LES FONCTIONS RÉELLES

Ce chapitre construit les principales propriétés des applications comme le précédent traitait des suites, et traite plus particulièrement de la continuité.
L'ensemble de définition de l'application f est noté $\mathcal{D}$, et doit pour certains théorèmes être un intervalle ou un segment.

■ L'image d'une suite de limite a par une application continue en a est une suite convergente :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \ \textsf{ET} \ \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$$

∗ La contraposée ou une démonstration par l'absurde permettent de démontrer qu'une application n'est pas continue en a en construisant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a dont l'image ne converge pas vers $f(a)$.

∗ Un certain nombre de propriétés des applications continues démontrées dans ce chapitre exploitent ce théorème, notamment combiné au théorème de Bolzano-Weierstrass appliqué aux suites bornées.

Applications monotones

∗ Étudier les limites éventuelles à gauche et à droite en a de f impose que $\mathcal{D}$ vérifient ces propositions au voisinage de a :

$$\forall h>0 \quad]a-h,\, a[\cap\mathcal{D}\neq\emptyset \qquad\qquad \forall h>0 \quad]a,\, a+h[\cap\mathcal{D}\neq\emptyset$$

Dans cette partie toutes les limites à gauche ou à droite supposent que cette condition est vérifiée.

■ Toute application croissante f vérifie cet encadrement aux points et sur les voisinages où l'application f est bien définie quand $a<b$:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \le f(a) \le \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \le \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) \le f(b) \le \lim_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x)$$

Les inégalités sont dans l'autre sens pour une application f décroissante.
Ces limites sont éventuellement infinies aux extrémités de l'ensemble de définition.

∗ Si l'ensemble $\mathcal{D}$ est un intervalle ouvert I alors les limites à gauche

et à droite existent nécessairement dès que $(a,b)\in I$.
Pour un segment la limite à gauche de l'extrémité inférieure et celle à droite de l'extrémité supérieure ne sont pas définies.

♦ La démonstration de cette propriété est similaire à celle de la convergence des suites croissante et majorée.

◊ La preuve que la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = c$ cette borne supérieure consiste à appliquer la propriété caractéristique de la borne supérieure :

$$c = \sup\left\{f(x) \;/\; x\in\mathcal{D} \ \textsf{ET} \ x<a\right\} \le f(a)$$

$$\begin{cases} \qquad\quad \forall\, u\in\mathcal{D}\cap\,]-\infty,\, a[\quad f(u)\le c \\ \forall\, h>0 \quad \exists\, v\in\mathcal{D}\cap\,]-\infty,\, a[\quad c-h<f(v) \end{cases}$$

La démonstration de la limite applique l'hypothèse précédente avec avec $h=\varepsilon>0$ et vérifie que $\eta=a-v>0$ convient :

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\eta>0 \quad \forall x\in[a-\eta,\, a[\cap\mathcal{D} \quad f(x)\in[f(u),\, c]) \subset [c-\varepsilon,\, c+\varepsilon]$$

$$\text{car } a-\eta=v<a \text{ et } c-h=c-\varepsilon<f(v)<f(x)<c$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \sup\left\{f(x) \;/\; x\in\mathcal{D} \ \textsf{ET} \ x<a\right\} \le f(a)$$

La démonstration de la convergence des suites croissantes et celle de la limite à gauche des applications croissantes reposent sur des encadrements similaires :
pour les suites

$$c-h<u_N\le u_n\le c\le c+h \qquad\qquad \text{car } N<c$$

à gauche pour les applications croissantes

$$c-h<f(v)\le f(x)\le c\le c+h \qquad\qquad \text{car } x\in]v,\, a[$$

La preuve de l'existence de la limite à gauche est comparable, et correspond à une borne inférieure :

$$c = \inf\left\{f(x) \;/\; x\in\mathcal{D} \ \textsf{ET} \ a<x\right\} \ge f(a)$$

$$\begin{cases} \qquad\quad \forall\, u\in\mathcal{D}\cap\,]a,\, +\infty[\quad c\le f(u) \\ \forall\, h>0 \quad \exists\, v\in\mathcal{D}\cap\,]a,\, +\infty[\quad f(v)<c+h \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \inf\left\{f(x) \;/\; x\in\mathcal{D} \ \textsf{ET} \ x>a\right\} \ge f(a)$$

Ce premier encadrement provient du fait que f est croissante, toutes les valeurs de l'application f à gauche de a sont majorées par $f(a)$, la borne supérieure est le plus petit des majorants d'où la première inégalité, et de même $f(a)$ minore les valeurs de $f(x)$ pour $x > a$, d'où la seconde inégalité et celle en b :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$$

La comparaison des limites avec la valeur de $f((a+b)/2)$ prouve la dernière inégalité.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) \leq f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \lim_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x)$$

La preuve pour les applications décroissantes est similaire ou applique le résultat précédent à l'application croissante $-f$.

$*$ Les limites à gauche et à droite peuvent être différentes, comme pour cette application croissante sur $]-1,\, 2[$:

$$f(x) = x + \lfloor x \rfloor - \lfloor -x \rfloor \qquad \begin{array}{c|ccccccc|} x & -1 & & 0 & & 1 & & 2 \\ \hline f(x) & \| & x-1 & 0 & x+1 & 3 & x+3 & \| \end{array}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1 \qquad f(0) = 0 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 1 \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = 2$$

➤ Toute application continue de $[0,\, 1]$ dans $[0,\, 1]$ possède un point fixe $c \in [0,\, 1]$, c'est-à-dire vérifiant $f(c) = c$.

▷ L'application $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue et change de signe entre 0 et 1. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g justifie l'existence de c tel que $g(c) = 0$ et $f(c) = c$:

$$\begin{array}{lll} 0 \leq f(0) \leq 1 & g(0) = f(0) - 0 \in [0,\, 1] & g(0) \geq 0 \\ 0 \leq f(1) \leq 1 & g(1) = f(1) - 0 \in [-1,\, 0] & g(1) \leq 0 \end{array}$$

➤ Il existe des applications continues g définies sur un intervalle borné non fermé I qui ne possède pas de point fixe.

▷ L'application $f : x \mapsto x/2$ est définie de $]0,\, 1]$ dans $]0,\, 1]$ et ne possède pas de point fixe sur $]0,\, 1]$.

Applications continues sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires

■ Pour toute application continue f sur un segment $[a,\, b]$ vérifiant $f(a)\, f(b) \leq 0$ il existe $c \in [a,\, b]$ tel que $f(c) = 0$.

$*$ L'hypothèse $f(a)\, f(b) \leq 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposés, ou, dit autrement, que l'application f change de signe entre a et b.

♦ L'existence de c tel que $f(c) = 0$ correspond à la borne supérieure des valeurs de x tel que $f(x)$ est du signe de $f(a)$. L'existence de c repose sur le principe de la coupure.

◇ Cette démonstration détaille le cas $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$ alors $c = a$ ou $c = b$ convient. Le dernier cas $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ se ramène au premier en étudiant l'application $-f$ à la place de f.
Dans le premier cas $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, l'ensemble E est défini ainsi et est non vide car $a \in E$, et est majoré.

$$E = \Big\{ x \in [a,\, b] \;\Big/\; f(x) < 0 \Big\} \qquad c = \sup E \qquad a \in E \qquad a \leq c$$

Un critère séquentiel appliqué à $\sup E$ justifie l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E qui converge vers $c = \sup E$, d'où cette inégalité qui exploite la continuité de f et la conservation des inégalités larges dans les limites.

$$u_n \in E \qquad f(u_n) \leq 0 \qquad f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) \leq 0$$

L'étape suivante justifie $c < b$ pour montrer $f(c) \geq 0$. L'hypothèse f continue en b appliquée à $\varepsilon' = f(b)/2$ justifie $c \leq b - \eta' < b$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in [b-\eta,\, b] \quad f(b) - \varepsilon < f(x) < f(b) + \varepsilon$$

$$\exists \eta' > 0 \quad \forall x \in [b-\eta',\, b] \quad 0 < \frac{f(b)}{2} < f(x)$$

L'application f est donc positive sur $[b-\eta',\, b]$, $E \subset [a,\, b-\eta']$ et $\sup E \leq b - \eta' < b$.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \min(b, c + 1/n)$ est à valeur dans $[a,\, b] \setminus E$, ainsi $f(v_n) \geq 0$; cette suite converge vers c, et la continuité de f aboutit à l'inégalité opposée :

$$v_n \notin E \qquad f(v_n) \geq 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} v_n = c \qquad f(v_n) = \lim_{n \to +\infty} f(v_n) \geq 0$$

La combinaison des deux inégalités $f(c) \leq 0$ et $f(c) \geq 0$ prouve le théorème des valeurs intermédiaires : $f(c) = 0$.

□ Une application continue f sur un segment $[a,\, b] \neq \emptyset$ prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$.
Autrement dit, en notant J est le segment non vide d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$, l'application f vérifie cette proposition :

$$\begin{cases} J = [f(a),\, f(b)] & \text{si } f(a) \leq f(b) \\ J = [f(b),\, f(a)] & \text{sinon} \end{cases} \qquad \forall\, y \in J \quad \exists\, x \in [a,\, b] \quad f(x) = y$$

◊ La démonstration repose sur le signe de l'application auxiliaire $g : x \mapsto f(x) - y$. L'application g change de signe sur $[a,\, b]$ car de produit négatif $g(a)\, g(b) \leq 0$.

■ L'image d'un intervalle I par une application continue est un intervalle.

◊ La démonstration de cette propriété repose sur la caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$:

$$\forall\, (u, v) \in (f(I))^2 \quad \exists\, (a, b) \in I^2 \quad f(a) = u \ \mathsf{ET}\ f(v) = b$$

La propriété précédente justifie $[u,\, v] \subset f(I)$, et prouve que $f(I)$ est un intervalle.

∗ Pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires La fonction f doit être définie en tout point du segment $[a,\, b]$.
La fonction $f : x \mapsto 1/x$ est continue car continue en tout point de son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$, donc continue sur $[-1,\, 1]$, change de signe car $f(-1)\, f(1) = -1 < 0$, et ne possède pas de solution à l'équation $f(c) = 0$.
La fonction continue f n'est pas définie en 0, et f n'est pas une application sur $[-1,\, 1]$.

∗ L'application $\lfloor \bullet \rfloor$ est bien définie sur tout segment de $\mathbb{R}$ et n'est pas continue, l'image du segment $[0,\, 1]$ est l'ensemble $\{0, 1\}$ qui n'est pas un intervalle.

Applications continues et bijectives

⊠ Toute application strictement monotone est injective.

◊ La démonstration suivante le justifie pour une application strictement croissante, la raison est analogue pour les applications strictement décroissantes.

$$\begin{aligned} x \neq y &\Longrightarrow x < y \ \mathsf{OU}\ y < x \\ &\Longrightarrow f(x) < f(y) \ \mathsf{OU}\ f(y) < f(x) \\ &\Longrightarrow f(x) \neq f(y) \end{aligned}$$

■ Toute application continue et strictement monotone sur un intervalle I est bijective, et l'application réciproque de l'intervalle $f(I)$ dans I est continue et monotone de même monotonie.

★ Le graphe de f^{-1} est obtenu à partir de celui de f par symétrie par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

◊ L'application $f : I \mapsto f(I)$ est par construction surjective, et injective car supposée strictement monotone. Elle est donc bijective.
L'application f^{-1} est donc bien définie.

◊ La démonstration suivante justifie que f^{-1} est strictement croissante si f est strictement croissante, pour tout $(x, y) \in I^2$:

$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y) \qquad f(x) \geq f(y) \Longrightarrow x \geq y$ par contraposée

$x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$ car f est injective

$x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)$ en combinant les implications précédentes

$f^{-1}(u) < f^{-1}(v) \Longleftrightarrow u < v$ pour tout $(u, v) \in (f(I))^2$, en prenant $x = f^{-1}(u)$ et $y = f^{-1}(v)$

La démonstration est similaire pour les applications f strictement décroissantes.

◊ La preuve de la continuité de f^{-1} commence par ces encadrements faisant intervenir la stricte monotonie de f et de f^{-1}, et suppose $\varepsilon > 0$:

$$b - \varepsilon < y < b + \varepsilon \Longleftrightarrow f^{-1}(b - \varepsilon) < f^{-1}(y) < f^{-1}(b + \varepsilon)$$
$$\eta = \min(b - f(a - \varepsilon), f(a + \varepsilon) - b) > 0$$

Ces implications terminent la preuve de la continuité de f^{-1} en b :

$$
\begin{aligned}
& b-\eta < y < b+\eta \\
\Longrightarrow\ & b-(b-f(a-\varepsilon)) \leq b-\eta < y < b+\eta \leq b+(f(a+\varepsilon)-b) \\
\Longrightarrow\ & f(a-\varepsilon) < y < f(a+\varepsilon) \\
\Longrightarrow\ & a-\varepsilon \leq f^{-1}(y) \leq a+\varepsilon \\
\Longrightarrow\ & \left|f^{-1}(b)-f^{-1}(y)\right| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Si a est placé à une extrémité de l'intervalle I seule intervient une des inégalités de ces encadrements.
En outre cette démonstration impose que $a-\varepsilon$ et $a+\varepsilon$ soient à valeurs dans l'intervalle I ; dans le cas contraire ces implications doivent être appliquées avec une valeur $\varepsilon' > 0$ strictement plus petite de façon à ce que $a \pm \varepsilon$ soient dans I, l'inégalité finale reste valable :

$$\left|f^{-1}(b)-f^{-1}(y)\right| < \varepsilon' < \varepsilon$$

□ Toute application continue et bijective sur un intervalle est strictement monotone.

◊ Si l'application f n'est pas monotone il existe des points $x < y < z$ de I vérifiant $f(y) > f(x)$ et $f(y) > f(z)$, ou $f(y) < f(x)$ et $f(y) < f(z)$, ce qui signifie que la valeur de $f(y)$ n'est pas comprise entre les valeurs $f(x)$ et $f(z)$.
Dans ces deux cas le théorème des valeurs intermédiaires prouve que f n'est pas injective :

$$
\begin{aligned}
&\exists\, c \in [x,\, y[\quad f(c) = \max(f(x), f(z)) < f(y) \\
&\exists\, d \in]y,\, z] \quad f(d) = \min(f(x), f(z)) > f(y)
\end{aligned}
$$

La valeur de $f(c)$ ou $f(d)$ est celle de $f(x)$ ou $f(y)$.

∗ L'application suivante est bijective sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle et n'est ni continue ni monotone :

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Applications continues sur un segment

■ Toute application continue f sur un segment $[a,\, b] \neq \emptyset$ est bornée et atteint ses bornes notées $\inf\limits_{x\in[a,\, b]} f(x)$ et $\sup\limits_{x\in[a,\, b]} f(x)$:

$$
\begin{aligned}
&\exists\, (u,v) \in [a,\, b]^2 \quad \forall\, x \in I \quad f(u) \leq f(x) \leq f(v) \\
&f(u) = \inf \left\{ f(x) \;/\; x \in [a,\, b] \right\} = \inf_{x\in[a,\, b]} f(x) \\
&f(v) = \sup \left\{ f(x) \;/\; x \in I \right\} = \sup_{x\in[a,\, b]} f(x)
\end{aligned}
$$

♦ Un critère séquentiel associé au théorème de Bolwano-Weierstrass prouve par l'absurde que l'application f est majorée.

◊ Si l'application f n'est pas majorée alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[a,\, b]$ vérifiant $f(u_n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Le théorème de Bolzano-Weierstrass justifie qu'il existe une suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui a une limite $c \in [a,\, b]$.
Ainsi d'une part $f(u_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \geq n$ et $\left(f(u_{\varphi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, et d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_{\varphi(n)}) = f(c)$ car l'application f est supposée continue. D'où la contradiction.
En conclusion l'application f est majorée. Une preuve similaire justifie que f est minorée, et donc f est bornée.

◊ La preuve que f atteint la borne supérieure de ses valeurs sur I exploite aussi le théorème de Bolzano-Weierstrass. L'image $f([a,\, b])$ est majoré et non vide, donc la borne supérieure est bien définie et il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers cette borne supérieure :

$$s = \sup \left\{ f(x) \;/\; a \leq x \leq b \right\} = \sup(f([a,\, b])) = \sup_{x\in[a,\, b]} f(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = s$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $v_n = f(u_n)$ avec $u_n \in [a,\, b]$, et possède une suite extraite qui converge vers $u \in [a,\, b]$.
Ces limites découlent des hypothèses précédentes :

$$
\begin{aligned}
u &= \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} \\
f(u) &= \lim_{n\to+\infty} f(u_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} v_{\varphi(n)} = \lim_{n\to+\infty} v_n = s
\end{aligned}
$$

L'égalité $f(u) = s$ justifie donc que « la borne supérieure est atteinte ».
La méthode est similaire pour la borne inférieure.

■ L'image d'un segment par une application continue est un segment.

◊ L'image d'un segment, qui est un intervalle de type particulier,

est un intervalle d'après une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.
La propriété précédente justifie par ailleurs que l'image d'un segment est bornée et atteint ses bornes.
La combinaison de ces deux résultats justifie que l'image d'un segment par une application continue est un intervalle borné, et atteint ses bornes. Cette image est donc un intervalle fermé et borné, c'est-à-dire un segment.

$*$ L'image par une application continue d'un interalle fermé n'est pas nécessairement fermé, et celle d'un intervalle borné n'est pas nécessairement borné :

$$\arctan \mathbb{R} =]-\pi/2,\ \pi/2[\qquad \tan(]-\pi/2,\ \pi/2[) = \mathbb{R}$$

► Toute application continue et périodique est bornée.

▻ Soit une application f continue et périodique de période $T > 0$.
La restriction continue de l'application f au le segment $[0,\ T]$ est bornée, par le théorème précédent.
Les valeurs de f sur $\mathbb{R}$ sont les mêmes que sur le segment $[0,\ T]$ car $f(x+T) = f(x)$, ainsi $f(\mathbb{R}) = f([0,\ T])$ est un segment, et est donc bornée.

Autour des applications continues

► Les définitions suivantes sont équivalentes et correspondent à la continuité de f en a :

$$\begin{array}{lllll}
(\mathcal{P}_1) & \forall \varepsilon > 0 & \exists \eta > 0 & \forall x \in]a-\eta,\ a+\eta[& |f(x)-f(a)| < \varepsilon \\
(\mathcal{P}_2) & \forall \varepsilon > 0 & \exists \eta > 0 & \forall x \in [a-\eta,\ a+\eta] & |f(x)-f(a)| < \varepsilon \\
(\mathcal{P}_3) & \forall \varepsilon > 0 & \exists \eta > 0 & \forall x \in]a-\eta,\ a+\eta[& |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon \\
(\mathcal{P}_4) & \forall \varepsilon > 0 & \exists \eta > 0 & \forall x \in [a-\eta,\ a+\eta] & |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon
\end{array}$$

▻ Les déductions reliant les quantificateurs et les inclusions d'ensembles dépendent du type du quantificateur, par exemple :

$$\big(\forall x \in [u,\ v] \quad \cdots\big) \Longrightarrow \big(\forall x \in]u,\ v[\quad \cdots\big)$$
$$\big(\exists x \in]u,\ v[\quad \cdots\big) \Longrightarrow \big(\exists x \in [u,\ v] \quad \cdots\big)$$

Ainsi une propriété valable pour tout $x \in [a-\eta,\ a+\eta]$ est valable pour tout $x \in]a-\eta,\ a+\eta[$. Par ailleurs si un résultat vérifie

$|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ alors $|f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$.
Ces arguments justifient ces implications :

$$(\mathcal{P}_2) \Longrightarrow (\mathcal{P}_1) \Longrightarrow (\mathcal{P}_3) \qquad (\mathcal{P}_2) \Longrightarrow (\mathcal{P}_4) \Longrightarrow (\mathcal{P}_3)$$

Il reste donc à démontrer $(\mathcal{P}_3) \Longrightarrow (\mathcal{P}_2)$. La démonstration suppose pour cela $(\mathcal{P}_3)$ et démontre $(\mathcal{P}_2)$.
Soit $\varepsilon_2 > 0$, la propriété $(\mathcal{P}_3)$ est vérifiée pour $\varepsilon_3 = \varepsilon_2/2 > 0$ et justifie l'existence de $\eta_3 > 0$.
La valeur $\eta_2 = \eta_3/2 > 0$ convient à cause de cette inclusion :

$$[a-\eta_2,\ a+\eta_2] = \left[a - \frac{\eta_3}{2},\ a + \frac{\eta_3}{2}\right] \subset]a-\eta_3,\ a+\eta_3[$$
$$\forall x \in [a-\eta_2,\ a+\eta_2] \quad |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2}{2} < \varepsilon_2$$

► Seule la proposition $(\mathcal{Q}_1)$ correspond à la continuité de f en a.

$$\begin{array}{lllll}
(\mathcal{Q}_1) & \forall \varepsilon > 0 & \exists \eta > 0 & \forall x \in [a-\eta,\ a+\eta] & |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon \\
(\mathcal{Q}_2) & \forall \varepsilon \geq 0 & \exists \eta > 0 & \forall x \in [a-\eta,\ a+\eta] & |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon \\
(\mathcal{Q}_3) & \forall \varepsilon > 0 & \exists \eta \geq 0 & \forall x \in [a-\eta,\ a+\eta] & |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon \\
(\mathcal{Q}_4) & \forall \varepsilon \geq 0 & \exists \eta \geq 0 & \forall x \in [a-\eta,\ a+\eta] & |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon
\end{array}$$

▻ Ces propositions avec $\eta = 0$ sont vérifiées pour toute application f :

$$x \in [a-\eta,\ a+\eta] = \{a\} \qquad |f(x)-f(a)| = |f(a)-f(a)| = 0 \leq \varepsilon$$

Les propositions $(\mathcal{Q}_3)$ et $(\mathcal{Q}_4)$ sont bien vérifiées pour toute application f, continue ou non. Ainsi $(\mathcal{Q}_3) \Longleftrightarrow (\mathcal{Q}_4)$.
L'implication $(\mathcal{Q}_2) \Longrightarrow (\mathcal{Q}_1)$ est due au fait qu'une propriété valable pour tout $\varepsilon \geq 0$ est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$.
Une application continue ne vérifie pas nécessairement la proposition $(\mathcal{Q}_2)$. Par exemple l'application $f(x) = x$ est continue, vérifie $(\mathcal{Q}_1)$ et ne vérifie par $(\mathcal{Q}_2)$ pour la valeur $\varepsilon = 0$. La condition $(\mathcal{Q}_2)$ énonce qu'il existe $\eta > 0$ vérifiant cette proposition qui est fausse :

$$\big(\forall x \in [a-\eta,\ a+\eta] \qquad |f(x)-f(a)| \leq 0\big) \quad \text{est fausse}$$
$$\text{Pour } x = a+\eta \neq x : \quad |f(x)-f(a)| = |x-a| = \eta \leq 0 = \varepsilon$$

► Toute application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ est continue.

▻ La démonstraton repose sur la propriété que $\mathbb{Z}$ est discret, tout entier $a \in \mathbb{Z}$ vérifie $]a-1/2,\ a+1/2[\cap \mathbb{Z} = \{a\}$. La démonstration suivante justifie que $\eta = 1/2$ convient donc.

Soit $a\in\mathbb{Z}$ et $\varepsilon>0$, la valeur $\eta=1/2>0$ vérifie ces propriétés :

$$\begin{aligned} & x\in]a-1/2,\, a+1/2[\cap\mathbb{Z}=\{a\} \\ \Longrightarrow\ & x=a \\ \Longrightarrow\ & |f(x)-f(a)|=|f(a)-f(a)|=0<\varepsilon \end{aligned}$$

►► Une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ est continue si et seulement si elle est constante.

▷▷ Toute fonction constante f définie sur $\mathcal{D}$ est continue : par exemple $\eta=1>0$ convient :

$$\forall a\in\mathcal{D}\quad \forall\varepsilon>0\quad \exists\eta>0\quad \forall x\in]a-\eta,\, a+\eta[\cap\mathcal{D} \qquad |f(x)-f(a)|=0<\varepsilon$$

Réciproquement montrons à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires qu'une application continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est constante en raisonnant par l'absurde.
Si l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ n'est pas constante alors il existe deux valeurs $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ telle que $f(u)\neq f(v)$.
Quitte à échanger les rôles de u et v supposons $f(u)<f(v)$. Ces images sont des entiers relatifs et $\mathbb{Z}$ est dicret, ainsi :

$$f(u)<f(u)+1\leq f(v) \qquad f(u)\leq w=f(u)+\frac{1}{2}\leq f(v) \qquad w\notin\mathbb{Z}$$

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f entre u et v justifie qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ vérifiant $f(c)=w\notin\mathbb{Z}$.
Cette conclusion contredit que f n'est pas à valeurs entières, il est impossible que l'application f ne soit pas constante, et donc l'application continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ est constante.

►► Toute application f est continue sur $\mathbb{R}_+$ ayant une limite vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell<1$ possède un point fixe noté $c\in\mathbb{R}_+$.

▷▷ Si $f(0)=0$ alors $c=0$ convient.
La suite suppose $f(0)\neq 0$ dans le but d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à l'application $g:x\mapsto f(x)-x$. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell<1$ justifie qu'il existe un rang $A>0$ à partir duquel $\dfrac{f(x)}{x}<1$:

$$\forall x\in[A,\,+\infty[\quad \frac{f(x)}{x}<1 \qquad \text{c'est-à-dire } f(x)<x$$

En particulier $f(A)<A$ et par ailleurs $f(0)=1>0$; en conclusion l'application $g:x\mapsto f(x)-x$ change de signe sur $[0,\,A]$ et il existe $c\in[0,\,A]\subset\mathbb{R}_+$ tel que $g(c)=0$, $f(c)=c$ et $f(c)/c=1$ car $c\neq 0$.

►► L'application f est continue en a si et seulement si l'image par f de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a est une suite de limite $f(a)$.

$*$ Le théorème de l'image par une application continue d'une suite convergente correspond au sens direct de cette propriété.
La contraposée pour montrer qu'une application n'est pas continue en a à partir d'une suite de limite a dont l'image n'est pas de limite $f(a)$ correspond à la même implication.
L'énoncé précédent énonce en plus la réciproque : Si les images par f de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a convergent vers $f(a)$ alors f est continue en a :

$$\begin{aligned} & \forall\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de limite } a \quad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) \text{ [existe et]} = f(a) \\ & \forall\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n \text{ [existe et]} = a \\ \Longrightarrow\ & \lim_{n\to+\infty} f(u_n) \text{ [existe et]} = f(a) \end{aligned}$$

Par la contraposée de l'implication précédente, si l'application f n'est pas continue en a alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a dont l'image $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$.

▷▷ La démonstration de la réciproque prouve la contraposée précédente. La méthode repose sur un critère séquentiel pour prouver l'existence d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Par hypothèse l'application f n'est pas continue en a :

$$\mathsf{NON}\ \big(\forall\varepsilon>0\quad \exists\eta>0\quad \forall x\in]a-\eta,\, a+\eta[\quad |f(x)-f(a)|<\varepsilon\big)$$

$$\exists\varepsilon_0>0\quad \forall\eta>0\quad \exists x\in]a-\eta,\, a+\eta[\quad |f(x)-f(a)|\geq\varepsilon$$

Pour cette valeur de $\varepsilon_0>0$ et $\eta=1/n>0$ où $n\in\mathbb{N}^*$, il existe donc $x_n\in\mathbb{R}$ vérifiant ces deux propositions et construisant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$a-\frac{1}{n}<x_n<a+\frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n=a \qquad |f(x_n)-f(a)|\geq\varepsilon_0$$

La dernière inégalité contredit $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(a)$. En effet car dans ce cas $|f(x_n)-f(a)|\geq\varepsilon_0$

►► Si l'application f est croissante et continue sur $\mathbb{R}$ et si $A\subset\mathbb{R}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ alors les deux bornes supérieures existent et vérifient cette égalité :

$$f(\sup A) = \sup(f(A))$$

⊳ La monotonie de f démontre une inégalité et la continuité de f l'autre.
Soit $c = \sup A$, donc c est un majorant de A et la croissance de f montre que $f(c)$ est un majorant de $f(A)$ qui est non vide, donc $\sup(f(A)$ existe bien et vérifie cette inégalité : plus petit :

$$\big(\forall\, a \in A \quad a \leq c = \sup A\big) \qquad \big(\forall\, a \in A \quad f(a) \leq f(c)\big)$$
$$\sup(f(A)) \leq f(c) = f(\sup A)$$

Un critère séquentiel permet de construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A dont la limite est $c = \sup A$. L'application f est continue donc la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(c)$.
Ainsi $f(u_n) \in f(A)$ d'où cette inégalité obtenue par passage à la limite :

$$u_n \in A \qquad f(u_n) \in f(A) \qquad f(u_n) \leq \sup(f(A))$$
$$f(\sup A) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) \leq \sup(f(A))$$

En conclusion $f(\sup A) = \sup(f(A))$.
Cette propriété n'est pas valable pour les applications croissantes sans être continue, par exemple avec la partie entière :

$$\lfloor [0,\, 1[\rfloor = \{0\} \qquad \sup(\lfloor [0,\, 1[\rfloor) = 0$$
$$\sup\, [0,\, 1[= 1 \qquad \lfloor \sup\, [0,\, 1[\rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1 > 0$$