Exercice 1

1. Soient $m, n \in \mathbb{Z}^2$ avec $n \geq m$. Calculer $\displaystyle\int_m^n \lfloor x \rfloor dx$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{2} x|x|dx$.
3. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $I(a) = \displaystyle\int_0^1 \min(x, a)dx$.

Exercice 2

1. Démontrer que la fonction sin est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

   Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)dt$ est lipschitzienne.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire, avec des quantificateurs, que f n'est pas uniformément continue.

Exercice 4

Soit f une fonction uniformément continue sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de D telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.
2. Dire si les fonctions suivantes sont uniformément continues sur l'intervalle considéré.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$. b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0, 1]$. c) $f(x) = \sin(x^2)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant une période T.
Prouver que f est uniformément continue.

1. Si p est un entier, alors

$$\int_p^{p+1} \lfloor x \rfloor dx = \int_p^{p+1} p dx = p.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_m^n \lfloor x \rfloor dx &= \sum_{p=m}^{n-1} \int_p^{p+1} \lfloor x \rfloor dx \\
&= \sum_{p=m}^{n-1} p \\
&= \frac{(n-m)(n+m-1)}{2}
\end{aligned}$$

(la dernière somme étant la somme d'une suite arithmétique).

2. On va, par la propriété de Chasles, faire la somme de l'intégrale sur $[-1,0]$, puis sur $[0,2]$, intervalles où s'exprime facilement $|x|$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^2 x|x|dx &= \int_{-1}^0 x|x|dx + \int_0^2 x|x|dx \\
&= \int_{-1}^0 -x^2 dx + \int_0^2 x^2 dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\
&= \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

3. Si $a \leq 0$, alors pour tout $x \in [0,1]$, on a $\min(x,a) = a$ et donc

$$\int_0^1 \min(x,a)dx = a.$$

Si $a \geq 1$, alors pour tout $x \in [0,1]$, on a $\min(x,a) = x$ et donc

$$\int_0^1 \min(x,a)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

Si $a \in [0,1]$, on découpe l'intégrale en deux et on trouve par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \min(x,a)dx &= \int_0^a xdx + \int_a^1 adx \\ &= \frac{a^2}{2} + a(1-a) \\ &= a - \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

1. Ceci est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis. Rappelons que $(\sin)' = \cos$ et que $|\cos(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De l'inégalité des accroissements finis, on déduit directement que, pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sin(u) - \sin(v)| \leq |u - v|.$$

2. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors d'après les propriétés de l'intégrale

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^b f(t)\big(\sin(xt) - \sin(yt)\big)dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t)| \times \big|\sin(xt) - \sin(yt)\big| dt. \end{aligned}$$

On utilise alors le résultat de la question précédente pour trouve

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq \int_a^b |f(t)| \cdot |x - y| \cdot |t| dt \\ &\leq \left(\int_a^b |tf(t)| dt \right) |x - y|. \end{aligned}$$

Ceci démontre bien que F est lipschitzienne.

Il suffit de nier la définition :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in I^2, |x-y| \leq \eta \wedge |f(x)-f(y)| > \varepsilon,$$

le symbole $\wedge$ signifiant "et".

1. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x-y| < \eta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Puisque $(x_n - y_n)$ tend vers 0, il existe un entier N tel que, pour $n \geq N$, on a

$$|x_n - y_n| < \eta.$$

Ainsi, pour $n \geq N$, on a

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon,$$

ce qui est le résultat voulu.

2.

2.1. On écrit, pour $x, y \geq 1$,

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{|xy|} \leq |x-y|.$$

Ceci prouve que f est uniformément continue sur $[1, +\infty]$. Elle y est même lipschitzienne.

2.2. Le raisonnement précédent ne fonctionne pas sur $]0, 1]$ car si x et y sont petits, alors xy est très petit, et peut être beaucoup plus petit que $x - y$. Par exemple, prenons $x_n = 1/2n$ et $y_n = 1/n$. Alors

$$f(x_n) - f(y_n) = n \to +\infty.$$

Ainsi, quelque soit $\eta > 0$, il est possible de trouver n assez grand tel que $|x_n - y_n| = 1/2n < \eta$, et pourtant $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. La fonction f n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

2.3. On fait un raisonnement similaire, sachant que $\sin(n\pi) = 0$ et $\sin(n\pi + \pi/2) = \pm 1$. Posons donc $x_n = \sqrt{n\pi}$ et $y_n = \sqrt{n\pi + \pi/2}$. Alors $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$, tandis que

$$x_n - y_n = \frac{n\pi - n\pi - \pi/2}{\sqrt{n\pi} + \sqrt{n\pi + \pi/2}} \to 0.$$

Par le même raisonnement qu'à la question précédente, f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[-T, 2T]$:

$$\exists \eta > 0,\ x, y \in [-T, 2T] \text{ et } |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

(on peut supposer $\eta < T$). Prenons alors x et y dans $\mathbb{R}$, avec $|x - y| \leq \eta$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x' = x + kT \in [0, T]$. Mais alors, on a $y' = y + kT \in [x' - \eta, x' + \eta] \subset [-T, 2T]$. Remarquons enfin que $|x' - y'| \leq \eta$. On en déduit :

$$|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| \leq \varepsilon.$$

La fonction est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|dt$. Montrer que f garde un signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 7 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$, alors f admet au moins un point fixe dans $[0,1]$.

Exercice 8 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, une fonction continue non identiquement nulle. On suppose qu'il existe un entier n tel que, pour tout $k \leq n$, on a $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0$. On souhaite prouver que, dans l'intervalle $[a,b]$, il existe au moins $n+1$ points où f s'annule en changeant de signe.

1. Traiter le cas $n = 0$.

2. Traiter le cas $n = 1$.
On pourra supposer que f s'annule en un unique point c et considérer la fonction $g(x) = (x-c)f(x)$

3. Traiter le cas général.

Quitte à changer f en $-f$ (ce qui ne change pas le problème), on peut supposer que $\int_a^b f(t)dt \geq 0$. Alors on a

$$\int_a^b \big(|f(t)| - f(t)\big)dt = \int_a^b |f(t)|dt - \int_a^b f(t)dt = 0$$

d'après l'hypothèse. Or, la fonction $t \mapsto |f(t)| - f(t)$ est continue et positive, d'intégrale nulle. C'est nécessairement la fonction nulle, donc $f(t) = |f(t)|$ pour tout $t \geq 0$. Autrement dit, f est toujours positive.

La clé est de remarquer que $\frac{1}{2} = \int_0^1 x dx$. L'hypothèse nous dit donc que

$$\int_0^1 \big(f(x) - x\big) dx = 0.$$

Ceci n'est pas possible si $x \mapsto f(x) - x$, qui est une fonction continue, est strictement positive ou strictement négative sur $[0, 1]$. Ainsi, cette fonction doit s'annuler sur $[0, 1]$ et la fonction doit avoir un point fixe.

1. Si $\int_a^b f(t)dt = 0$ et s'il n'existe pas de points où f s'annule en changeant de signe, alors on a $f \geq 0$ ou $f \leq 0$. Dans un cas comme dans l'autre, puisque f est continue, la condition $\int_a^b f(t)dt = 0$ impose que f est identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas. Donc f s'annule en changeant de signe en au moins un point.

2. Par la première question, on sait que f s'annule en changeant de signe en au moins un point c. Supposons que c soit l'unique point où f change de signe, et posons $g(x) = (x-c)f(x)$. Alors g est continue, elle garde un signe constant sur l'intervalle $[a, b]$ et, par hypothèse et linéarité de l'intégrale, elle vérifie

$$\int_a^b g(t)dt = 0.$$

g est donc identiquement nulle. Ceci entraîne que f est nulle, sauf éventuellement en c. Mais par continuité de f en c, f est identiquement nulle : contradiction.

3. On remarque d'abord que, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$$

pour tout polynôme P. Supposons maintenant que f s'annule en changeant de signes en k points $a_1, \dots, a_k$, avec $k < n+1$. Alors la fonction

$$g(x) = (x-a_1)\dots(x-a_k)f(x)$$

garde un signe constant, est continue, et vérifie, par la remarque précédente, $\int_a^b g(x)dx = 0$. g est donc identiquement nulle, f aussi, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Exercice 9 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Démontrer que sa valeur moyenne est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.
2. En déduire l'inégalité de la moyenne : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leq |b-a| \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$

Exercice 10 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)e^{tx}dt$.
Démontrer que g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$. On pose $u_n = \displaystyle\int_a^b \varphi(x)\sin(nx)dx$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Montrer que cette propriété est conservée si φ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Exercice 12 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$.

1. On suppose que f est en escalier.

   Montrer qu'il existe $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_a^b fg \geq \int_a^b |f| - \varepsilon$ et $|g| \leq 1$.
2. Reprendre la même question si f est continue.

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' est T-périodique.
On suppose que $f(T) \neq f(0)$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $f(nT) - f((n-1)T) = f(T) - f(0)$.
2. En déduire que f n'est pas périodique.

f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle y est bornée et elle y atteint son minimum et son maximum. Soient $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que

$$f(x_1) = \min_{[a,b]} f \text{ et } f(x_2) = \max_{[a,b]} f.$$

Alors, puisque, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),$$

on a en intégrant

$$(b-a)f(x_1) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f(x_2)$$

soit encore

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2).$$

Mais par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque f est continue sur $[a, b]$, toute valeur comprise entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ est prise par f. On en déduit qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Fixons $a \in \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Nous allons prouver que g est continue en a. Pour cela, majorons $|g(x) - g(a)|$:

$$|g(x) - g(a)| = \left| \int_0^1 f(t)(e^{tx} - e^{ta})dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| \times |e^{tx} - e^{ta}|dt.$$

Puisque f est continue sur l'intervalle $[0, 1]$, elle y est bornée. Soit $M = \sup_{[0,1]} |f|$. Alors on a

$$|g(x) - g(a)| \leq M \int_0^1 |e^{tx} - e^{ta}|dt.$$

Plusieurs méthodes sont alors possibles. Une des plus simples est calculer l'intégrale qui reste en séparant les cas $x > a$ et $x < a$. On va plutôt utiliser la continuité de l'application exponentielle en 0 en mettant en facteur e^{ta}. On a en effet

$$|e^{tx} - e^{ta}| = e^{ta}|e^{t(x-a)} - e^0| \leq e^{|a|}|e^{t(x-a)} - e^0|.$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ (c'est le moment de mettre les mains dans le cambouis!). Puisque la fonction exponentielle est continue en 0, il existe $\delta > 0$ tel que, si $|h| < \delta$, alors

$$|e^h - e^0| \leq \varepsilon.$$

Si $|x - a| < \delta$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, on a encore $|t(x - a)| < \delta$ et donc

$$|e^{t(x-a)} - e^0| < \varepsilon.$$

On en déduit que

$$|g(x) - g(a)| \leq Me^{|a|} \int_0^1 \varepsilon dt = Me^{|a|}\varepsilon.$$

Ceci prouve bien que g est continue en a.

Soit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ une subdivision adaptée à φ, et y_i la valeur prise par φ sur $]a_i, a_{i+1}[$. Remarquons que :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{i=0}^{p-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \varphi(x)\sin(nx)dx \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} y_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{p-1} y_i(\cos(na_i) - \cos(na_{i+1})). \end{aligned}$$

Soit M la plus grande des valeurs des $|y_i|$. On a :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{p-1} 2M \leq \frac{2pM}{n}.$$

On en déduit bien que (u_n) tend vers 0. D'autre part, si φ est continue par morceaux sur $[a,b]$, et si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe une fonction en escalier ψ telle que, pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon.$$

On a alors :

$$\int_a^b \varphi(x)\sin(nx)dx = \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\sin(nx)dx + \int_a^b \psi(x)\sin(nx)dx.$$

On en déduit :

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\sin(nx)dx\right| \leq \left|\int_a^b (\varphi(x)-\psi(x))\sin(nx)dx\right| + \left|\int_a^b \psi(x)\sin(nx)dx\right|.$$

Maintenant, on choisit n_0 de sorte que pour $n \geq n_0$, on ait :

$$\left|\int_a^b \psi(x)\sin(nx)dx\right| \leq \varepsilon.$$

Pour un tel n, on a encore :

$$\left|\int_a^b (\varphi(x)-\psi(x))\sin(nx)dx\right| \leq \int_a^b \left|(\varphi(x)-\psi(x))\sin(nx)\right|dx \leq (b-a)\varepsilon.$$

Ceci prouve que, pour $n \geq n_0$, on a :

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\sin(nx)dx\right| \leq \varepsilon + (b-a)\varepsilon.$$

La propriété est conservée si φ est continue par morceaux.

1. Soit $a_0 < \cdots < a_n$ une subdivision adaptée à f, ie f est constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. Soit $\alpha > 0$ très petit (au moins, $2\alpha < \min(a_{i+1} - a_i)$). On définit g de la façon suivante sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$:

- Si $f \geq 0$ sur $[a_i, a_{i+1}]$, on définit g comme étant égale à 1 sur $[a_i + \alpha, a_{i+1} - \alpha]$, $g(a_i) = g(a_{i+1}) = 0$, et g est affine sur chaque intervalle $[a_i, a_i + \alpha]$ et $[a_{i+1} - \alpha, a_{i+1}]$ (faire un dessin).
- Si $f < 0$ sur $[a_i, a_{i+1}]$, on définit g comme étant égale à -1 sur $[a_i + \alpha, a_{i+1} - \alpha]$, $g(a_i) = g(a_{i+1}) = 0$, et g est affine sur chaque intervalle $[a_i, a_i + \alpha]$ et $[a_{i+1} - \alpha, a_{i+1}]$.

Alors, on a toujours $fg \geq 0$, et $fg = |f|$ sur chaque intervalle $[a_i + \alpha, a_{i+1} - \alpha]$. Notons $M = \|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Alors on a

$$\begin{aligned}\int_a^b fg &\geq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} fg \\ &\geq \int_a^b |f| - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_i+\alpha} |f| + \int_{a_{i+1}-\alpha}^{a_{i+1}} |f| \right) \\ &\geq \int_a^b |f| - 2nM\alpha.\end{aligned}$$

Si α est choisi de sorte que $\alpha \leq \frac{\varepsilon}{2nM}$, la fonction g convient.

2. Soit $\delta > 0$ et soit φ une fonction en escalier telle que $f - \delta \leq \varphi \leq f + \delta$. Alors, d'après la question précédente, on peut trouver g telle que

$$\int_a^b \varphi g \geq \int_a^b |\varphi| - \delta.$$

Mais, on a alors

$$\begin{aligned}\int_a^b fg &= \int_a^b (f - \varphi) g + \int_a^b \varphi g \\ &\geq \ -(b-a)\delta + \int_a^b |\varphi| - \delta \\ &\geq 2(b-a)\delta - \delta - \int_a^b |f|.\end{aligned}$$

Si δ est choisi assez petit, la fonction g convient.

1. On écrit

$$f(nT) - f((n-1)T) = \int_{(n-1)T}^{nT} f'(u)du = \int_0^T f'(u)du = f(T) - f(0),$$

où la deuxième égalité est une conséquence du changement de variables $u = t - (N-1)T$ et du fait que f' est T-périodique.

2. De la question précédente, on déduit que

$$f(nT) - f(0) = n\big(f(T) - f(0)\big).$$

En particulier, la suite $(|f(nT)|)$ tend vers $+\infty$. La fonction f ne peut donc pas être périodique (peu importe la période) puisqu'une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 14 Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$2yf(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$$

Exercice 15 Soit f une fonction de classe C^1 réalisant une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

1. Justifier que f est strictement croissante.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $xf(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$.
3. En déduire que, pour tout $(x, y) \in [0, +\infty[^2$, on a $xy \leq \displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t)dt$.

   Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 16 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a) = 0$.

1. Prouver que, pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)|^2 \leq (x - a) \displaystyle\int_a^b |f'(t)|^2 dt$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx$.

Pour $y = 1$, la relation devient $f(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$. Par le théorème fondamental du calcul intégral, et par composition, la fonction f est de classe C^1. Dérivons la relation $2yf(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$ par rapport à y. On obtient, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$2f(x) = f(x+y) + f(x-y).$$

Redérivons ceci par rapport à y. On obtient, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$0 = f'(x+y) - f'(x-y).$$

Or, l'application $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Ceci signifie que l'équation précédente peut encore s'écrire, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x) - f'(y) = 0$. Autrement dit, f' est constante, et la fonction f est nécessairement une fonction affine. Réciproquement, on vérifie facilement que toute fonction affine $f(x) = ax + b$ est solution de l'équation.

1. f étant continue et injective sur l'intervalle $[0,+\infty[$, elle y est strictement monotone. Si elle était décroissante, on aurait $f(x)\leq f(0)$ et donc les valeurs supérieures à $f(0)$ ne seraient pas atteintes. Remarquons aussi que $f(0)=0$.
2. Posons

$$g(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)dt-\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt.$$

On va dériver ceci par rapport à x. Ceci ne pose pas de difficultés, sauf pour la dernière partie. Posant $u(x)=\int_0^x f^{-1}(t)dt$, on doit dériver $u\circ f$. On trouve donc

$$g'(x)=xf'(x)+f(x)-f(x)-f'(x)f^{-1}(f(x))=xf'(x)-xf'(x)=0.$$

Comme de plus $g(0)=0$, g est identiquement nulle ce qui donne le résultat voulu.
3. On fixe $x\in\mathbb{R}_+$, et on pose

$$h(y)=xy-\int_0^x f(t)dt-\int_0^y f^{-1}(t)dt.$$

h est dérivable et on a

$$h'(y)=x-0-f^{-1}(y).$$

Or, f est strictement croissante, et donc $f^{-1}(y)<x$ ssi $y<f(x)$ et $f^{-1}(y)>x$ ssi $y>f(x)$. La fonction h est donc strictement croissante sur $[0,f(x)]$, et strictement décroissante sur $[f(x),+\infty[$. Comme $h(f(x))=0$ d'après la question précédente, on trouve bien que

$$xy\leq\int_0^x f(t)dt+\int_0^y f^{-1}(t)dt$$

avec égalité si et seulement si $y=f(x)$.

1. Comme $f(a)=0$, on a

$$f(x)=\int_a^x f'(t)dt.$$

Ecrivons $f'=1\times f'$ et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On trouve

$$|f(x)|^2=\left|\int_a^x f'(t)\times 1dt\right|^2\leq\int_a^x |f'(t)|^2dt\times\int_a^x 1^2dt\leq(x-a)\int_a^b |f'(t)|^2dt.$$

2. Il suffit d'intégrer l'inégalité précédente entre a et b.

Exercice 17

1. Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, soit $a \in I$, soit $h : I \to \mathbb{R}$ continue, $u, v : J \to I$ de classe C^1 et
$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} h(t)dt.$$
Exprimer F en fonction de $f : x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)dt$.
En déduire que F est C^1 et calculer sa dérivée.
2. On considère la fonction F définie sur $J =]1, +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{(\ln t)^2}$. Étudier le sens de variation de F sur J.
3. En utilisant la décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(\ln t)^2}$ sur $I =]1, +\infty[$, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
4. En utilisant l'inégalité $0 < \ln t \leq t - 1$ pour $t \in I$, déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$.

Exercice 18

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Est-elle paire, impaire ?
2. Étudier les variations de f, puis l'existence de limites aux bornes de l'ensemble de définition.

1. Soit a un élément de J. On introduit $f(x)=\int_a^x h(t)dt$. On peut remarquer que

$$F(x)=\int_a^{v(x)}h(t)dt-\int_a^{u(x)}h(t)dt=f(v(x))-f(u(x)).$$

Par composition, F est C^1 et

$$F'(x)=v'(x)f'(v(x))-u'(x)f'(u(x))=v'(x)h(v(x))-u'(x)h(u(x)).$$

2. On est tout à fait dans le cadre de la question précédente, avec $u(x)=x$, $v(x)=x^2$ et $h(t)=\frac{1}{(\ln t)^2}$. F est donc de classe C^1 sur J et sa dérivée vaut

$$F'(x)=\frac{2x}{(\ln(x^2))^2}-\frac{1}{(\ln x)^2}=\frac{x-2}{2(\ln x)^2}.$$

On en déduit que F est décroissante sur $]1,2]$, puis croissante sur $[2,+\infty[$.

3. Pour $x\in J$, on a $x\leq x^2$. De plus, la fonction $t\mapsto\frac{1}{(\ln t)^2}$ est décroissante sur l'intervalle $[x,x^2]$. On en déduit que pour tout $x\in[x,x^2]$, on a

$$\frac{1}{(\ln x^2)^2}\leq\frac{1}{(\ln t)^2}\leq\frac{1}{(\ln x)^2}.$$

On intègre cette inégalité entre x et x^2, et on trouve

$$\frac{x^2-x}{(\ln x^2)^2}\leq F(x)\leq\frac{x^2-x}{(\ln x)^2}.$$

Par croissance comparée du logarithme et des fonctions puissance, on en déduit que F tend vers $+\infty$ si x tend vers $+\infty$.

4. D'après l'inégalité indiquée par l'énoncé, on sait que, pour tout $t>1$, on a

$$\frac{1}{(\ln t)^2}\geq\frac{1}{(t-1)^2}.$$

On intègre cette inégalité entre x et x^2, pour $x\in I$ (remarquons qu'on a bien alors $x\leq x^2$), et on trouve

$$F(x)\geq\left[\frac{-1}{t-1}\right]_x^{x^2}=\frac{x}{x^2-1}.$$

Puisque $\lim_{x\to1^+}x/(x^2-1)=+\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to1^+}F(x)=+\infty$.

1. Remarquons que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t^4+t^2+1>0$. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \\ &= -\int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4+u^2+1}} \text{ (en posant } u=-t) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est donc impaire.

2. Posons $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. Alors, par le théorème fondamental du calcul intégral, F est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$. Or, $f(x)=F(2x)-F(x)$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2F'(2x)-F'(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{16x^4+4x^2+1}}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\sqrt{x^4+x^2+1}} \\ &= \frac{4(x^4+x^2+1)-(16x^4+4x^2+1)}{\left(2\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)\sqrt{16x^4+4x^2+1}\sqrt{x^4+x^2+1}} \end{aligned}$$

qui est du signe de $-12x^4+3$. La fonction est donc croissante sur $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$ et décroissante sur $]-\infty,-1/\sqrt{2}]$ et sur $[1/\sqrt{2},+\infty[$.
Calculons maintenant la limite de f en $+\infty$ (on sait déjà que cette limite existe car la fonction est positive et décroissante). Pour $x>0$, on a

$$0 \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leq \frac{2x-x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

ce qui donne $\lim_{+\infty} f(x)=0$. Par imparité de f, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Exercice 19 Pour $x > 0$, on note $\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ et $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)dt$.

1. Justifier que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Exprimer f en fonction d'une primitive ϕ de φ. En déduire que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
3. Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
4. Établir que, pour tout $x > 0$, $e^{-2x}\ln(2) \leq f(x) \leq e^{-x}\ln(2)$. En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.
5. On pose, pour $x \in]0, 1[$, $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

   Donner une relation entre f et g, et en déduire la limite de g en 1.

Exercice 20 Étudier la fonction suivante sur $\mathbb{R}$: $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt$.

1. Soit $x > 0$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$, en particulier sur le segment $[x, 2x]$. D'où l'existence de $\int_x^{2x} \varphi(t)dt$.

2. Par le théorème fondamental du calcul intégral, on a $f(x) = \phi(2x) - \phi(x)$. Puisque ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$), on en déduit que f est $\mathcal{C}^1$, et que sa dérivée vérifie pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{2e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}.$$

3. Puisque la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $x > 0$, on a $e^{-2x} - e^{-x} \leq 0$ et donc $f'(x) \leq 0$. La fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

4. Soit $x > 0$. Pour $t \in [x, 2x]$, on a $0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$ et donc $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{e^{-t}}{x}$ puisque $e^{-t} > 0$. On intègre cette inégalité entre x et $2x$ et on trouve

$$0 \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}.$$

Par le théorème des gendarmes, on trouve que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

5. Remarquons que pour tout $t \in [x, 2x]$ on a l'encadrement $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$. On en déduit, en multipliant par $1/t > 0$, que $\frac{e^{-2x}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-x}}{t}$ pour $t \in [x, 2x]$. On intègre cette inégalité entre x et $2x$ et on trouve

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t} dt \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t} dt.$$

Ceci donne finalement

$$e^{-2x} \ln 2 \leq f(x) \leq e^{-x} \ln 2.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \to 0} f(x) = \ln 2$.

6. Effectuons le changement de variables $u = -\ln t$ dans l'intégrale définissant g. Remarquons que $\ln$ réalise une bijection de $[x^2, x]$ sur $[\ln(x^2), \ln(x)]$ (attention, $x \in [0,1]$ et on a $x^2 \leq x$) et que $du = \frac{-dt}{t}$ soit $dt = -e^{-u}du$. On trouve

$$g(x) = \int_{-\ln x}^{-\ln(x^2)} \frac{e^{-u}du}{u} = f(-\ln x).$$

Lorsque x tend vers 1, $-\ln x$ tend vers 0 et, par composition des limites, g tend vers $\ln(2)$.

Commençons par remarquer que f est π-périodique, car $\sin^2(\pi+x)=\sin^2(x)$ et $\cos^2(\pi+x)=\cos^2(x)$. Il suffit donc d'étudier f sur $[0,\pi]$. De plus, on a également $f(\pi-x)=f(x)$ et donc il suffit d'étudier f sur $[0,\pi/2]$.Soit $u(x)=\int_0^x \arcsin\sqrt{t}dt$ et $v(x)=\int_0^x \arccos\sqrt{t}dt$. Puisque les fonctions $\arcsin$ et $\arccos$ sont continues sur $[0,1]$, u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$, avec $u'(x)=\arcsin\sqrt{x}$ et $v'(x)=\arccos\sqrt{x}$. De plus, $f(x)=u(\sin^2 x)+v(\cos^2 x)$. Par composition, f est de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$, par conséquent sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est

$$f'(x)=2\sin x\cos x\arcsin\sqrt{\sin^2 x}-2\sin x\cos x\arccos\sqrt{\cos^2 x}$$

On peut se restreindre à x dans l'intervalle $[0,\pi/2]$, et pour x dans cet intervalle, tout se passe bien, à savoir $\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$, $\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$ et $\arcsin(\sin x)=x$, $\arccos(\cos x)=x$. Il vient :

$$\begin{aligned}f'(x)&=2x\sin x\cos x-2x\sin x\cos x\\&=0.\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=f(\pi/4)=\int_0^{1/2}(\arccos\sqrt{t}+\arcsin\sqrt{t})dt=\int_0^{1/2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},$$

puisque l'on sait que pour tout $x\in[-1,1]$, $\arcsin(x)+\arccos(x)=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 21 Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\dfrac{n\pi}{n}\right)\right).$
2. $u_n = n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right).$
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}.$
4. $u_n = \sqrt[n]{\left(1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2\right)\ldots\left(1+\left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right)}.$

Exercice 22 Déterminer la limite de $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n}$.

Exercice 23 Déterminer la limite de $S_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{2n}\dfrac{1}{p}$.

1. On a directement l'écriture sous la forme d'une somme de Riemann :

$$u_n \to \int_0^1 \sin(\pi x)dx = \frac{2}{\pi}.$$

2. On écrit d'abord :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+1/n)^2} + \dots + \frac{1}{(1+n/n)^2}\right).$$

On a donc :

$$u_n \to \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

3. On a :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right),$$

et donc :

$$u_n \to \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}.$$

4. On a :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) + \dots + \ln\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\right)\right).$$

Par composition des limites, ceci converge vers :

$$\exp\left(\int_0^1 \ln(1+x^2)dx\right).$$

L'intégrale se calcule à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x^2)dx &= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx\\ &= \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx\\ &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

On va se ramener à une somme de Riemann en utilisant la fonction exponentielle. On écrit donc

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n} \\
&= \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{1}{n}\ln(k+n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln(1+n)+\cdots+\ln(n+n)\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)+\cdots+\ln\left(n\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\exp\left(\frac{1}{n}\left(n\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\exp(\ln n)\exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

On pose $f(x)=\ln(x)$, fonction continue sur $[1,2]$, et on considère $S_n(f)$ la n-ième somme de Riemann de f entre 1 et 2. On a

$$v_n = \exp(S_n(f)).$$

Par le théorème des sommes de Riemann, on a

$$S_n(f) \to \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 \ln(x)dx.$$

Or,

$$\int_1^2 \ln(x)dx = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

Par le théorème de composition des limites, on trouve finalement que (v_n) converge vers $\exp(2\ln 2-1) = 4/e$.

On va interpréter cette somme comme une somme de Riemann. Ce n'est pas tout à fait immédiat, l'astuce consiste ici à écrire $p=n+k$ avec k dans $0,\dots,n$. On a donc

$$S_n=\sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

On reconnait alors une somme de Riemann de la fonction continue $x\mapsto \frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0,1]$. On en déduit que

$$S_n\to\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx=\ln 2.$$