LES SUITES RÉELLES

Ce chapitre approfondit les propriétés des suites réelles. Il suppose connues les définitions et les propriétés des suites convergentes et des applications continues présentées dans le chapitre limites.

Définitions de continuité et de limites

• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\mathbb{R}$ à cette condition :

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,N\in\mathbb{N}\quad\forall\,n\geq N\qquad|u_n-\ell|<\varepsilon$$

Dans ce cas ℓ est unique et est notée $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

• Ces conditions énoncent que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty:\qquad\forall\,B\in\mathbb{R}\quad\exists\,N\in\mathbb{N}\quad\forall\,n\geq N\qquad u_n>B$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty:\qquad\forall\,B\in\mathbb{R}\quad\exists\,N\in\mathbb{N}\quad\forall\,n\geq N\qquad u_n<B$$

• L'application f définie sur l'ensemble $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ admet une limite ℓ en $a\in\mathbb{R}$ à ces deux conditions :

$$\forall\,h>0[a-h,\,a+h]\cap\mathcal{D}\neq\emptyset$$

$$\text{ET}\qquad\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\eta>0\quad\forall\,x\in]a-\eta,\,a+\eta[\cap\mathcal{D}|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Dans ce cas ℓ est unique et est notée $\ell=\lim\limits_{x\to a}f(x)$.
La définition des limites infinies est comparable à celle des suites.
Ces propositions caractérisent les limites en $+\infty$ de la fonction f :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$:

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,A\in\mathbb{R}\quad\forall\,x\in]A,\,+\infty[\cap\mathcal{D}\qquad|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$:

$$\forall\,B\in\mathbb{R}\quad\exists\,A\in\mathbb{R}\quad\forall\,x\in]A,\,+\infty[\cap\mathcal{D}\qquad f(x)>B$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$:

$$\forall\,B\in\mathbb{R}\quad\exists\,A\in\mathbb{R}\quad\forall\,x\in]A,\,+\infty[\cap\mathcal{D}\qquad f(x)<B$$

• Une application f est continue en $a\in\mathcal{D}$ si et seulement si sa limite en a existe et est $f(a)$:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

$$\Longleftrightarrow\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\eta>0\quad\forall\,x\in]a-\eta,\,a+\eta[\cap\mathcal{D}\quad|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

Suites monotones

□ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante est caractérisée par l'une de ces deux propositions équivalentes :

$$\forall\,n\in\mathbb{N}\quad u_n\leq u_{n+1}\qquad\qquad\forall\,(n,p)\in\mathbb{N}^2\quad n\leq p\Longrightarrow u_n\leq u_p$$

∗ La preuve qu'une suite est croissante démontre généralement la première proposition en étudiant le signe de $u_{n+1}-u_n$ qui ne dépend que du paramètre n, et pas de deux.
Si une suite est croissante la deuxième propriété est plus générale et compare directement deux termes quelconques d'une suite.

◇ La démonstration du sens inverse est immédiate avec $p=n+1$.
La démonstration du sens direct repose sur une récurrence par rapport à $k=p-n\in\mathbb{N}$.
La proposition $u_n\leq u_p$ est vérifiée lorsque $p=n$ et $p-n=0$.
L'hypothèse initiale correspond au cas $p=n+1$.
Supposons maintenant que si $p-n=k\in\mathbb{N}$ alors $u_n\leq u_p$, et montrons que $u_p\leq u_n$ lorsque $p-n=k+1$. Dans ce dernier cas si $p-n=k+1$ alors $p-(n+1)=k$, donc $u_{n+1}\leq u_p$ et, par hypothèse, $u_n\leq u_{n+1}$, donc par transitivité $u_n\leq u_p$.
Le théorème de récurrence justifie que l'inégalité $u_n\leq u_p$ pour tout $k=p-n\in\mathbb{N}$. En conclusion $u_n\leq u_p$ pour tout couple $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ vérifiant $n\leq p$.

∗ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante est de même caractérisée ainsi :

$$\forall\,n\in\mathbb{N}\quad u_n\geq u_{n+1}\qquad\qquad\forall\,(n,p)\in\mathbb{N}^2\quad n\leq p\Longrightarrow u_n\geq u_p$$

■ Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée converge vers une limite finie $\ell\in\mathbb{R}$ qui est cette borne supérieure notée de l'une ou l'autre façon :

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}u_n=\sup\left\{u_n\;\big/\;n\in\mathbb{N}\right\}=\sup_{n\in\mathbb{N}}u_n$$

♦ La démonstration repose sur le principe de la coupure appliqué à l'ensemble majoré des valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

◊ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majoré donc l'ensemble de ses valeurs contient u_0, n'est pas vide et est majoré. Cet ensemble possède donc une borne supérieure c :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n \leq c \qquad\qquad \forall h>0 \quad \exists M\in\mathbb{N} \quad c-h<u_M$$

Cette démonstration doit prouver la convergence de la suite vers c :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq N \quad c-h<u_N\leq u_n\leq c\leq c+h$$

Soit $\varepsilon>0$; appliquer la propriété caractéristique avec $h=\varepsilon>0$ justifie l'existence de $m\in\mathbb{N}$. La valeur $N=m$ convient car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée croissante. Dans le cas où $n\geq N$ ces majorations terminent la démonstration :

$$c-h<u_m=u_N\leq u_n\leq c<c+h$$
$$u_n\in]c-h,\, c+h[\qquad |u_n-c|<h=\varepsilon$$

En conclusion $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

□ Une suite croissante qui n'est pas majorée diverge vers $+\infty$.

◊ La première proposition traduit l'hypothèse que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, et la seconde énonce la propriété à démontrer :

$$\forall A\in\mathbb{R} \quad \exists m\in\mathbb{N} \quad u_m>A$$
$$\forall B\in\mathbb{R} \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq N \quad u_n>B$$

Soit $B\in\mathbb{R}$, l'hypothèse appliquée à $A=B$ justifie l'existence de $m\in N$. La valeur $N=m$ convient. Tout entier $n\geq N=m$ vérifie donc ces inégalités $B=A<u_m=u_N\leq u_n$ qui prouvent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

∗ Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante admet une limite au sens large :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\left\{u_n \;/\; n\in\mathbb{N}\right\}\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$$

∗ Les propriétés des suites décroissantes sont analogues.

∗ Toute suite monotone admet donc une limite finie ou infinie :

suite croissante : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée

suite décroissante : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée

∗ Des théorèmes similaires permettent de traiter le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone à partir du rang $p\in\mathbb{N}$, ainsi :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\geq p} u_n \qquad$ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang p

Suites adjacentes et segments emboîtés

Suites adjacentes

• Les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-v_n=0$.

■ Deux suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ qui vérifie cet encadrement :

$$\forall p\in\mathbb{N} \quad u_p\leq \ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n \leq v_p$$

♦ La démonstration de ce théorème applique les propriétés des suites monotones à la suite décroissante $(v_n-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

◊ La suite $(v_n-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car somme des deux suites décroissantes $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et converge vers 0 par hypothèse. d'où ces propriétés successives :

$$0=\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} v_n-u_n \leq v_p-u_p \qquad u_0\leq u_p\leq v_p\leq v_0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0, donc converge, de même la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0, et converge :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ existent dans } \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n-u_n) + \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n-u_n)+u_n$$
$$= \lim_{n\to+\infty} v_n \text{ [noté } = \ell]$$

La validité de cette démonstration provient du fait que toutes ces limites sont bien définies et réelles.

■ Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, et x est un nombre réel vérifiant $u_n\leq x\leq v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors x est la limite commune des deux suites :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n\leq x\leq v_n\right) \implies x=\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

◊ Les théorèmes de comparaison des limites énoncent ces inégalités :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n \leq x \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n \leq x$$
$$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n \geq x \qquad \lim_{n\to+\infty} v_n \geq x \qquad x \leq \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n \leq x$$
$$x = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$$

◊ Une autre démonstration consiste à vérifier que les ensembles U et V des valeurs des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacents, et appliquer la propriété caractéristique des ensembles adjacents :

$$U = \left\{u_n \;/\; n\in\mathbb{N}\right\} \qquad V = \left\{v_n \;/\; n\in\mathbb{N}\right\}$$
$$\sup U = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \inf V$$

Théorème des segments emboîtés

○ Une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles est dite emboîtée dès que $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles est dite croissante dès que $I_n \subset I_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

□ L'intersection d'une suite de segments $([a_n,\, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ emboîtés vérifiant $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ construit deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite commune ℓ, et l'intersection de ces segments est l'ensemble contenant l'unique limite $\{\ell\}$:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante $\quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante $\quad \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,\, b_n] = \{\ell\}$$

◊ La démonstrations s'effectuent par une double inclusion :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad a_n \leq \ell \leq b_n \qquad \ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,\, b_n] \qquad \{\ell\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,\, b_n]$$

La démonstration de l'inclusion réciproque démontre que l'une et l'autre hypothèse $x < \ell$ et $x > \ell$ aboutissent à montrer que x n'est pas dans l'intersection.
Par exemple si $x < \ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$ alors le théorème sur les inégalités strictes dans les limites justifie la première de ces propriétés :

$$x < \lim_{n\to+\infty} a_n \Longrightarrow \big(\exists\, N\in\mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad x < a_n\big)$$
$$x \notin [a_N,\, b_N] \qquad x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,\, b_n]$$

La méthode est la même par rapport à $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour montrer que $x > \ell$ entraîne la même conclusion.

► L'hypothèse sur les segments est nécessaire, l'intersection d'une suite décroissante d'intervalles fermés n'est pas nécessairement un singleton :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n,\, +\infty[\,= \emptyset \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\infty,\, 1/n] = \mathbb{R}_-$$

▷ Aucun nombre réel x n'est dans tous les intervalles $[n,\, +\infty[$ où $n\in\mathbb{N}$:

$$x < \mathrm{E}(x) + 1 = p \quad x \notin [p,\, +\infty[\quad x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n,\, +\infty[\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n,\, +\infty[\,= \emptyset$$

La démonstration de la seconde égalité repose sur les propriétés suivantes ; la dernière exploite aussi le théorème des inégalités strictes dans les limites :

$$\begin{aligned}
x \leq 0 &\Longrightarrow \big(\forall n\in\mathbb{N}^* \quad x \in]-\infty,\, 1/n]\big) \\
&\Longrightarrow x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\infty,\, 1/n] \\
x > 0 &\Longrightarrow \big(\exists\, N\in\mathbb{N}^* \quad \forall n \geq N \quad 1/n < x\big) \\
&\Longrightarrow \big(\exists\, N\in\mathbb{N}^* \quad x \notin]-\infty,\, 1/n]\big) \\
&\Longrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\infty,\, 1/n] \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\infty,\, 1/n] = \mathbb{R}_-
\end{aligned}$$

Réunion d'intervalles

∗ Tout intervalle est réunion croissante de segments, comme l'illustre ces exemples particuliers :

$$]a,\, b[\,= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [a + 1/n,\, b - 1/n] \qquad]-\infty,\, b] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [-n,\, b]$$
$$]a,\, +\infty[\,= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [a + 1/n,\, n]$$

► Toute union croissante d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle I :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n \subset I_{n+1} \qquad I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

⊳ La réunion I vérifie la propriété caractéristique des intervalles. En effet tout couple $(u,v)\in I^2$ vérifie ces propositions :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I \qquad u\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \Longleftrightarrow \big(\exists\, p\in\mathbb{N} \quad u\in I_p\big)$$

$$v\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \Longleftrightarrow \big(\exists\, q\in\mathbb{N} \quad v\in I_q\big)$$

$$n = \max(p,q) \qquad (u,v)\in I_n^2 \qquad [u,\, v] \subset I_n \subset I$$

∗ Les méthodes de démonstration sont similaires à celles appliquées dans les propriétés précédents.
Les extrémités finies ou infinies, incluses ou exclues, de I sont obtenues à partir des limites finies ou infinies des suites monotones des extrémités des intervalles I_n.

► Une réunion croissante d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert.

⊳ Les intervalles comportent éventuellement certains termes infinis :

$$I_n =]a_n,\, b_n[\subset I_{n+1} \qquad -\infty \le a_{n+1} \le a_n \le b_n \le b_{n+1} \le +\infty$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; elle possède donc une limite $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante avec une limite $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$:

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \le a_p \qquad b = \lim_{n\to+\infty} b_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n \ge b_p$$

$$a \notin]a_p,\, b_p[\qquad b \notin]a_p,\, b_p[\qquad]a,\, b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

La démonstration de cette égalité distingue les cas $x \le a$, $x\in]a,\, b[$ et $x \ge b$. Dans les deux cas non bornés x n'est dans aucun intervalle I_n , au contraire dans le cas intermédiaire x est dans l'un des intervalles $]a_p,\, b_p[$ par le théorème des inégalités strictes dans les limites :

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_n < x < b = \lim_{n\to+\infty} b_n \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists\, M\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \ge M \quad a_n < x \\ \exists\, N\in\mathbb{N} \quad \forall\, n \ge N \quad x < b_n \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow a_P < x < b_P$$

$$\Longrightarrow x \in]a_P,\, b_P[$$

$$\Longrightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Dans ces implications $P = \max(M,N)$ et vérifie $P \ge M$ et $P \ge N$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

■ Toute suite bornée possède une suite extraite convergente.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le segment $[a,\, b]$ alors il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

♦ La démonstration du théorème de Bolwano-Weierstrass repose sur la construction par dichotomie de deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui définissent pour tout n un segment $[a_n,\, b_n]$ comportant un nombre infini de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⊠ Les deux propriétés suivantes des ensembles infinis interviennent dans la démonstration du théorème :
— Si un ensemble $E = F \cup G$ est infini, c'est-à-dire n'est pas fini, alors l'ensemble F ou l'ensemble G est infini.
En effet la réunion de deux ensembles finis est fini, et la contraposée correspond à cette première propriété.
— Si l'ensemble E est infini et si $e\in E$ alors l'ensemble $E \setminus \{e\}$ est infini, pour la même raison.

◊ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, elle est supposée être à valeurs dans le segment $[a,\, b]$. Le terme initial de la suite extraite est $\varphi(0) = 0$ et $u_{\varphi(0)} = u_0$.
La première étape consiste à étudier si la suite comporte un nombre infini de termes entre a et $(a+b)/2$, ou entre $(a+b)/2$ et b, pour cela les valeurs initiales et les ensembles $\mathcal{I}_0$ et $\mathcal{S}_0$ sont définis ainsi :

$$a_0 = a \qquad b_0 = b \qquad \varphi(0) = 0$$

$$\mathcal{I}_0 = \left\{ p\in\mathbb{N}^* \;/\; a \le u_p \le \frac{a+b}{2} \right\} \qquad \mathcal{S}_0 = \left\{ p\in\mathbb{N}^* \;/\; \frac{a+b}{2} \le u_p \le b \right\}$$

La réunion $\mathcal{I}\cup\mathcal{S} = \mathbb{N}^*$ est un ensemble infini. L'un au moins des deux ensembles $\mathcal{I}_0$ et $\mathcal{S}_0$ est infini.
Les termes à l'ordre suivant sont choisis en fonction de l'ensemble infini :

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_0 \text{ est infini :} \quad a_1 = a = a_0 \qquad b_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{a_0+b_0}{2} \leq b_0 \\ &\qquad \varphi(1) = \min(\mathcal{I}_0) > \varphi(0) = 0 \\ &\qquad \mathcal{E}_1 = \mathcal{I}_0 \setminus \{\varphi(1)\} \text{ est un ensemble infini} \\ &\mathcal{S}_0 \text{ est infini} \quad a_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{a_0+b_0}{2} \geq a_0 \qquad b_1 = b = b_0 \\ &\qquad \varphi(1) = \min(\mathcal{S}_0) > \varphi(0) = 0 \\ &\qquad \mathcal{E}_1 = \mathcal{S}_0 \setminus \{\varphi(1)\} \text{ est un ensemble infini} \end{aligned}$$

Si les deux ensembles $\mathcal{I}_0$ et $\mathcal{S}_0$ sont infini le choix importe peu, par exemple $\mathcal{I}_0$.
Ce processus se poursuit à l'étape suivante sur $[a_1,\, b_1]$ pour retenir un quart du segment initial $[a,\, b]$ qui contient un nombre infini de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
À chaque étape le segment $[a_n,\, b_n]$ suivant, de diamètre deux fois plus petit, est choisi de façon à ce que le nombre de termes de la suite dans celui-ci reste infini ; de cette façon $\varphi(n)$ est bien défini et il reste un ensemble infini de termes de la suite.
Ces deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, et la suite extraite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans ce segment, elle converge donc vers la même limite.

◊ Plus précisément, l'hypothèse de récurrence énoncée ci-dessous suppose construits les premiers termes des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les premières valeurs de l'application φ et l'ensemble infini $\mathcal{E}_n$:

$$a_0 = a \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0 = b$$

$$0 = \varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n-1) < \varphi(n) \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$$\mathcal{E}_n = \Big\{p > \varphi(n) \;\big/\; a_n \leq u_p \leq b_n\Big\} \text{ est infini} \qquad \mathcal{E}_n = \mathcal{I}_n \cup \mathcal{S}_n$$

$$\mathcal{I}_n = \Big\{p \in \mathcal{E}_n \;/\; u_p \leq \frac{a_n+b_n}{2}\Big\} \qquad \mathcal{S}_n = \Big\{p \in \mathcal{E}_n \;/\; \frac{a_n+b_n}{2} \leq u_p\Big\}$$

L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $n = 0$, avec $\mathcal{E}_0 = \mathbb{N}^*$, comme le détaille le paragraphe précédent.
En supposant l'hypothèse de récurrence vérifiée au rang n, l'un au moins des ensembles $\mathcal{I}_n$ ou $\mathcal{S}_n$ est infini, ce qui permet de définir a_{n+1}, b_{n+1}, $\varphi(n+1)$ et $\mathcal{E}_{n+1}$ de la même façon qu'à l'ordre un :

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_n \text{ est infini :} \quad a_{n+1} = a_n \qquad b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leq b_n \\ &\qquad \varphi(n+1) = \min(\mathcal{I}_n) > \varphi(n) \\ &\qquad \mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{I}_n \setminus \{\varphi(n+1)\} \text{ est un ensemble infini} \\ &\mathcal{S}_n \text{ est infini} \quad a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \geq a_n \qquad b_{n+1} = b_n \\ &\qquad \varphi(1) = \min(\mathcal{S}_0) > \varphi(0) = 0 \\ &\qquad \mathcal{E}_1 = \mathcal{S}_0 \setminus \{\varphi(1)\} \text{ est un ensemble infini} \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{I}_n$ ou $\mathcal{S}_n$ est un sous-ensemble non vide car infini de $\mathbb{N}$, et a donc un plus petit élément $\varphi(n)$. L'hypothèse de récurrence est bien vérifiée à l'ordre $n+1$.
Ainsi les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et la suite extraite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie ces encadrements :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n-a_n}{2} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$$

Cette dernière proposition termine la preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass.

∗ Ce théorème ne doit pas être confondu avec ces autres propriétés des suites convergentes :
— Toute suite convergente est bornée.
— Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente ; une propriété affirmant « toute suite extraite . . . » ne signifie pas la même chose qu'une autre énonçant « il existe une suite extraite . . . ».

∗ Par exemple la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et n'est pas convergente.
Les suites extraites $\big((-1)^{2n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big((-1)^{2n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour les applications $n \mapsto 2n$ et $n \mapsto 2n+1$ sont constantes de valeurs 1 et -1 et sont donc convergentes.
La suite extraite par $n \mapsto 3n$ correspond à la suite initiale car $(-1)^{3n} = (-1)^n$, et elle n'est pas convergente.

Suite et borne supérieure

►▷ Si le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est non vide et majoré alors $\sup A$ est bien défini et il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers $\sup A$:

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^* \quad u_n\in A \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = \sup A$$

▷▷ La démonstration repose sur la propriété caractéristique de $\sup A$ appliqué avec $h = 1/n$ par exemple ; un encadrement démontre la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\sup A$:

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^* \quad \exists\, u_n\in A \quad \sup A - \frac{1}{n} < u_n$$

$$\sup A - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \sup A \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = \sup A \qquad u_n\in A$$

$*$ Un certain nombre de démonstrations d'analyse font intervenir les propriétés des suites réelles comme celle-ci, et sont pour cette raison appelées démonstrations séquentielles.