.

1. D'abord, l'équation $y^2 = -1$ n'a pas de solutions, donc la courbe de niveau... est vide. D'autre part, l'équation $y^2 = 1$ admet pour solution les droites $y = 1$ et $y = -1$.
2. L'équation $f(x, y) = 2$ implique

$$(x^2 + y^2)^2 = 16,$$

ce qui, compte tenu du fait que $x^2 + y^2 \geq 0$, donne le cercle

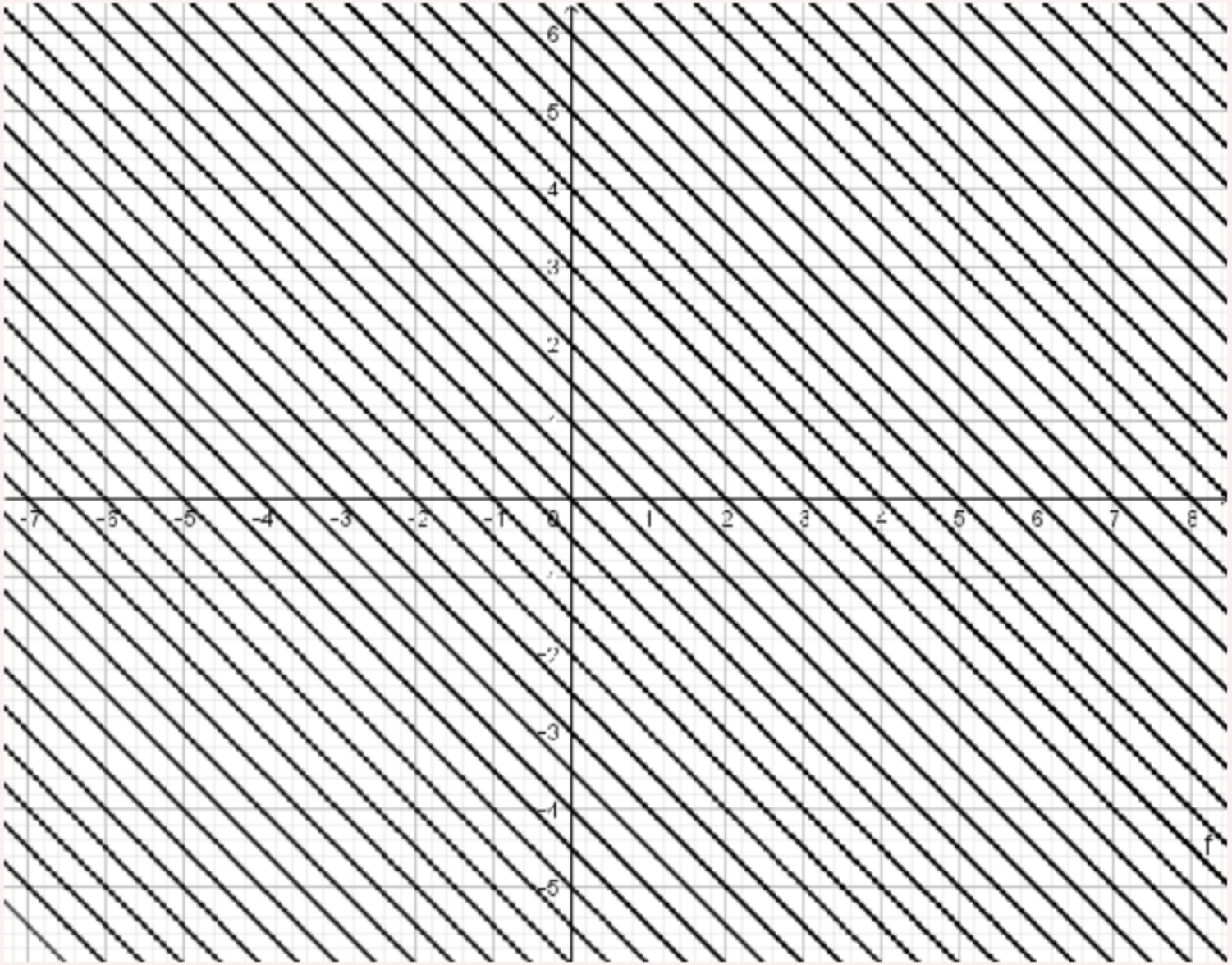
$$x^2 + y^2 = 4,$$

cercle centré à l'origine et de rayon 2. Il faut retirer à ce cercle les points pour lesquels $x^2y^2 = 8$, points pour lesquels la fonction f n'est pas définie. Les points du cercle vérifiant cette relation vérifient aussi

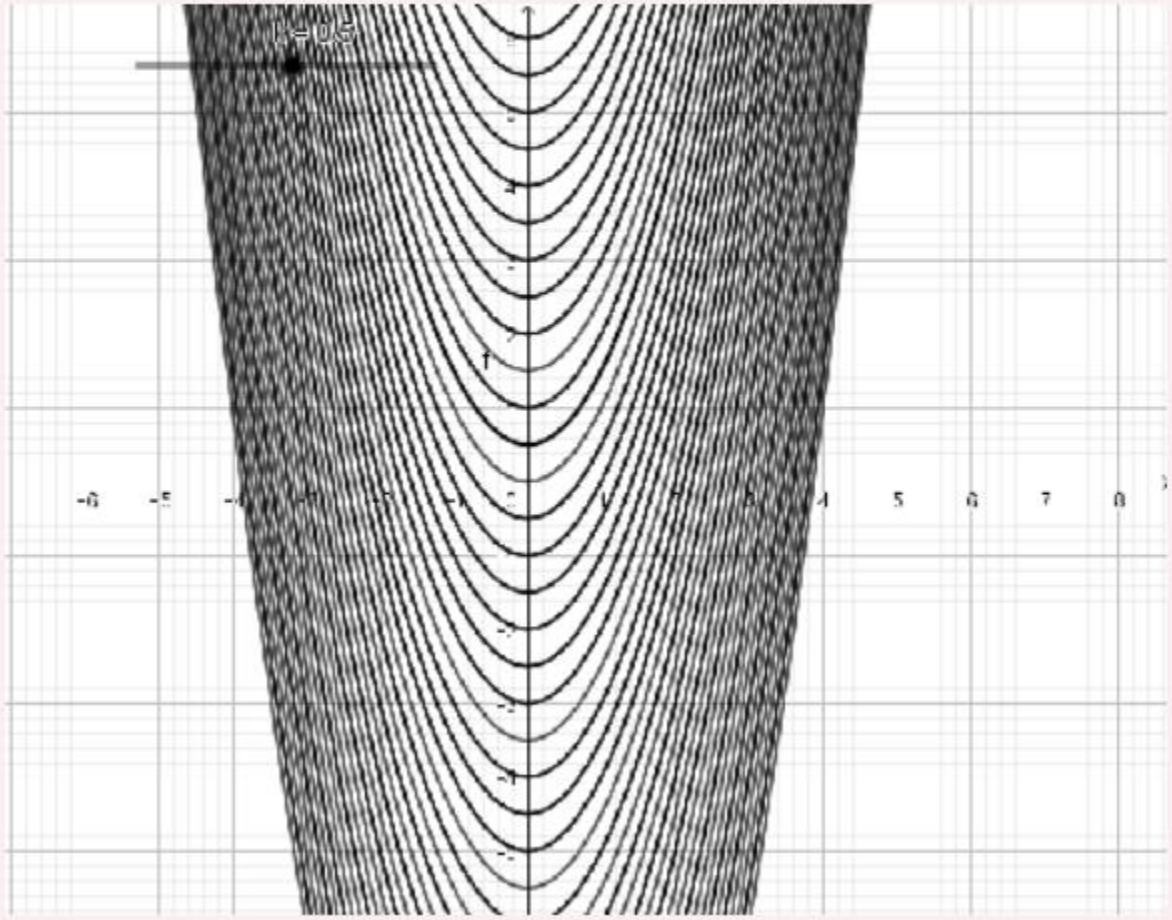
$$x^2 + \frac{8}{x^2} = 4 \implies x^4 - 4x^2 + 8 = 0.$$

Posons $X = x^2$. Alors X vérifie $X^2 - 4X + 8 = 0$. Le discriminant de cette équation est $16 - 4 \times 8 = -16 < 0$. Ainsi, l'équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. La courbe de niveau recherché est bien le cercle de centre l'origine et de rayon 2.

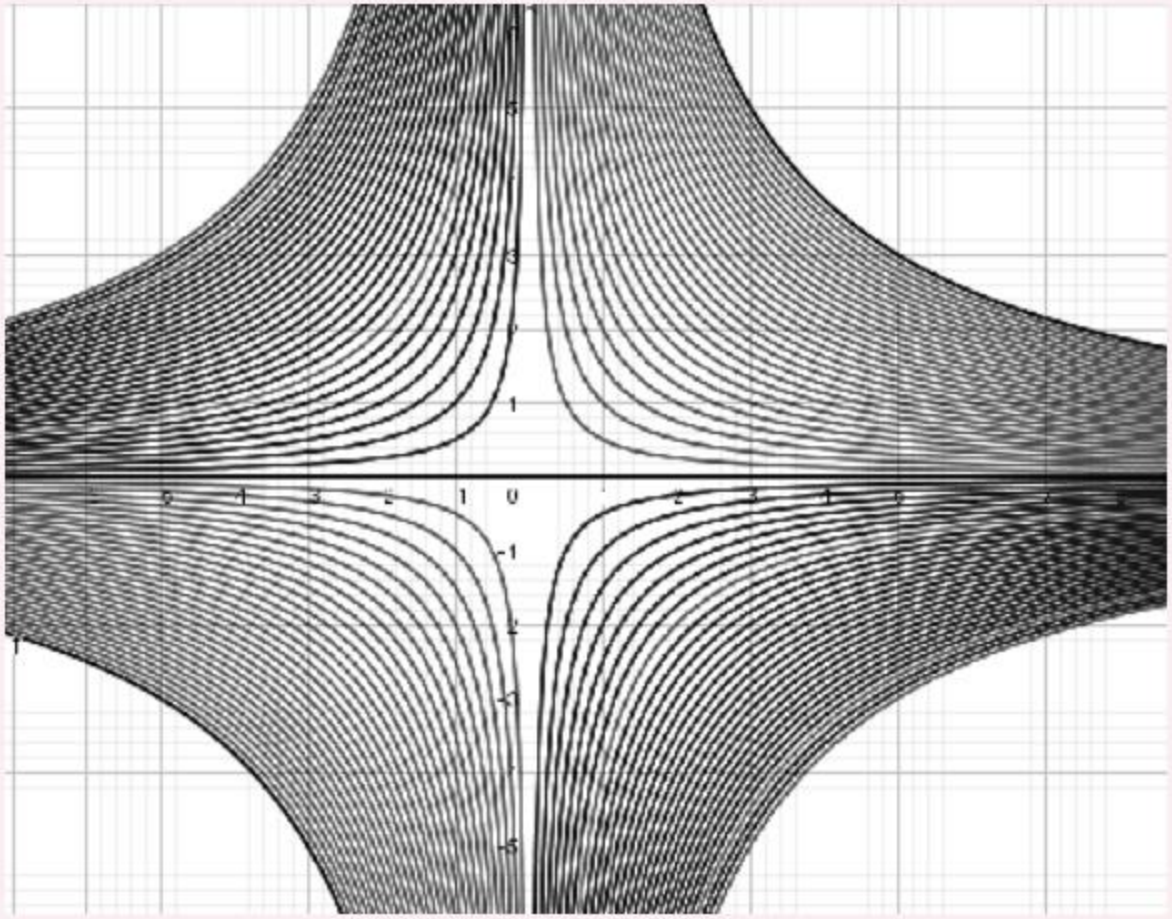
1. Soit $k \in \mathbb{R}$. On a $f(x,y) = k \iff y = 1 - x + k$. Les courbes de niveau de f sont donc les droites $y = 1 - x + k$.



2. Soit $k > 0$ (la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives). On a $f(x, y) = k \iff y - x^2 = \ln(k) \iff y = x^2 + \ln(k)$. Les lignes de niveau sont donc des translatées verticales de la parabole $y = x^2$.



3. Soit $k \in [-1,1]$ (la fonction sinus est à valeurs dans $[-1,1]$) et soit $a \in [0,\pi[$ avec $\sin(a) = k$. On a $f(x,y) = k$ si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $xy = a + 2l\pi$ ou $xy = \pi - a + 2l\pi$. Les courbes de niveau sont donc des hyperboles $y = \lambda/x$, mais deux hyperboles différentes peuvent correspondre à la même valeur de k.



Exercice 4

1. Montrer que si x et y sont des réels, on a : $2|xy| \leq x^2 + y^2$
2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   Montrer que, pour tout (x,y) de A, on a : $|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2$, où $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
   En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 6 Les fonctions suivantes ont-elles une limite (finie) en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

Exercice 7 Soient $\alpha, \beta > 0$.
Déterminer, suivant les valeurs de α et β, si la fonction $f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}$ admet une limite en $(0,0)$.

Exercice 8 Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$
est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 Démontrer que la fonction définie par $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

1. On a :

$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|.$$

2. L'inégalité de la question précédente se réécrit encore encore en

$$|xy| \leq \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}.$$

On en déduit, d'après l'inégalité triangulaire

$$|f(x,y)| \leq \frac{3\|(x,y)\|_2^2 + \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}}{\|(x,y)\|_2} \leq 4\|(x,y)\|_2.$$

Ainsi, si (x,y) tend vers 0, on a $|f(x,y)|$ qui tend vers 0.

On pose $x = y = t$, et on fait tendre t vers 0. On a alors

$$f(t,t) = \frac{1}{2}.$$

En faisant tendre t vers 0, on voit que ceci tend vers 1/2, qui n'est pas 0. La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

1. On a

$$|f(x,y)| \leq |x| + |y|.$$

Puisque $|x| + |y|$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, f admet une limite en $(0,0)$ qui est égale à 0.

2. Non ! On a en effet, pour tout $t > 0$, $f(t,0) = 1$ et $f(0,t) = -1$. Si f admettait une limite en $(0,0)$, alors puisque $\lim_{t \to 0^+} f(t,0) = 1$, cette limite devrait être égale à 1, et puisque $\lim_{t \to 0^+} f(0,t) = -1$, elle devrait aussi être égale à -1, ce qui est une contradiction.

3. Non ! En effet,

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = +\infty$$

et donc f ne peut pas admettre de limite en $(0,0)$.

4. On remarque que, pour tout $t > 0$, $f(t,0) = 0$ alors que $f(t,t) = 1/2$. Puisque $(t,0) \to 0$ et $(t,t) \to 0$ lorsque t tend vers 0, f ne peut pas admettre une limite en $(0,0)$.

5. On va majorer $|f(x,y)|$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Pour cela, on utilise $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$. On en déduit que

$$|f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Puisque $\sqrt{x^2+y^2}$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, on en déduit que f admet pour limite 0 en $(0,0)$.

On va partir des inégalités $|x| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$ et $|y| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$. Ainsi, on a

$$|f(x,y)| \leq (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}.$$

Ainsi, si $\alpha+\beta > 2$, $f(x,y)$ tend vers 0 si (x,y) tend vers $(0,0)$. Dans le cas contraire, alors on remarque que d'une part $f(1/n,0)=0$ et donc si f admet une limite en $(0,0)$, celle-ci ne peut être que nulle. Maintenant, on a

$$f(1/n,1/n) = \frac{1}{2}n^{2-\alpha-\beta}.$$

Ceci ne tend pas vers 0 si $\alpha+\beta \leq 2$, et la fonction f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Posons $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ et $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 1\}$. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{U}$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels f a une expression polynomiale. f est donc continue sur $\mathcal{D}$ et sur $\mathcal{U}$. Il reste donc à vérifier la continuité de f en un point (a,b) tel que $a^2 + b^2 = 1$. Soit (a,b) un tel point et soit (x_n, y_n) une suite qui converge vers (a,b). Soit $n \geq 1$. Si (x_n, y_n) est élément de $\mathcal{U}$, alors $f(x_n, y_n) = 2x_n^2 + y_n^2 - 1$ tandis que si ce n'est pas le cas, $f(x_n, y_n) = x_n^2$. Mais,

$$2x_n^2 + y_n^2 - 1 \to 2a^2 + b^2 - 1 = a^2 \text{ tandis que } x_n^2 \to a^2.$$

On a bien $f(x_n, y_n) \to a^2 = f(a,b)$, et la fonction f est continue en (a,b).

Remarquons déjà que le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Posons de plus $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(u) = \frac{\sin u}{u}$ si $u \neq 0$ et $h(0) = 1$, et posons également $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$. Il est bien connu que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$). g est bien sûr continue, et donc $h \circ g$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Mais, si $(x, y) \in D$, alors $f(x, y) = h \circ g(x, y)$. Ainsi, $h \circ g$ est un (le!) prolongement continu de f à $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x,y) = e^x \cos y$. **2.** $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy)$. **3.** $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$.

Exercice 11 On définit $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}$.

Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$ pour ce prolongement.

Pour tout réel y fixé, la fonction $x \mapsto e^x \cos y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui justifie l'existence de la dérivée partielle par rapport à la première variable dans le premier exemple. La justification est identique pour les autres fonctions et on trouve respectivement :

1. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y.$$

2. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(xy) - y(x^2+y^2)\sin(xy),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cos(xy) - x(x^2+y^2)\sin(xy).$$

3. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{yx^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}.$$

D'une part, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. D'autre part, on a

$$|f(x,y)| \leq (x^2+y^2)^{1/4}.$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0)=0$. Du fait que $f(0,t)=0$ pour tout réel t, f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0,0)$ qui vaut $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. D'autre part, pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = |t|^{-1/2}.$$

Ceci tend vers $+\infty$ si t tend vers 0, et donc f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0,0)$.

Exercice 12 On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et par $f(0,0) = 0$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles par rapport aux deux variables en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et les calculer.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 13 Les applications suivantes $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(0,0) = 0$ sont-elles de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$;
2. $f(x,y) = x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$;
3. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$;
4. $f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
5. $f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercice 14 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = yx^2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^x + 2y. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = xy^2. \end{cases}$

1. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$ par croissance de la fonction racine carrée. Ainsi, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq |y|$$

et $|y|$ tend vers 0 si (x,y) tend vers $(0,0)$. Ainsi, la fonction f est continue en $(0,0)$. Et f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

2. D'abord, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour $(x,y) \neq (0,0)$, posant $u(t) = \frac{ty}{\sqrt{t^2+y^2}}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = u'(x).$$

On calcule $u'(x)$ par les méthodes usuelles, en remarquant que

$$u(t) = \frac{a(t)}{b(t)} \text{ avec } a(t) = ty \text{ et } b(t) = \sqrt{t^2+y^2}.$$

et donc en particulier

$$v'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+y^2}}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\ &= \frac{y(x^2+y^2) - x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Par symétrie du rôle joué par les variables, on a aussi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Pour déterminer si f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en 0, on va revenir à la définition de cette dérivée partielle : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe si la fonction $x \mapsto f(x,0)$ est dérivable en 0, c'est-à-dire si le taux d'accroissement

$$\frac{f(h,0) - f(0)}{h}$$

admet une limite lorsque h tend vers 0. Mais $f(h,0) - f(0,0) = 0$ et donc le taux d'accroissement précédent est identiquement nul. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. Par symétrie, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

3. Il suffit d'étudier si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$. Mais, pour $x > 0$, d'après le calcul effectué auparavant,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{x^3}{(2x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

La dérivée partielle par rapport à la première variable n'est pas continue en $(0,0)$ et f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Il suffit de démontrer que la fonction admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, et que ces dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

1. D'une part, f est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2y^2\frac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

D'autre part, montrons que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$. On a en effet :

$$f(x,0) - f(0,0) = 0,$$

ce qui prouve que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable valant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

De même pour la dérivée partielle par rapport à la seconde variable. Il reste à démontrer que ces dérivées partielles sont continues en $(0,0)$. Mais on a, pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\left|\frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}\right| = 2|xy|\left(\frac{y^2}{(x^2+y^2)}\right)^2 \leq 2|xy|,$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tend vers $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ si (x,y) tend vers $(0,0)$. De même, puisque $2|xy| \leq x^2+y^2$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{1}{4}\left|3x^2+y^2\right|.$$

On remarque d'abord que, dans les 3 cas, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

1. On a

$$|f(x,y)-f(0,0)| \leq |x| \times \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \leq |x|,$$

et $|x| \to 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$. Ainsi, f est continue en $(0,0)$. De plus, un calcul facile montre que, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-4x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

En particulier, pour $t \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t,t) = -1$ tandis que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'a aucune chance d'être continue en $(0,0)$ (alors qu'on n'a même pas étudié l'existence d'une dérivée partielle en $(0,0)$!). Ainsi, f n'est pas de classe C^1.

1. Soit f une solution du système, et soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Posons $g(x) = f(x,y)$. Alors la première relation s'exprime aussi par $g'(x) = xy^2$, soit $g(x) = \frac{1}{2}x^2y^2 + Cte$. Cette constante dépend de y, qui a été fixé le temps d'intégrer la relation. On en déduit l'existence de $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y).$$

Puisque f est C^1, C est également C^1 et la deuxième relation donne

$$C'(y) = 0,$$

c'est-à-dire C est constante. Il existe donc $A \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + A.$$

Réciproquement, une telle fonction est solution du système.

2. On reprend la même méthode, en fixant $y \in \mathbb{R}$ et en posant $g(x) = f(x,y)$. De $g'(x) = e^x y$, on tire $g(x) = e^x y + cte$. Il existe donc une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = e^x y + C(y)$. On dérive cette fois par rapport à y, et on trouve $C'(y) = 2y$, soit $C(y) = y^2 + Cte$. Ainsi, si f est solution, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x,y) = e^x y + y^2 + A.$$

Réciproquement, ces fonctions sont solutions.

3. Si on reprend la méthode des questions précédentes, on observe que si f est solution, il existe une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3y + C(y)$. On dérive par rapport à y, et en utilisant la deuxième relation, on trouve que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$C'(y) = xy^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Or, si y est fixé, le membre de gauche est constant, et le membre de droite est un polynôme de degré 3 en x : ceci est impossible et donc l'équation n'a pas de solutions. On aurait pu aussi remarquer que, si on cherchait une fonction de classe C^2, les dérivées partielles croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne pouvaient pas être égales, contredisant le théorème de Schwarz.

Exercice 15 Pour les fonctions suivantes, démontrer qu'elles admettent une dérivée suivant tout vecteur en $(0,0)$ sans pour autant y être continue.

1. $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 16 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$.
Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$. Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 17 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par $u(x,y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 18 Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées (éventuellement partielles) des fonctions suivantes :

1. $g(x,y) = f(y,x)$. **2.** $g(x) = f(x,x)$. **3.** $g(x,y) = f(y, f(x,x))$. **4.** $g(x) = f(x, f(x,x))$.

1. Prouvons d'abord que f n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, on a

$$f(e^{-n^2}, 1/n) = -1,$$

qui ne tend pas vers 0 si n tend vers l'infini. Fixons maintenant $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, et démontrons que f admet une dérivée suivant (a,b) en $(0,0)$. Soit $t \neq 0$. On a

$$\frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} tb^2\big(\ln|t| + \ln|a|\big) & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque t tend vers 0, ceci tend vers 0 (en particulier, parce que $t\ln|t|$ tend vers 0 en 0). Ainsi, f admet en $(0,0)$ une dérivée suivant le vecteur (a,b) qui est nulle.

2. De même, démontrons que g n'est pas continue en observant que

$$g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0).$$

D'autre part, fixons $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et prouvons que g admet une dérivée suivant (a,b) en $(0,0)$. On a, pour $t \neq 0$,

$$\frac{g(ta,tb) - g(0,0)}{t} = \frac{t^3a^2b}{t \times (t^4a^4 + t^2b^2)} = \frac{a^2b}{t^2a^4 + b^2}.$$

Si $b = 0$, ceci est nul, sinon

$$\frac{g(ta,tb) - g(0,0)}{t} \xrightarrow{t \to 0} \frac{a^2}{b}.$$

Dans tous les cas, on a prouvé que g admet une dérivée en $(0,0)$ suivant le vecteur (a,b) qui vaut $\frac{a^2}{b}$ si $b \neq 0$, et qui vaut 0 si $b = 0$.

1. La fonction $t \mapsto (2+2t, t^2)$ est de classe C^1, car polynômiale, donc g est de classe C^1 par composition. On applique ensuite la formule de la dérivée d'une fonction composée. Si on note $u(t) = 2+2t$ et $v(t) = t^2$, alors

$$g'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)),$$

soit

$$g'(t) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2+2t, t^2) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(2+2t, t^2).$$

2. La fonction $(u, v) \mapsto (uv, u^2+v^2)$ est de classe C^1 car polynômiale, donc h est de classe C^1. Notons $r(u,v) = uv$ et $q(u,v) = u^2+v^2$. Le théorème de dérivation d'une composée dit que

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial x}(r(u,v), q(u,v)) + \frac{\partial q}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial y}(r(u,v), q(u,v)).$$

Ceci donne

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = v\frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2+v^2) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2+v^2).$$

De même on trouve

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = u\frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2+v^2) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2+v^2).$$

Considérons ϕ une primitive de la fonction continue φ. ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $u(x,y) = \phi(x+y) - \phi(x-y)$. Par composition, u est de classe C^1. Par la règle de la chaine, on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \phi'(x+y) - \phi'(x-y) = \varphi(x+y) - \varphi(x-y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \phi'(x+y) + \phi'(x-y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y).$$

1. On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial x},$$

soit

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x),$$

et symétriquement

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x).$$

Pour ceux qui se perdent dans ce calcul formel, poser $u(x,y) = y$ et $v(x,y) = x$, on a $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ et donc

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \dots.$$

2. On a :

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x).$$

3. Notons, pour simplifier, $h(x) = f(x,x)$. On a donc :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = h'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(y,h(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(y,h(x)).$$

De même, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,h(x)).$$

4. Avec les mêmes notations que précédemment, on obtient la somme des quantités précédemment calculées.

Exercice 19 Soit I et J deux intervalles (non réduits à un point) et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

— pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J,

— pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur I.

On fixe $a \in I$ et $b : J \to I$ dérivable.

Justifier que la fonction $\phi : x \mapsto \int_a^{b(x)} f(t,x)dt$ est dérivable sur J et déterminer sa dérivée.

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1.

1. On définit, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(tx,ty)$.
Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

2. On suppose désormais que $f(tx,ty) = tf(x,y)$ pour tous $x,y,t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tous $x,y,t \in \mathbb{R}$, on a $f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)y$.

b) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$f(x,y) = \alpha x + \beta y.$$

L'idée est d'introduire une variable supplémentaire, afin de dissocier la borne d'intégration et le paramètre à l'intérieur de l'intégrale. Pour $(u,v) \in I \times J$, on considère

$$F(u,v) = \int_a^u f(t,v)dt.$$

On va commencer par prouver que $\frac{\partial F}{\partial u}$ existe sur $I \times J$. Pour cela on fixe $v \in J$, et on remarque que $t \mapsto f(t,v)$ est continue sur I. Par le théorème fondamental du calcul intégral, $\frac{\partial F}{\partial u}$ existe et vaut pour tout $(u,v) \in I \times J$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = f(u,v).$$

Étudions maintenant l'existence de $\frac{\partial F}{\partial v}$. Fixons alors $u \in I$, avec par exemple $a \leq u$. Alors, pour tout $t \in [a,u]$, la fonction $v \mapsto f(t,v)$ est dérivable sur $[a,u]$ et sa dérivée est $\frac{\partial f}{\partial v}$. D'autre part, la fonction $(t,v) \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(t,v)$ est continue sur le compact $[a,u] \times K$. Elle est donc bornée sur ce compact et il existe $M > 0$ tel que, pour tout $(t,v) \in [a,u] \times K$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(t,v) \right| \leq M.$$

Puisque la fonction constante égale à M est intégrable sur le segment $[a,u]$, il résulte du théorème de dérivation des intégrales à paramètres que $\frac{\partial F}{\partial v}$ existe et vaut pour tout $(u,v) \in I \times J$,

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \int_a^u \frac{\partial f}{\partial x}(t,v)dt.$$

Pour conclure, on remarque que, pour tout $x \in J$,

$$\phi(x) = F(b(x),x).$$

D'après la règle de la chaîne, ϕ est dérivable sur J et pour tout $x \in J$,

$$\phi'(x) = b'(x)f(b(x),x) + \int_a^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

1. La fonction g est C^1 comme composée de fonctions de classe C^1. On a :

$$g'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty).$$

2.

2.1. On peut alors écrire $g(t) = tf(x, y)$, et le calcul de la dérivée de g donne $g'(t) = f(x, y)$. La comparaison avec l'expression obtenue à la question précédente donne le résultat.

2.2. Il suffit d'appliquer la relation précédente pour $t = 0$. On a $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ avec $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Réciproquement, on vérifie facilement qu'une fonction vérifiant $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ vérifie également $f(tx, ty) = tf(x, y)$.

Exercice 21 On pose $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$.

1. Déterminer les points critiques de f, de g.
2. En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de f.
3. En étudiant les valeurs de g sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de g.

Exercice 22 Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

1. On calcule les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y.$$

Si (x,y) est un point critique de f, il vérifie donc le système

$$\begin{cases} 2x + y &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ est donc le seul point critique de f. Un raisonnement tout à fait similaire montre que $(0,0)$ est aussi le seul point critique de g.

2. Les extrema locaux d'une fonction différentiable ne pouvant être atteints qu'en un point critique, il suffit d'étudier si $(0,0)$ est un extrémum local.

$$f(x,y) = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 1 \geq 1 = f(0,0).$$

Ainsi, $(0,0)$ est un extrémum local, et même global, de f.

3. Ici aussi, il suffit de déterminer la nature de $(0,0)$. On a $g(0,0) = -2$. On a également, pour $x \neq 0$, $g(x,0) = x^2 - 2 > g(0,0)$ et $g(x,-x) = -2x^2 - 2 < g(0,0)$. Ainsi, aussi près de $(0,0)$ qu'on veut, g prend des valeurs (strictement) supérieures et (strictement) inférieures à $g(0,0)$. Ainsi, $(0,0)$ n'est pas un extrémum local de g. Comme $(0,0)$ est le seul point critique de g , g n'admet pas d'extrémum local.

1. On calcule les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y - 6.$$

L'annulation simultanée de ces dérivées partielles donnent les points critiques. On trouve après résolution du système que seul $(0,3)$ est un point critique de f. Posons $u = x$ et $v = y - 3$ pour se ramener en $(0,0)$. Alors

$$f(x,y) = u^2 + uv + v^2 - 9 = (u + v/2)^2 + 3v^2/4 - 9 \geq f(0,3).$$

Ainsi, $(0,3)$ est un minimum local, et même global, de f.

2. On trouve cette fois $(1,1)$ comme unique point critique de f. En posant $u = x - 1$ et $v = y - 1$ (toujours dans l'idée de se ramener en $(0,0)$), on a

$$f(x,y) = u^2 + 2v^2 - 2uv = (u - v)^2 + v^2 \geq f(1,1).$$

Ainsi, $(1,1)$ est un minimum local, et même global, de f.

3. Le seul point critique est $(0,0)$. On a $f(x,0) > 0 = f(0,0)$ si $x > 0$ et $f(x,0) < 0 = f(0,0)$ si $x < 0$. Ainsi, $(0,0)$ n'est pas un extrémum local de f.

4. Posons $u = x - y$, $v = x + y$ et $g(u,v) = u^2 + v^3$. Étudier les extrema locaux de g revient, modulo le changement de variables, à étudier les extrema locaux de f. $(0,0)$ est le seul point critique de g, et puisque $g(0,y) > 0$ si $y > 0$ et $g(0,y) < 0$ si $y < 0$, $(0,0)$ n'est pas un extrémum de g. Donc f n'admet pas d'extrémum local.

La suite des exercices est hors programme.

Exercice 23 Écrire le développement limité à l'ordre 2 en $a = (-1, 2)$ de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 y^3$.

On va utiliser la formule de Taylor-Young. Pour cela, on commence par calculer les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^3,\ \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6xy^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x^2y.$$

On évalue ces dérivées partielles en a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -16,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 16,\ \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = -24,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12.$$

D'après la formule de Taylor-Young, on a donc

$$f(x,y) = -16(x+1) + 12(y-2) + 8(x+1)^2 - 24(x+1)(y-2) + 6(y-2)^2 + o((x+1)^2 + (y-2)^2)$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$f(a+h) = -16h_1 + 12h_2 + 8h_1^2 - 24h_1h_2 + 6h_2^2 + o(h_1^2 + h_2^2).$$

Remarquez bien que les coefficients devant h_1^2 et h_2^2 sont la moitié des dérivées partielles respectives, mais pas celui devant h_1h_2.

Pour résoudre les exercices suivants , vous avez besoin de ce théorème :

Théorème : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^2$.

- si f est différentiable, et si f admet un extremum local en a, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0.$$

  On dit alors que a est un **point stationnaire** ou **point critique** de a.
- si f est de classe C^2, et si a est un point stationnaire de f, on pose

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a),\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a),\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

  On distingue les cas suivants :
  - Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un minimum relatif en a.
  - Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un maximum relatif en a.
  - Si $rt - s^2 < 0$, f n'admet pas d'extremum en a, on parle de **point col**, ou de **point selle**.
  - Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

Exercice 24 Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = y^2 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$;
2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.

Exercice 25 Déterminer les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz-4(x+y+z)$.

Exercice 26 Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$;
2. $f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$;
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$;

Exercice 27 Étudier les extrema locaux et globaux dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f(x,y) = x^2y^2(1+x+2y)$.

1. On commence par chercher les points critiques de f. Pour cela, on calcule les dérivées partielles par rapport à x et à y :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x + 2x^3 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Un point (x,y) est critique si et seulement s'il est solution du système

$$\begin{cases} -2x + 2x^3 &= 0 \\ 2y &= 0. \end{cases}$$

Les seules solutions de ce système sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$. On a donc 3 points critiques et on va étudier la nature de chacun. Pour cela, on calcule les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2 + 6x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

En $(0,0)$, on obtient donc, avec les notations usuelles, $r = -2$, $t = 2$ et $s = 0$, soit $rt - s^2 = -4 < 0$. Le point $(0,0)$ est un point col, ce n'est pas un extrémum local de f. En $(1,0)$, on a $r = 4$, $t = 2$ et $s = 0$, soit $rt - s^2 = 8 > 0$. Le point $(1,0)$ est un extrémum local, c'est même un minimum local puisque $r > 0$. L'étude en $(-1,0)$ donne exactement le même résultat.

2. On procède exactement de la même façon. Cette fois,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x.$$

Un point (x,y) est un point critique si et seulement s'il est solution du système

$$\begin{cases} x^2 - y &= 0 \\ y^2 - x &= 0. \end{cases}$$

Ce système implique $x^4 = x$, soit $x = 0$ ou $x = 1$. On en déduit facilement que les seuls points critiques de f sont $(0,0)$ et $(1,1)$. Les dérivées partielles du second ordre sont égales à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3.$$

En $(0,0)$, on a $r = 0$, $t = 0$ et $s = -3$, soit $rt - s^2 = -9 < 0$. Le point $(0,0)$ est un point col, ce n'est pas un extrémum local de f. En $(1,1)$, on a $r = 6$, $t = 6$ et $s = -3$, soit $rt - s^2 = 27 > 0$. Puisque de plus $r > 0$, le point $(1,1)$ est un minimum local de f.

3. Les dérivées partielles du premier ordre de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 8(x-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 8(x-y).$$

Les points critiques sont solutions du système

$$\begin{cases} 4x^3 = 8(x-y) \\ -4y^3 = 8(x-y). \end{cases}$$

On en déduit que $x^3 = -y^3 = (-y)^3$. La fonction cube étant injective, ceci donne encore $x = -y$. Si on reporte ceci dans la première équation, on trouve $4x^3 = 16x$, soit

$$x^3 - 4x = 0 \iff x(x^2-4) = 0 \iff x(x-2)(x+2) = 0.$$

On en déduit que les points critiques de f sont $(0,0)$, $(2,-2)$ et $(-2,2)$. Etudions maintenant la nature de ces points critiques. Les dérivées partielles du second ordre sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 8, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 8 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8.$$

En $(2,-2)$, avec les notations usuelles, on a $r = 40$, $t = 40$ et $s = -8$. Cette fois, $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, donc le point $(2,-2)$ est un minimum local pour f. La conclusion est identique en $(-2,2)$. En $(0,0)$, on a $r = -8$, $t = -8$ et $s = 8$, soit $rt - s^2 = 0$. On ne peut donc pas conclure directement. Mais, on remarque que $f(x,0) = x^4 - 4x^2$ est négatif si x est petit, alors que $f(x,x) = 2x^4$ est toujours positif. Ainsi, $(0,0)$ n'est ni un maximum, ni un minimum puisque aussi près qu'on veut de $(0,0)$, on a des points (x,y) avec $f(x,y) > f(0,0)$ et d'autres points (x,y) avec $f(x,y) < f(0,0)$.

On commence par rechercher les points critiques de f. Pour cela, on calcule les dérivées partielles et on trouve, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x+y+z-4,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y+x+z-4, \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z+x+y-4.$$

On résout le système

$$\begin{cases} 2x+y+z-4 &= 0 \\ x+2y+z-4 &= 0 \\ x+y+2z-4 &= 0. \end{cases}$$

En faisant $(L1)-(L2)$ puis $(L2)-(L3)$, on trouve $x=y=z$, et finalement le seul point critique est $(1,1,1)$. Pour déterminer la nature de $(1,1,1)$, on va étudier la matrice hessienne de f. Pour cela, on observe que, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 1.$$

La matrice hessienne de f en $(1,1,1)$ est donc

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche les valeurs propres de M. Un calcul simple donne

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda-4)(\lambda-1)^2.$$

Les valeurs propres de M sont strictement positives, donc M est définie positive, et f admet un minimum local strict en $(1,1,1)$.

1. On calcule les dérivées partielles de f au premier ordre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 6y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x - 6y.$$

Un point critique (x,y) vérifie donc $x = y$ et $y = -x^2$, soit $x^2 + x = 0$. On vérifie donc facilement que les seuls points critiques sont $(0,0)$ et $(-1,-1)$. On calcule ensuite les dérivées au second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6.$$

En $(0,0)$, avec les notations usuelles, $r = 0$, $t = -6$ et $s = 6$, soit $rt - s^2 < 0$: $(0,0)$ n'est pas un extrémum local pour f. En $(-1,-1)$, on a $r = -12$, $t = -6$ et $s = 6$, soit $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$: f admet un maximum local en $(-1,-1)$. Ce maximum ne peut pas être un maximum global. En effet, $f(x,0) = 2x^3$ tend vers $+\infty$ si x tend vers $+\infty$, et donc la fonction n'est pas majorée. Par conséquent, elle n'admet pas de maximum global.

2. On calcule les dérivées partielles de f au premier ordre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y.$$

Un point critique (x,y) est solution du système

$$\begin{cases} xy &= 0 \\ x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y &= 0. \end{cases}$$

La première équation impose $x = 0$ (puisqu'on sait que $y > 0$), la deuxième équation donne $(\ln y)^2 + 2\ln y = 0$. Posant $X = \ln y$, on obtient $X^2 + 2X = 0$ donc les solutions sont $X = 0$ et $X = -2$. Revenant à y, on trouve $y = 1$ et $y = e^{-2}$. f admet donc deux points critiques qui sont $(0,1)$ et $(0,e^{-2})$. Étudions maintenant la nature de ces points critiques. Pour $(0,1)$, on peut remarquer que $f(0,1) = 0$ alors que $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$. Ainsi, on a prouvé que $(0,1)$ est un minimum global de f. Pour $(0,e^{-2})$, on calcule les dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{y} + 2\frac{\ln y}{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x.$$

Avec les notations usuelles, en $(0,e^{-2})$, on trouve $rt - s^2 = -4$ et donc $(0,e^{-2})$ n'est pas un extrémum local pour f.

3. On calcule les dérivées partielles de f au premier ordre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4x.$$

Un point critique (x,y) est solution du système

$$\begin{cases} x^3 &= y \\ y^3 &= x. \end{cases}$$

On en déduit $x = x^9$ soit $x = 0$ ou $x^8 = 1$. On en déduit que les points critiques sont $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$. On calcule ensuite les dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4.$$

Avec les notations usuelles, en $(0,0)$, on a $r = 0$, $t = 0$ et $s = -4$ soit $rt - s^2 = -16$. (0,0) n'est pas un extremum local. En $(1,1)$, on a $r = 12$, $t = 12$ et $s = -4$, dont $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$: $(1,1)$ est un minimum local, et il en est de même de $(-1,-1)$. Pour déterminer si ce sont des minima globaux, on calcule

$$f(x,y) - f(1,1) = x^4 + y^4 - 4xy + 2 = (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + 2(x-y)^2 \geq 0,$$

et donc $(1,1)$ est un minimum global. Il en est de même de $(-1,-1)$. On peut aussi utiliser une autre méthode plus abstraite pour démontrer que f admet au moins un minimum global. En effet, $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$ (car $|xy| \leq x^2 + y^2$ par exemple). Ainsi, il existe $M > 0$ tel que $\|(x,y)\| \geq M \implies f(x,y) \geq 0$. Sur la boule fermée $K = \bar{B}(0,M)$, qui est un compact, la fonction f est continue, donc elle admet un minimum sur K en $(x_0,y_0) \in K$. Ceci signifie que pour tout $(x,y) \in K$, on a $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$. Puisque $f(1,1) = -2$ et que $f(x,y) \geq 0$ si $(x,y) \notin K$, on sait que $f(x_0,y_0) < 0$. Mais du fait que f est positive sur le complémentaire de K, on en déduit que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$. Ainsi, f admet au moins un minimum global. Maintenant, un minimum global est un minimum local, donc (x_0,y_0) doit être égal à $(1,1)$ ou à $(-1,-1)$. On conclut en remarquant que $f(1,1) = f(-1,-1)$, et donc que ces deux points sont un minimum global pour f.

Remarquons déjà que f est de classe C^∞, puis que $f(x,1)=x^3+3x$. En particulier $f(x,1)\to+\infty$ si $x\to\infty$ et $f(x,1)\to-\infty$ si $x\to-\infty$. Ainsi, la fonction f n'est ni majorée, ni minorée, donc elle ne peut pas admettre d'extrémum global. Étudions maintenant ses extrema locaux. On sait que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=xy^2(2+3x+4y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^2y(1+x+3y).$$

On en déduit facilement que les points critiques de f sont les points du type $(a,0)$, $(0,b)$, avec $a,b\in\mathbb{R}$ et $(-2/5,-1/5)$. D'autre part, les dérivées partielles du second ordre de f sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2y^2+6xy^2+4y^3,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)=2x^2+2x^3+12x^2y,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=4xy+6x^2y+12xy^2.$$

En $(-2/5,-1/5)$, on trouve assez facilement que $r=-6/125$, $s=-8/125$ et $t=-24/125$. Ainsi, on a $rt-s^2>0$ avec $r<0$, et donc f présente en $(-2/5,-1/5)$ un maximum local.
Malheureusement, en les points du type $(a,0)$ et $(0,b)$, on a $rt-s^2=0$, et on ne peut conclure directement en appliquant le théorème. Il faut faire une étude cas par cas. Commençons par les points du type $(a,0)$. Dans ce cas, on a

$$f(a+h,k)=k^2a^2(1+a)+k^2a(3ah+2ak+2h)+k^2o(\|(h,k)\|^2).$$

Si $k=0$, $f(a+h,k)=f(a,0)=0$. D'autre part, si $k\neq0$, alors, si $1+a>0$, ie $a>-1$, $f(a+h,k)\geq f(a,0)$ si h,k sont petits, et f présente en $(a,0)$ un minimum local. Si $1+a<0$, c'est le contraire, et f présente un maximum local en $(a,0)$. Enfin, si $a=-1$, le signe de $3ah+2ak+2h$ pouvant être positif ou négatif avec h,k petits, la fonction présente un point col en $(a,0)$. L'étude en les points du type $(0,b)$ est similaire. On écrit cette fois

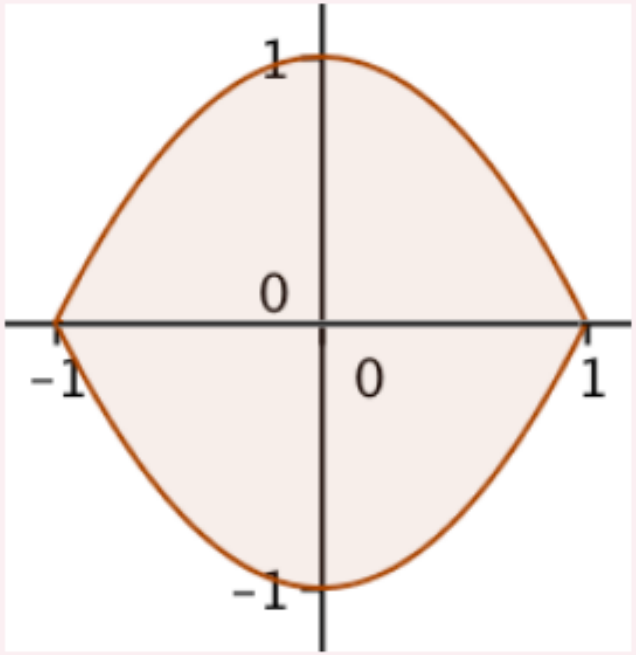
$$f(h,b+k)=h^2b^2(1+2b)+h^2b(bh+6bk+2k)+h^2o(\|(h,k)\|^2).$$

Si $b>-1/2$, f présente en $(0,b)$ un minimum local. Si $b<-1/2$, f présente en $(0,b)$ un maximum local. Le point $(0,-1/2)$ est un point col.

Exercice 28 Soit $f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Représenter D et trouver une paramétrisation de Γ, le bord de D.
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D.
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ.
5. En déduire le minimum et le maximum de f sur D.

1. Le domaine D est délimité par les deux paraboles d'équation $y = 1 - x^2$ et $y = x^2 - 1$. Son bord Γ comporte deux parties : la partie "haute", paramétrée par $y = 1 - x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, et la partie basse, paramétrée par $y = x^2 - 1$, $-1 \leq x \leq 1$.



2. Le domaine D est borné; c'est très clair si on se réfère au dessin. Pour une preuve complète, on peut remarquer que si $(x, y) \in D$, alors on doit avoir $x^2 - 1 \leq 1 - x^2$, et donc $x^2 \leq 1 \iff x \in [-1, 1]$. Cela impose ensuite $y \in [-1, 1]$. D est de plus clairement fermé. C'est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ et f est une fonction continue sur D. f admet donc un minimum et un maximum sur D.

3. Pour déterminer les points critiques de f, on calcule d'abord les dérivées partielles du premier ordre. On trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy + 2x = 2x(1-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x^2.$$

Un point (x,y) est un point critique si $(x,y) = (0,0)$ ou si (x,y) est solution du système

$$\begin{cases} 1-y &= 0 \\ 2y &= x^2. \end{cases}$$

On en déduit assez facilement que f admet trois points critiques qui sont $(0,0)$, $(-\sqrt{2},1)$ et $(\sqrt{2},1)$. Remarquons que seul $(0,0)$ est dans D.

4. On va étudier la paramétrisation du bord de D obtenue précédemment. Précisément, posons $g(x) = f(x, 1-x^2)$, pour $x \in [-1,1]$ et $h(x) = f(x, x^2-1)$ pour $x \in [-1,1]$. Les études de g et h vont nous permettre de déterminer les extrema de f sur Γ. On a, après simplifications,

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - 2x^2 + 2x^4 \\ h(x) &= 1. \end{aligned}$$

Il suffit donc d'étudier g, et par parité, on peut se restreindre à l'étudier sur $[0,1]$. En calculant la dérivée, on voit facilement que g est décroissante sur $[0, 1/\sqrt{2}]$ et est croissante sur $[1/\sqrt{2}, 1]$. De plus, $g(0) = g(1) = 1$ et $g(1/\sqrt{2}) = 1/2$. On en déduit que le minimum de f sur Γ est $1/2$, et son maximum est 1.

5. Les extrema de f sur D sont ou bien atteints sur le bord, ou bien atteints en un extrémum local de f situé dans D, donc en un point critique de f dans D. Puisque $f(0,0) = 0$, on en déduit que f admet 0 comme minimum sur D, et 1 comme maximum.

Exercice 29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?
3. On pose $K = [0,1]^2$. Justifier que f admet un maximum global sur K et le déterminer.

Exercice 30 Pour chacun des exemples suivants, démontrer que f admet un maximum sur K, et déterminer ce maximum.

1. $f(x,y) = xy(1-x-y)$ et $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x,y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$;
2. $f(x,y) = x - y + x^3 + y^3$ et $K = [0,1] \times [0,1]$;
3. $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ et $K = [0,\pi/2]^2$.

Exercice 31 Pour $p, n \geq 2$, on note

$$K_p = \{x \in [0,1]^p :\ x_1 + \cdots + x_p = 1\}$$
$$L_p = \{x \in]0,1[^p :\ x_1 + \cdots + x_p = 1\}$$
$$f_p(x) = x_1^n + \cdots + x_p^n,\ x \in K_p.$$

1. Justifier que f_p admet un minimum sur K_p.
   Dans la suite, on notera $m_p = \min\{f_p(x) :\ x \in K_p\}$.
2. Soit $y \in K_p$ tel que $f(y) = m_p$. Justifier que si $y \in L_p$, alors $y_1 = \cdots = y_p = \dfrac{1}{p}$.
3. On se place dans le cas $p = 2$. Démontrer que $m_2 = (\dfrac{1}{2})^n$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $p \geq 2$, $m_p = (\dfrac{1}{p})^n$.
5. Application : soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\{1, \ldots, p\}$.
   Démontrer que $P(X_1 = \cdots = X_n) = (\dfrac{1}{p})^n$.

1. Déterminons les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. On commence par calculer les dérivées partielles de f. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 6y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x - 6y.$$

Le point (x,y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 6x^2 + 6y &= 0 \\ 6x - 6y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x^2 + 6x &= 0 \\ x &= y \end{cases} \iff (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (-1,-1).$$

Étudions la nature de ces points critiques. On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6.$$

La matrice hessienne de f en $(0,0)$ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est négatif, et f n'admet pas d'extrémum local en $(0,0)$. La matrice hessienne de f en $(-1,-1)$ est

$$\begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $72 - 36 = 36 > 0$, qui est positif. De plus, $-12 < 0$ et f admet un maximum local en $(-1,-1)$ qui vaut 3. C'est le seul extremum local de f.

2. On a $f(x,0) = 2x^3 + 2$ et donc $\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty$ alors que $\lim_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty$. Ainsi, f n'admet pas de maximum local ou de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

3. On observe que K, qui est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Puisque f est continue, elle est bornée et atteint son minimum et son maximum sur K. Soit $a \in K$ tel que f atteint son maximum sur K en a. Alors si a est dans l'intérieur de K, f admet un maximum local (sur $\mathbb{R}^2$) en a. Mais le seul point où f admet un extrémum local, $(-1,-1)$, n'est pas dans K. Donc le maximum est atteint sur le bord de K. On partage le bord de K en quatre parties :

- sur le segment $[0,1] \times \{0\}$, on étudie $f(x,0) = 2x^3 + 2$ dont le maximum sur $[0,1]$ est atteint en 1 et vaut 4.
- sur le segment $[0,1] \times \{1\}$, on étudie $f(x,1) = 2x^3 + 6x - 1$ dont le maximum sur $[0,1]$ est atteint en 1 et vaut 7.
- sur le segment $\{0\} \times [0,1]$, on étudie $f(0,y) = -3y^2 + 2$ dont le maximum sur $[0,1]$ est atteint en 0 et vaut 2.
- sur le segment $\{1\} \times [0,1]$, on étudie $f(1,y) = 4 + 6y - 3y^2$ dont le maximum sur $[0,1]$ est atteint en 1 et vaut 7.

En conclusion f atteint son maximum sur K en $(1,1)$ et ce maximum vaut 7.

1. K est un ensemble fermé et borné (c'est un triangle). C'est donc une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction f étant polynomiale, elle est continue sur ce compact, donc elle y est majorée et elle atteint sa borne supérieure. Le maximum peut être atteint :
   - ou bien en un point du bord de K;
   - ou bien en un maximum local de f situé à l'intérieur de K.

Ici, on remarque que si (x,y) appartient à la frontière de K, alors ou bien $x=0$, ou bien $y=0$, ou bien $x+y=1$. Dans tous les cas, on a $f(x,y)=0$ alors que $f(1/4,1/4)>0$. Ainsi, le maximum ne peut être atteint qu'en un point à l'intérieur de K. On cherche donc les points critiques de f. Pour cela, on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y(1-2x-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x(1-x-2y).$$

Un point critique situé à l'intérieur de K vérifie

$$\begin{cases} 1-2x-y &= 0 \\ 1-x-2y &= 0. \end{cases}$$

Le seul point critique situé à l'intérieur de K est donc $(1/3,1/3)$. Comme un maximum local ne peut être atteint qu'en un point critique, c'est donc que f admet son maximum sur K en $(1/3,1/3)$. Ce maximum est égal à $1/27$.

2. Le début du raisonnement est tout à fait similaire. Ensuite, on remarque que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1+3x^2>0.$$

Ainsi, f ne peut pas admettre de point critique, et donc le maximum de f sur K ne peut être atteint qu'en un point du bord de K. Il suffit ensuite d'étudier le comportement de f sur le bord de K. On a d'une part $f(x,0)=x+x^3$ qui atteint son maximum en $(1,0)$, maximum valant 2. On a ensuite $f(x,1)=x+x^3$, qui atteint son maximum valant 2 en $(1,1)$. On a ensuite $f(0,y)=-y+y^3\leq 2$ si $y\in[0,1]$, et $f(1,y)=2-y+y^3\leq 2$. Ainsi, le maximum de f sur K est égal à 2.

3. Le début du raisonnement est identique. On cherche ensuite les points critiques appartenant à l'intérieur de K, l'ouvert $U =]0, \pi/2[^2$ en remarquant que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin y \sin(2x+y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin x \sin(x+2y)$$

(on a utilisé la célèbre formule $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$). Un point (x,y) de U est un point critique si et seulement si on a

$$\begin{cases} \sin(2x+y) &= 0 \\ \sin(x+2y) &= 0. \end{cases}$$

Puisque $x+2y \in]0, 3\pi/2[$, on a nécessairement

$$\begin{cases} 2x+y &= \pi \\ x+2y &= \pi. \end{cases}$$

Ainsi, le point $(\pi/3, \pi/3)$ est le seul point critique de f dans U. On a $f(\pi/3,\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. On étudie maintenant f sur le bord de K, ie on étudie $f(0,t)$, $f(t,0)$, $f(\pi/2,t)$ et $f(t,\pi/2)$ pour $t \in [0,\pi/2]$. On remarque que $f(0,t) = f(t,0) = 0$ et par symétrie du rôle joué par x et y, on peut se restreindre à l'étude de $f(\pi/2,t)$. Mais,

$$f(\pi/2,t) = \sin t \sin(t+\pi/2) = \sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin(2t),$$

dont le maximum pour $t \in [0,\pi/2]$ vaut $1/2$. Comme $\frac{1}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$, on en déduit que f admet pour maximum sur K la valeur $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

1. On commence par remarquer que $[0,1]^p$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^p$. De plus, $G_p = \{x \in [0,1]^p : \ x_1 + \cdots + x_p = 1\} = g_p^{-1}(\{1\})$, avec $g_p(x) = x_1 + \cdots + x_p$, est aussi fermé, comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Puisque $K_p = [0,1]^p \cap G_p$ est l'intersection de deux fermés, c'est un fermé. D'autre part, K_p est borné dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^p$: ainsi, K_p est une partie compacte. Comme f_p est continue sur K_p, à valeurs dans $\mathbb{R}$, elle est minorée et atteint son minimum.

2. Si $y \in L_p$, alors la restriction de f_p à L_p admet un minimum local en y. De plus, pour tout $x \in]0,1[^p$, on a $\nabla g_p(x) = (1, \ldots, 1) \neq 0$. Par le théorème d'optimisation sous contraintes, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour $i = 1, \ldots, p$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) = \lambda \frac{\partial g_p}{\partial x_i}(y) \implies n y_i^{n-1} = \lambda.$$

La fonction $t \mapsto nt^{n-1}$ étant injective (car strictement croissante) sur $]0,1[$, toutes les coordonnées de y sont égales et puisque $y_1 + \cdots + y_p = 1$, on doit avoir $y_i = 1/p$ pour $i = 1, \ldots, p$.

3. Soit $y \in K_2$ tel que $f_2(y) = m_2$. Si $y \in L_2$, on a $y_1 = y_2 = 1/2$ et donc $f(y) = 1/4$. Si $y \notin L_2$, alors on a $y_1 = 0$ et $y_2 = 1$ ou $y_1 = 1$ et $y_2 = 0$. Dans les deux cas, $f_2(y) = 1 > 1/4$. On a donc bien prouvé que f_2 atteint son minimum en $(1/2, 1/2)$ et que $m_2 = 1/4$.

4. Soit $p \geq 3$. Supposons le résultat démontré au rang $p-1$ (il est vrai au rang 2) et prouvons-le au rang p. Soit $y \in K_p$ tel que $f_p(y) = m_p$. Si $y \in L_p$, alors $y_1 = \cdots = y_p = 1/p$ et $f_p(y_p) = (1/p)^n$. Si $y \notin L_p$, alors un des y_i, disons y_p, est égal à 0 ou 1. Mais si $y_p = 1$, alors $f_p(y) = 1 > (1/p)^n$. Si $y_p = 0$, alors

$$f_p(y_1, \ldots, y_p) = f_{p-1}(y_1, \ldots, y_{p-1}) \geq m_{p-1} > (1/p)^n$$

puisque $(y_1, \ldots, y_{p-1}) \in K_{p-1}$. Ainsi, f_p ne peut pas atteindre son minimum sur le bord de K_p et on a bien $m_p = (1/p)^n$.

5. Notons, pour $i = 1, \ldots, p$, $x_i = P(X_j = i)$ (ceci ne dépend pas de $j \in \{1, \ldots, n\}$. Alors on a

5. Notons, pour $i = 1, \dots, p$, $x_i = P(X_j = i)$ (ceci ne dépend pas de $j \in \{1, \dots, n\}$. Alors on a

$$\begin{aligned} P(X_1 = \cdots = X_n) &= \sum_{i=1}^{p} P(X_1 = \cdots = X_n = i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} P((X_1 = i) \cap \cdots \cap (X_n = i)) \\ &= \sum_{i=1}^{p} P(X_1 = i) \times \cdots \times P(X_n = i) \text{ (par indépendance)} \\ &= \sum_{i=1}^{p} x_i^n \\ &= f_p(x) \end{aligned}$$

avec $x = (x_1, \dots, x_n) \in K_p$. D'après les résultats précédents,

$$P(X_1 = \cdots = X_n) \geq (1/p)^n.$$

Exercice 32 On considère un polygone convexe à n côtés inscrit dans le cercle unité du plan euclidien. On note P son périmètre, et $e^{ia_1}, e^{ia_2}, \dots, e^{ia_n}$ les affixes de ses sommets, avec $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 2\pi$.

1. On pose, pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $t_k = \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k)$ et $t_n = \frac{1}{2}(a_1 + 2\pi - a_n)$.

   Montrer que $P = 2\sum_{k=1}^{n} \sin(t_k)$.

2. Montrer que P est maximal lorsque le polygone est régulier.

Exercice 33 On désire fabriquer une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, sans couvercle sur le dessus. Le volume de cette boite doit être égal à $0,5m^3$ et pour optimiser la quantité de mâtière utilisée, on désire que la somme des aires des faces soit aussi petite que possible.
Quelles dimensions doit-on choisir pour fabriquer la boite ?

Exercice 34 Étudier les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \exp(axy)$, $a > 0$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

Exercice 35 Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n$.
On note $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n;\ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.

1. Démontrer que f admet un maximum global sur Γ et le déterminer.

2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a $\prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n} \leq \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

1. A rotation près, il s'agit de calculer la longueur AB si $A = 1$ et B est le point d'affixe $e^{i\theta}$, avec $\theta \in]0, 2\pi[$. Il suffit de montrer que $AB = 2\sin(\theta/2)$. On peut le faire simplement en calculant

$$AB^2 = |e^{i\theta} - 1|^2 = 4|\sin(\theta/2)|^2.$$

Puisque $\theta/2 \in]0, \pi[$ et donc $\sin(\theta/2) > 0$, on en déduit le résultat demandé en prenant la racine carrée.

2. Remarquons que $t_1 + \cdots + t_n = \pi$. On doit donc maximiser $P(t)$ sous la contrainte $t_1 + \cdots + t_n = \pi$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in]0, \pi[^n$. Notons $g(t) = t_1 + \cdots + t_n$. D'après le théorème sur les extrema liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$2\cos(t_i) = \frac{\partial P}{\partial t_i} = \lambda \frac{\partial g}{\partial t_i} = \lambda.$$

Puisque $t_i \in [0, \pi]$ et que la fonction $\cos$ est injective sur cet intervalle, tous les t_i sont égaux, ce qui revient à dire que le polygone est régulier.

Notons x, y et z les trois dimensions de la boite. Son volume est donc $xyz = 0,5$. On désire minimiser la fonction

$$f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$$

(on a enlevé la face du dessus). Remplaçant z par $1/2xy$, on doit donc chercher le minimum de la fonction de deux variables

$$g(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

sur l'ouvert $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Les dérivées partielles de g sont

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y - \frac{1}{x^2} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y} = x - \frac{1}{y^2}.$$

On vérifie alors sans peine que le seul point critique de g sur l'ouvert U est $(1,1)$. Reste maintenant à prouver que g admet bien un minimum global en $(1,1)$ sur U. Pour cela, on peut remarquer que $g(1,1) = 3$. De plus, si $x < 1/3$ ou $y < 1/3$, alors $g(x,y) > 3 = g(1,1)$. On en déduit que

$$\inf\{g(x,y);\ (x,y) \in U\} = \inf\{g(x,y);\ (x,y) \in A\}$$

où $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 1/3 \text{ et } y \geq 1/3\}$. Mais de plus, si $(x,y) \in A$ vérifie $x > 3$ ou $y > 3$, alors $g(x,y) \geq 3 = g(1,1)$. On en déduit que

$$\inf\{g(x,y);\ (x,y) \in U\} = \inf\{g(x,y);\ (x,y) \in K\}$$

où $K = [1/3, 3] \times [1/3, 3]$. Or K est compact et g est continue sur K, donc on sait que g admet un minimum sur K. Ce minimum sur K est aussi le minimum de g sur U. Or, g ne peut admettre qu'un minimum en un point critique. Donc g admet un minimum en $(1,1)$. Ceci signifie que les trois dimensions sont $x = 1$, $y = 1$ et $z = 1/2$.

Notons $g(x,y)=x^3+y^3+x+y-4$ et $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ g(x,y)=0\}$. On commence par calculer les diverses dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ay\exp(axy),\ \frac{\partial f}{\partial y}=ax\exp(axy),\ \frac{\partial g}{\partial x}=3x^2+1 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}=3y^2+1.$$

En un point (x,y) de G où f atteint un extrémum (sur G), les différentielles sont proportionnelles. On en déduit que

$$\frac{ay\exp(axy)}{3x^2+1}=\frac{ax\exp(axy)}{3y^2+1}$$

ce qui entraîne $3y^3+y=3x^3+x$. La fonction $t\mapsto 3t^3+t$ étant strictement croissante, on en déduit que l'on a nécessairement $x=y$. Il vient $x^3+x-2=0$, dont la seule racine réelle est $x=1$.
Il faut maintenant étudier ce qui se passe en (1,1). Y-a-t-il un extrémum? Est-ce un minimum? Un maximum? En fait, il suffit de remarquer qu'en les points de $x^3+y^3+x+y-4=0$ pour lesquels $|x|$ est grand, alors $|y|$ est grand lui aussi, mais x et y sont de signe opposés. Autrement dit,

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty,(x,y)\in G} f(x,y)=0.$$

Ainsi, par compacité, la fonction admet forcément un maximum qui est atteint en $(1,1)$.

1. On commence par remarquer que Γ est compact. En effet, Γ est clairement fermé. De plus, pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = x_1 + \cdots + x_n \leq 1$, et donc Γ est borné. C'est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ et f, qui est continue sur Γ, admet un maximum global sur Γ, atteint en a. De plus, puisque $f(x_1, \dots, x_n)$ s'annule si un des x_i est nul, il est clair que $a \in]0, +\infty[^n$. Posons $g(x) = x_1 + \cdots + x_n$. Par le théorème des extrema liés (ou d'optimisation sous contraintes), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \lambda.$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{f(a)}{a_i}.$$

Puisque $f(a) \neq 0$, on a $\lambda \neq 0$ et tous les a_i sont égaux (à $f(a)/\lambda$). Mais, puisque $a_1 + \cdots + a_n = 1$, on en déduit que f atteint son maximum sur Γ en le point $(1/n, \dots, 1/n)$. Ce maximum vaut $1/n^n$.

2. La question précédente prouve que, si $(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n$ satisfait $x_1 + \cdots + x_n = 1$, alors

$$\prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \leq \frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Dans le cas général, on se ramène à ceci en posant

$$x_i' = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i},$$

qui vérifie $x_1' + \cdots + x_n' = 1$. De $\prod_{i=1}^n x_i'^{1/n} \leq \frac{1}{n}$, on déduit l'inégalité demandée.