

EXERCICES DE PRÉPARATION À LA MPSI

Ces sept exercices sont extraits de livres de « terminale spécialité maths ». Ils ont été choisis pour des étudiants de MPSI ayant été de bons ou très bons lycéens. Ils peuvent les comprendre et les résoudre, de façon autonome ou en travaillant le corrigé joint. Le but de ce travail, si vous le voulez bien, est de préparer dans de bonnes conditions votre rentrée en MPSI.

Lire le corrigé ne suffit pas, vous devez être capable de refaire ces exercices. Les apprendre par coeur est une mauvaise idée, les mathématiques ne sont pas des récitation, mais une restitution de ce que vous avez vraiment compris et assimilé.

Il n'y a aucune honte à travailler sur le corrigé, si le lendemain ou la semaine suivante vous avez en définitive assimilé ces connaissances, ce que vous prouvez en refaisant, « avec un papier et un crayon » l'exercice en entier sans avoir à regarder le corrigé ni interroger une IA. Cet apprentissage ne se fait généralement pas en un jour, il est habituel de devoir s'y reprendre en plusieurs fois, nous ne sommes pas des machines ! N'hésitez pas à reprendre rendez-vous avec vous-même pour recommencer quelques jours plus tard.

J'ai essayé de mettre les explications à votre niveau de sortie du lycée. mais cette feuille est nouvelle sans avoir encore été testée sur des étudiants. Si vous trouvez un point dur que vous ne comprenez pas, il peut être justicieux de « couper-coller » ces quelques lignes dans une IA et avoir une sorte de cours particulier ; par exemple Claude et Mistral proposent des comptes gratuits. J'ai beaucoup de sympathie pour Mistral qui se mesure aux plus grands et dont l'un des trois co-fondateurs est un Brestois passé par cette filière MPSI-MP* du lycée La Pérouse-Kerichen.

Je pense que ce travail vous prendra entre dix et vingt heures, qui doivent être réparties sur au moins une dizaine de jours pour avoir le temps d'assimiler la partie nouveauté de ces exercices. Je m'aperçois après coup qu'il regroupe un grand nombre de tournures d'esprit marquantes dans l'histoire des mathématiques et qui sont maintenant des exemples incontournables.

Faire semblant de faire cette fiche d'exercices en lisant le corrigé sans « crayon à la main » ou en coupant-collant passivement l'énoncé dans une IA est, pour vous, sans progrès ni avenir.

Votre but est d'assimiler le mieux possible ces connaissances, que ce soit des révisions explicites ou des approfondissements originaux de vos cours au lycée.

Bonnes vacances, avec une partie d'efforts intellectuels...

- 1 - Notons F et G deux ensembles disjoints et finis dont les cardinaux sont $\text{card } F = p$ et $\text{card } G = q$. Posons $E = F \cup G$ et déterminer le nombre de sous-ensembles à m éléments de E quand $m \leq \min(p, q)$. En déduire cette égalité de Vandermonde sur les coefficients binomiaux :

$$\binom{p+q}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{p}{k} \binom{q}{m-k}$$

Avec la même méthode en déduire une formule similaire dans le cas général lorsque $m \in \llbracket 0, p+q \rrbracket$, commencer par comparer par exemple les cas $m = 3$ et $m = 7$ quand $p = 4$ et $q = 5$.

En déduire cette autre formulation lorsque $r \leq n$

$$\binom{n}{m} = \sum_{\substack{i+j=m \\ i \leq r, j \leq n-r \\ 0 \leq i, j}} \binom{r}{i} \binom{n-r}{j}$$

- 2 - La suite de Fibonacci $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence :

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Montrer que cette suite vérifie

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

En déduire la partie entière $\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \rfloor$.

- 3 - Calculer, par récurrence, les dérivées successives de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$. En déduire ces dérivées successives où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

$$\left(\frac{1}{x^2} \right)^{(n)} \quad \left(\frac{1}{x+a} \right)^{(n)} \quad \left(\frac{1}{ax+1} \right)^{(n)} \quad (\ln(1+x))^{(n)}$$

Calculer (u, v) et (u', v') dans $\mathbb{R}^2$ indépendant de x qui vérifient ces égalités :

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{u}{x - 1} + \frac{v}{x + 1} \quad \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{u'}{x - 1} + \frac{v'}{x + 1}$$

Déterminer alors ces dérivées successives où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x^2 - 1} \end{pmatrix}^{(n)} \quad \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 - 1} \end{pmatrix}^{(n)} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2 - a^2} \end{pmatrix}^{(n)} \\ \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 - a^2} \end{pmatrix}^{(n)} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2 x^2 - 1} \end{pmatrix}^{(n)} \quad \begin{pmatrix} \frac{x}{a^2 x^2 - 1} \end{pmatrix}^{(n)}$$

4 - Montrer ces encadrements par des fonctions auxiliaires pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \\ 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

Plus généralement démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \leq \ln(1 + x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \\ \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$$

5 - Prouver le premier encadrement, puis démontrer le second par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ à l'aide de factorisations :

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{(2n+1)^2}{4(n+1)^2} \leq \frac{2n+1}{2n+3} \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

6 - Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t}$ par une majoration, puis calculer de deux façons différentes cette intégrale pour en déduire la limite de cette somme :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1 - (1+t) + (t+t^2) - (t^2+t^3) + \cdots + (-1)^n (t^{n-1} + t^n)}{1+t} dt \\ = \int_0^1 \frac{1 - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (t^k + t^{k+1})}{1+t} dt \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$$

7 - Montrer qu'il existe deux tangentes communes aux graphes de $y = \ln x$ et $y = e^x$ de l'application exponentielle et logarithme.