

EXERCICES DE PRÉPARATION À LA MPSI

Notons F et G deux ensembles disjoints et finis dont les cardinaux sont $\text{card}(F) = p$ et $\text{card } G = q$. Posons $E = F \cup G$ et déterminer le nombre de sous-ensembles à m éléments de E quand $m \leq \min(p, q)$. En déduire cette égalité de Vandermonde sur les coefficients du binôme :

$$\binom{p+q}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{p}{k} \binom{q}{m-k}$$

Avec la même méthode en déduire une formule similaire dans le cas général lorsque $m \in \llbracket 0, p+q \rrbracket$, commencer par comparer par exemple les cas $m = 3$ et $m = 7$ quand $p = 4$ et $q = 5$.

En déduire cette autre formulation lorsque $r \leq n$

$$\binom{n}{m} = \sum_{\substack{i+j=m \\ i \leq r, j \leq n-r \\ 0 \leq i, j}} \binom{r}{i} \binom{n-r}{j}$$

- 1 - Un sous-ensemble $E' \subset E$ à m éléments est défini de façon unique par les deux sous-ensembles $F' = E' \cap F$ et $G' = E' \cap G$, le cardinal $\text{card } F' = k$ est dans $\llbracket 0, m \rrbracket$, et dans ce cas $\text{card } G' = m - k$. Ainsi $\text{card } E = p + q$ et le nombre de sous-ensembles de E à m éléments est $\binom{p+q}{m}$

Toutes ces valeurs de k énumèrent tous les cas et tous ces cas sont disjoints. Le nombre de sous-ensembles F' est donc $\binom{p}{k}$ et ceux de G' est $\binom{q}{m-k}$. Tous ces couples (F', G') décrivent de façon unique tous les sous-ensembles de E à m éléments. Le nombre de couples possibles (F', G') lorsque $\text{card } F' = k$ est ainsi $\binom{p}{k} \binom{q}{m-k}$. Toutes les valeurs de $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$ sont possibles et correspondent à des sous-ensembles disjoints de sous-ensembles à m éléments de E , donc :

$$\binom{p+q}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{p}{k} \binom{q}{m-k}$$

- Cette énumération montre directement que dans le premier cas k varie de 0 à $m = 3$, ce qui n'est pas le cas dans le second car les conditions $k \leq p$ et $m - k \leq q$ sont nécessaires. Un sous-ensemble

a toujours moins d'éléments que l'ensemble en entier. Ces deux énumérations exposent le cas particulier $(p, q) = (4, 5)$:

$$m = 3 \quad (k, m-k) \in \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\} \quad \text{avec } k \in \llbracket 0, m \rrbracket$$

$$m = 7 \quad (k, m-k) \in \{(2, 5), (3, 4), (4, 3)\} \quad \text{avec } k \in \llbracket 2, 4 \rrbracket$$

Dans le second cas $k = 0$ et $m - k = 0$ sont impossibles car il n'y a pas assez d'éléments dans G et dans F .

- La méthode est similaire lorsque $m \leq p + q$, avec ces ensembles F' et G' , il est en plus nécessaire de tenir compte que F' est un sous-ensemble de F , donc $0 \leq k = \text{card } F' \leq p$.

De même $0 \leq m - k = \text{card } G' \leq q$. Les conditions sont donc les suivantes, le tout dernier encadrement est obtenu par produit par -1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq k \leq p \\ 0 \leq m - k \leq q \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq k \leq p \\ m - q \leq k \leq m \end{array} \right.$$

Les deux minoration de k doivent être vérifiées, elles aboutissent à $\max(0, m - q) \leq k$. De même pour ces majorations $k \leq \min(m, p)$. En conclusion dans ce cas général :

$$\binom{p+q}{m} = \sum_{k=\max(0, m-q)}^{\min(m, p)} \binom{p}{k} \binom{q}{m-k}$$

Nous remarquons que ces min et max reconstruisent la première formule dans le cas $m \leq \min(p, q)$.

- Dans cette dernière formule r joue le rôle de p donc $n = p + q$ et $q = n - r$. Il en est de même pour les indices $i = k$, donc $j = m - i$ avec les conditions aux bornes sur ces inégalités.

Par exemple cette équivalence avec la condition $i \geq 0$ aboutit à

$$j = m - i \leq n - r \iff i = m - j \geq m - n + r \\ i \geq \max(0, m - n + r)$$

Il en est de même pour l'autre borne $i = k \leq \min(m, p) = \min(m, r)$.

$$i = k \geq \max(0, m - (p + q) + p) = \max(0, m - q)$$

La suite de Fibonacci $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence :

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Montrer que cette suite vérifie

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

En déduire la partie entière $\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \rfloor$.

2 - La suite étudiée est une suite récurrente définie à partir des deux prédécesseurs, la récurrence portera donc sur ces deux prédécesseurs. L'hypothèse de récurrence $P(n)$ où $n \in \mathbb{N}$ sera donc

$$P(n) : u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

L'initialisation de la récurrence porte sur les deux premiers termes et vérifie les deux propositions $P(0)$ et $P(1)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right) &= \frac{1}{\sqrt{5}} (1 - 1) = 0 = u_0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}) \\ &= 1 = u_1 \end{aligned}$$

L'hérédité de cette récurrence suppose les deux hypothèses $P(n)$ et $P(n+1)$ et démontre $P(n+2)$. Ces deux premières lignes rappellent les hypothèses $P(n)$ et $P(n+1)$, et la suite du calcul calcule u_{n+2} et vérifie $P(n+2)$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \\ u_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs ces deux carrés vérifient bien cette relation :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 &= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 &= \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Injecter ce résultat dans l'égalité u_{n+2} termine la preuve de l'hérédité :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité prouve $P(n+2)$ à partir de $P(n)$ et $P(n+1)$, ce qui termine la démonstration de l'hérédité.

Le théorème de récurrence justifie que toutes les propositions $P(n)$ sont vraies, ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

- La partie entière $p = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ de $x \in \mathbb{R}$ est le plus grand des entiers inférieur ou égal à x , ainsi $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x < p+1$, par exemple $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -\pi \rfloor = -4$:

$$3 \leq \pi = 3.1415926 \dots < 4 \quad -4 \leq -\pi = -3.1415926 \dots < -3$$

De façon évidente $u_n \in \mathbb{N}$ car des sommes d'entiers naturels restent des entiers naturels. Par ailleurs remarquons que

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618 \dots \in [0, 1[\quad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \in [0, 1]$$

$$h_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \in [0, 1[$$

Donc, selon la parité de $n = 2p$ ou $n = 2p+1$, $u_n \in \mathbb{N}$ vérifie ces égalités :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2p} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{2p} = h_{2p} \in [0, 1[\\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2p+1} &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{2p} = -h_{2p+1} \in]-1, 0] \end{aligned}$$

$$u_{2p} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2p} - h_{2p}$$

$$u_{2p} \leq u_{2p} + h_{2p} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2p} < u_{2p} + 1$$

$$u_{2p+1} - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2p} - h_{2p+1} < u_{2p+1}$$

Ces encadrements par deux entiers successifs déterminent ces deux parties entières :

$$\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2p} \rfloor = u_{2p} \quad \lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2p+1} \rfloor = u_{2p+1} - 1$$

Une vérification en PYTHON, ici en employant le système de calcul formel SAGE est possible. La commande `floor` calcule la partie entière, et la structure `...`, propre à SAGE, énumère explicitement es listes d'entiers. La fonction `fibonacci` de calcul d'un terme de la suite de Fibonacci est ici programmée en suivant pas à pas sa définition mathématique, de façon dite réursive. Cette fonction ne fonctionne pas et provoque une erreur si $n \in -\mathbb{N}^*$ car elle recherche sans fin à calculer `fibonacci(-1)`, `fibonacci(-2)`, `fibonacci(-3)`, `fibonacci(-4)`, etc.

```
sage: def fibo (n) :
....:     if n <= 1 : return n # fibo(0)=0 et fibo(1)=1
....:     else : return fibo(n-1)+fibo(n-2)
```

```
sage: [fibo (n) for n in [0..15]]
[0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610]
```

```
sage: [floor(((1+sqrt(5))/2)^n/sqrt(5)) for n in[0..15]]
[0,0,1,1,3,4,8,12,21,33,55,88,144,232,377,609]
```

La vérification numérique est valide sur $n \in \llbracket 0, 15 \rrbracket$.

Montrer qu'il existe deux tangentes communes aux graphes de $y = \ln x$ et $y = e^x$ de l'application exponentielle et logarithme.

3 - L'équation de la tangente en $(u, f(u))$ est donnée par la pente de la tangente qui est la dérivée.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - f(u)}{x - u} = f'(u)$$

$$y = (x - u)f'(u) + f(u) = f'(u)x + f(u) - u f'(u)$$

Le but de l'exercice consiste à chercher une même droite $y = ax + b$ telle qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ où cette droite est à la fois l'équation d'une tangente à $y = e^x$ en $x = u \in \mathbb{R}$ et à $y = \ln x$ en $x = v \in \mathbb{R}_+^*$. Le but est de résoudre le système d'équations suivantes en (a, b, u, v)

$$a = \exp'(u) = e^u = \ln' v = \frac{1}{v}$$

$$b = e^u - u e^u = e^u(1 - u) = \ln v - v \ln' v = \ln v - 1$$

Raisonnons par analyse et synthèse, recherchons d'abord les conditions nécessaires sur ces coefficients avant de vérifier que ces éventuelles solutions conviennent effectivement. La première équation en a aboutit directement à $u \in \mathbb{R}$ en fonction de $v \in \mathbb{R}_+^*$. Remplaçons dans la seconde :

$$v = e^{-u} \quad \frac{1}{v} = e^u \quad \ln v = -u \quad u = -\ln v$$

$$b = e^u(1 - u) = \frac{1 + \ln v}{v} = \ln v - 1$$

$$0 = \frac{-\ln v + v \ln v - v - 1}{v}$$

Définissons donc l'application $f : v \mapsto -\ln v + v \ln v - v - 1$, et ensuite construisons son tableau de variations où $\ln 2 \approx 0.693 \dots$.

$$f'(v) = -\frac{1}{v} + \frac{v}{v} + \ln v - 1 = \ln v - \frac{1}{v} \quad f''(v) = \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} > 0$$

x	0	1/8	1/2	1	3/2	2	4	5	$+\infty$
$f''(x)$		+	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow -1$	$\nearrow -$	$\nearrow +$	$\nearrow +$	$\nearrow +$	$\nearrow$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow +$	$\searrow -$	$\searrow -2$	$\searrow -$	$-$	$\nearrow -$	$\nearrow +$	$\nearrow$

$$f'(3/2) = \ln(3/2) - 2/3 < 0$$

$$f'(2) = \frac{2\ln 2 - 1}{2} > 0$$

$$f(1/8) = \frac{21\ln 2 - 9}{8} > 0$$

$$f(1/2) = \frac{\ln 2 - 3}{2} < 0$$

$$f(4) = 6\ln 2 - 5 < 0$$

$$f(5) = 4\ln 5 - 6 > 0$$

La limite à droite en 0 de f est obtenue par le terme prépondérant de $-\ln v$, et la limite de f' s'obtient par les règles usuelles sur l'infini ∞ . En conclusion, il y a deux solutions éventuelles, l'une $v_1 \in]1/8, 1/2[$ et l'autre $v_2 \in]4, 5[$. Ces deux solutions ont été trouvées en reprenant

les équations initiales, sans vérifier que toutes celles-ci ont été prises en compte.

Vérifions maintenant que ces valeurs v_1 et v_2 sont effectivement des solutions, pour cela vérifions ligne à ligne le système d'équation initial avec $v_i > 0$ où $i \in \{1, 2\}$.

$$a = \exp'(u) = e^u = \ln' v = \frac{1}{v}$$

$$b = e^u - ue^u = e^u(1 - u) = \ln v - v \ln' v = \ln v - 1$$

Notons donc $u_i = -\ln v_i$ puis $a_i = 1/v_i$. Les tangentes issues de $x = u_i$ du graphe de $y = e^x$ et de $x = v_i$ du graphe de $y = \ln x$ sont donc parallèles.

L'étude précédente de la fonction f justifie $f(v_i) = 0$, donc l'égalité $e^{u_i}(1 - u_i) = \ln v_i - 1 = b_i$ et ces deux tangentes sont confondues.

Il n'existe pas de formule explicite pour calculer les solutions de cette équation. Appliquons ce code PYTHON de recherche d'une racine par dichotomie pour calculer ces deux approximations numériques avec une dizaine de décimales. La fonction $\ln$ est codée par `log`. Ce code

```
>>> from math import log
>>> def fct (v) : return (v-1)*log(v)-v-1

>>> def dichotomie (a,b,f) :
>>> ya=f(a) ; yb=f(b)
>>> while b-a > 1e-15 :
>>>     c=(a+b)/2 ; yc=f(c)
>>>     if yc == 0 : return c
>>>     elif yc*ya>0 : a=c ; ya=yc
>>>     else : b=c ; yb=yc
>>>     return c
```

```
>> dichotomie (1/8, 1/2, fct), dichotomie (4, 5, fct)
(0.21365245239002234, 4.680498579882905)
```

Une commande SAGE le fait directement par `find_root`

```
sage: def fct(v) : return (v-1)*log(v)-v-1
sage: find_root(fct, 1/8, 1/2), find_root(fct, 4, 5)
(0.21365245239002245, 4.680498579882906)
```

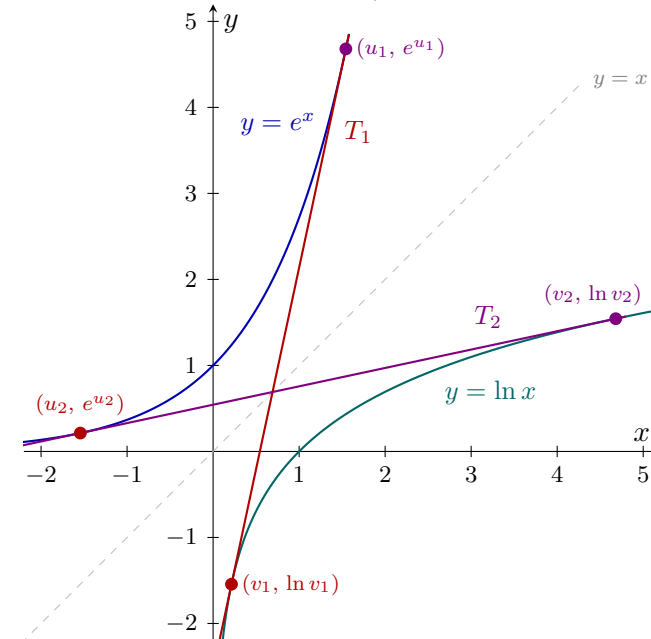
Les 15 premières décimales sont les mêmes...

Remarquons que ce schéma des graphes est symétrique par rapport à la bissectrice principale $y = x$, car $u = \ln v$ est équivalent à $v = e^u$, et les deux applications sont réciproques. Par cette symétrie les deux tangentes sont symétriques et se coupe donc sur la droite $y = x$. Les équations des tangentes qui ont pour équations :

$$T_1 : y = a_1x + b_1 = \frac{x}{v_1} + \ln v_1 - 1$$

$$T_2 : y = a_2x + b_2 = \frac{x}{v_2} + \ln v_2 - 1$$

Vérifions par ailleurs que $\ln v_2 = -\ln v_1$ car les points $(x, y) = (v_1, \ln v_1)$ et $(x', y') = (u_2, e^{u_2})$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, dans cette symétrie les rôles de x et y sont échangés ainsi $x = y'$ et $v_1 = e^{u_2} = \frac{1}{v_2}$, en conclusion $v_1v_2 = 1$ et $\ln v_1 + \ln v_2 = -u_1 - u_2 = 0$, et donc $u_2 = -u_1$



$v_1 \approx 0,2137, \quad v_2 \approx 4,6805, \quad u_2 = \ln v_2 = -\ln v_1 \approx 1,5434$
racines de $f(v) = 0$

Calculer par récurrence les dérivées successives de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$. En déduire ces dérivées successives où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)^{(n)} \quad \left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} \quad \left(\frac{1}{ax+1}\right)^{(n)} \quad (\ln(1+x))^{(n)}$$

Calculer (u, v) et (u', v') dans $\mathbb{R}^2$ indépendant de x qui vérifient ces égalités :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{u}{x-1} + \frac{v}{x+1} \quad \frac{x}{x^2-1} = \frac{u'}{x-1} + \frac{v'}{x+1}$$

Déterminer alors ces dérivées successives où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} \quad \left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(n)} \quad \left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)^{(n)} \\ &\left(\frac{x}{x^2-a^2}\right)^{(n)} \quad \left(\frac{1}{a^2x^2-1}\right)^{(n)} \quad \left(\frac{x}{a^2x^2-1}\right)^{(n)} \end{aligned}$$

4 - Toutes ces fonctions sont dérivables à n'importe quel ordre et sont dites de classe $\mathcal{C}^\infty$, calculons les premières dérivées successives de la fonction inverse. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, il est plus simple d'effectuer ces dérivations par des puissances x^a d'exposant constant a , même si $a < 0$ par $(x^a)' = ax^{a-1}$ que par la fraction $1/x^{-a} = x^a$ par $(1/x^{-a})' = ax^{a-1}/(x^{-a})^2 = ax^{a-1+2a} = ax^{a-1}$. Les dérivations d'ordre n sont notées $f^{(n)}$ à ne pas confondre avec la puissance habituelle f^n définie par des produits en analyse. Les parenthèses en exposant sont indispensables à la bonne compréhension.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= x^{-1} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} = -1 \cdot x^{-2} \\ \left(\frac{1}{x}\right)'' &= \left(-1 \cdot x^{-2}\right)' = (-1) \cdot (-2)x^{-3} = \frac{+2}{x^3} \\ \left(\frac{1}{x}\right)''' &= \left((-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3}\right)' = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3)x^{-4} \\ &= (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4} \\ \left(\frac{1}{x}\right)^{(4)} &= \left((-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4}\right)' \\ &= (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot x^{-5} = (-1)^4 4! x^{-5} \\ &= \frac{(-1)^4 4!}{x^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x}\right)^{(5)} &= \left((-1)^4 4! x^{-5}\right)' = (-1)^5 5! x^{-6} = \frac{(-1)^5 5!}{x^6} \\ &\dots \quad \dots \\ \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} &= \left((-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}\right)' = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(x^{-n}\right)' \\ &= (-1)^n n! x^{-n-1} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \\ \left(\frac{1}{x}\right)^{(n+1)} &= \left((-1)^n n! x^{-n-1}\right)' = (-1)^{n+1} n! \left(x^{-n-1}\right)' \\ &= (-1)^{n+1} (n+1)! x^{-n-2} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

Cette émonstration se fait rigoureusement par récurrence avec l'hypothèse de récurrence $P(n)$:

$$P(n) : \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-n-1} = \left(\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\right)$$

Les premiers calculs ci-dessus justifient l'initialisation, pour $n = 1$ et même $n = 0$ avec les conventions cohérentes et habituelles $f^{(0)} = f$ et $0! = 1$. L'avant dernière ligne est l'hypothèse $P(n)$ à partir de laquelle la dérivation itérée suivante est calculée.

La dérivation de d'ordre n de $1/x^2$ en découle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} &= -\left(\frac{1}{x}\right)' \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(\frac{1}{x}\right)'' = -(-2)x^{-3} \\ \left(\frac{1}{x^2}\right)'' &= -\left(\frac{1}{x}\right)''' = -(-1)^3 3! x^{-4} = (-1)^2 3! x^{-4} \\ \left(\frac{1}{x^2}\right)^{(n)} &= -\left(\frac{1}{x}\right)^{(n+1)} \\ &= -(-1)^{n+1} (n+1)! x^{-n-2} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

Les applications $x \mapsto \frac{1}{a+x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+ax}$ sont des applications composées, dans les deux cas la dérivée des applications affines intervient $(a+x)' = 1$ et $(1+ax)' = a$. Ces dérivations successives ne sont pas de la même forme à cause des produits successifs par a dans les dérivées de $1/(1+ax)$. Ce calcul détaille les premières dérivées de $1/(ax+1)$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{ax+1}\right)' &= \frac{-1}{(ax+1)^2} \cdot a \\
\left(\frac{1}{ax+1}\right)'' &= \left(\frac{-a}{(ax+1)^2}\right)' = -a \left(\frac{1}{(ax+1)^2}\right)' \\
&= -a \cdot \left(\frac{-2}{(ax+1)^3} \cdot a\right) = \frac{+2a^2}{(ax+1)^3} \\
\left(\frac{1}{ax+1}\right)''' &= \left(\frac{+2a}{(ax+1)^3}\right)' = +2a^2 \left(\frac{1}{(ax+1)^3}\right)' \\
&= 2a^2 \cdot \left(\frac{-3}{(ax+1)^4} \cdot a\right) = -3! a^3 \frac{+2a^2}{(ax+1)^3}
\end{aligned}$$

Le facteur en a se retrouve dans toutes les dérivées successives, c'est une constante indépendante de x , d'où ses puissances successives.

Les calculs suivants récapitulent ces dérivées :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(0)} &= \frac{1}{a+x} & \left(\frac{1}{1+ax}\right)^{(0)} &= \frac{1}{1+ax} \\
\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(1)} &= \frac{-1}{(a+x)^2} & \left(\frac{1}{1+ax}\right)^{(1)} &= \frac{-a}{(1+ax)^2} \\
\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(2)} &= \frac{(-1)^2 2!}{(a+x)^3} & \left(\frac{1}{1+ax}\right)^{(2)} &= \frac{(-a)^2 2!}{(1+ax)^3} \\
\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(3)} &= \frac{(-1)^3 3!}{(a+x)^4} & \left(\frac{1}{1+ax}\right)^{(3)} &= \frac{(-a)^3 3!}{(1+ax)^4} \\
&\dots & &\dots \\
\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}} & \left(\frac{1}{1+ax}\right)^{(n)} &= \frac{(-a)^n n!}{(1+ax)^{n+1}} \\
\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(n+1)} &= \left(\frac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}\right)' & \left(\frac{1}{1+ax}\right)^{(n+1)} &= \left(\frac{(-a)^n n!}{(1+ax)^{n+1}}\right)' \\
&= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(a+x)^{n+2}} & &= \frac{(-a)^{n+1} (n+1)!}{(1+ax)^{n+2}}
\end{aligned}$$

Ces démonstrations peuvent aussi se faire de façon plus rigoureuse par une récurrence complètement rédigée.

La dérivation de $\ln(1+x)$ reprend la méthode appliquée à $(1/x^2)^{(n)}$ uniquement pour $n \geq 1$, et n'est pas valable si $n = 0$:

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$$

$$(\ln(1+x))^{(n)} = ((\ln(1+x))')^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}$$

- Les mises au même dénominateur de ces fractions permet dans ces cas très simples de trouver ces constantes :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{u}{x-1} + \frac{v}{x+1} = \frac{u(x+1) + vx - 1}{(x+1)(x-1)} = \frac{(u+v)x + (u-v)}{(x+1)(x-1)}$$

Pour obtenir cette égalité indépendamment de x , il suffit de résoudre ce système :

$$\begin{cases} u+v=0 \\ u-v=1 \end{cases} \iff \begin{cases} v=-u \\ 2u=1 \end{cases}$$

En conclusion $(u, v) = (1/2, -1/2)$ convient :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}$$

La méthode est la même pour l'autre fraction :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2-1} &= \frac{u'}{x-1} + \frac{v'}{x+1} = \frac{u'(x+1) + v'x - 1}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{(u'+v')x + (u'-v')}{(x+1)(x-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u-v=0 \end{cases} \iff (u, v) = (1/2, 1/2)$$

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}$$

- La dérivation de ces fractions en x^2-1 reprend les dérivées précédentes à partir de ces décompositions en éléments simples :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-1} &= \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1} \\
\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} &= \left(\frac{1/2}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1/2}{x+1}\right)^{(n)} \\
&= \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right) \\
\frac{x}{x^2-1} &= \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} \\
\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(n)} &= \left(\frac{1/2}{x-1}\right)^{(n)} + \left(\frac{1/2}{x+1}\right)^{(n)} \\
&= \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right)
\end{aligned}$$

- Les dérivées suivantes reprennent le même genre de décompositions en éléments simples.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-a^2} &= \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{u}{x-a} + \frac{v}{x+a} \\
&= \frac{u(x+a) + v(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{(u+v)x + a(u-v)}{(x-a)(x+a)} \\
\begin{cases} u+v=0 \\ a(u-v)=1 \end{cases} &\iff \begin{cases} v=-u \\ 2au=1 \end{cases} \iff (u,v) = \left(\frac{1}{2a}, \frac{-1}{2a}\right) \\
\frac{1}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)} \\
\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n n!}{2a(x-a)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{2a(x+a)^{n+1}} \\
&= \frac{(-1)^n n!}{2a} \left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}} \right) \\
\frac{x}{x^2-a^2} &= \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{u}{x-a} + \frac{v}{x+a} \\
&= \frac{u(x+a) + v(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{(u+v)x + a(u-v)}{(x-a)(x+a)} \\
\begin{cases} u+v=1 \\ a(u-v)=0 \end{cases} &\iff \begin{cases} v=-u \\ 2u=1 \end{cases} \iff (u,v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2(x-a)} + \frac{1}{2(x+a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n n!}{2(x-a)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(x+a)^{n+1}} \\
&= \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} + \frac{1}{(x+a)^{n+1}} \right)
\end{aligned}$$

La méthode est encore la même pour la fraction suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2x^2-1} &= \frac{1}{(ax-1)(ax+1)} = \frac{u}{ax-1} + \frac{v}{ax+1} \\
&= \frac{u(ax+1) + v(ax-1)}{(ax-1)(ax+1)} = \frac{a(u+v)x + (u-v)}{(ax-1)(ax+1)} \\
\begin{cases} a(u+v)=0 \\ u-v=1 \end{cases} &\iff \begin{cases} v=-u \\ 2u=1 \end{cases} \iff (u,v) = (1/2, -1/2) \\
\frac{1}{a^2x^2-1} &= \frac{1}{2(x-a)} - \frac{1}{2(x+a)} \\
\left(\frac{1}{a^2x^2-1}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n a^{n-1} n!}{2(ax-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n a^{n-1} n!}{2(ax+1)^{n+1}} \\
&= \frac{(-1)^n a^{n-1} n!}{2} \left(\frac{1}{(ax-1)^{n+1}} - \frac{1}{(ax+1)^{n+1}} \right)
\end{aligned}$$

La méthode est la même avec quelques différences de coefficients pour la dernière fraction :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{a^2x^2-1} &= \frac{x}{(ax-1)(ax+1)} = \frac{u'}{ax-1} + \frac{v'}{ax+1} \\
&= \frac{u'(ax+1) + v'(ax-1)}{(ax-1)(ax+1)} \\
&= \frac{a(u'+v')x + (u'-v')}{(ax-1)(ax+1)} \\
\begin{cases} a(u'+v')=1 \\ u'-v'=0 \end{cases} &\iff \begin{cases} v'=u' \\ 2au'=1 \end{cases} \iff (u,v) = \left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right) \\
\frac{x}{a^2x^2-1} &= \frac{1}{2a(ax-1)} + \frac{1}{2a(ax+1)} \\
\left(\frac{x}{a^2x^2-1}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n a^{n-1} n!}{2(ax-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n a^{n-1} n!}{2(ax+1)^{n+1}} \\
&= \frac{(-1)^n a^{n-1} n!}{2} \left(\frac{1}{(ax-1)^{n+1}} + \frac{1}{(ax+1)^{n+1}} \right)
\end{aligned}$$

Montrer ces encadrements par des fonctions auxiliaires pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

Plus généralement démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$$

5 - Notons ces fonctions auxiliaires définies sur $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f : x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$g : x \mapsto x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$$

Ces fonctions sont dérivables et $f'(x)$ et $g'(x)$ se simplifient ainsi :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - (1+x) + x(1+x)}{1+x}$$

$$= \frac{1 - (1+x) + (x+x^2)}{1+x} = \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

$$g'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x) - (x+x^2) + (x^2+x^3) - 1}{1+x}$$

$$= \frac{x^3}{1+x} \geq 0$$

Les tableaux de variations en découlent, puis l'étude de l'encadrement par $f(0) = g(0) = 0$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	+

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	0 ↗	+

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

- L'encadrement suivant impose plusieurs dérivations successives de ces applications auxiliaires sur $\mathbb{R}_+$:

$$f : x \mapsto e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \quad g : x \mapsto 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$$

$$g'(x) = -1 + x + e^{-x} \quad g''(x) = 1 - e^{-x} \quad g'''(x) = e^{-x} > 0$$

$$f(x) = -g(x) + \frac{x^3}{6} \quad f'(x) = -g'(x) + \frac{x^2}{2} = g(x)$$

Les tableaux de variations et toutes les valeurs en 0 terminent la preuve des deux inégalités, en observant que $f'(x) = g(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 0$, donc f est croissante et positive sur $\mathbb{R}_+$.

$$f(0) = 0 \quad f' = g \quad g(0) = 0 = g'(0) = g''(0)$$

x	0	$+\infty$
$g'''(x)$	+	
$g''(x)$	0 ↗	+
$g'(x)$	0 ↗	+
$g(x)$	0 ↗	+

x	0	$+\infty$
$f'(x) = g(x)$	0	+
$f(x)$	0 ↗	+

Ces fonctions sont positives, donc l'encadrement est vérifié.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

- La méthode est la même à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et ces fonctions auxiliaires, reprenons les mêmes notations :

$$f_n : x \mapsto \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$$g_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} - \ln(1+x)$$

Calculons, comme dans le cas précédent, ces dérivées premières, où les termes en x^k s'annulent deux par deux $\dots + x^k - x^k \dots$:

$$\begin{aligned}
f'_n(x) &= \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} x^{k-1} = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k \\
&= \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 + x^3 \dots - x^{2n-2} + x^{2n-1} \\
&= \frac{1 - (1+x) + (x+x^2) - \dots - (x^{2n-2} + x^{2n-1}) + (x^{2n-1} + x^{2n})}{1+x} \\
&= \frac{x^{2n}}{1+x} \geq 0 \\
g'_n(x) &= \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} x^{k-1} - \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k - \frac{1}{1+x} \\
&= 1 - x + x^2 - x^3 \dots - x^{2n-1} + x^{2n} - \frac{1}{1+x} \\
&= \frac{(1+x) - (x+x^2) + \dots - (x^{2n-1} + x^{2n}) + (x^{2n} + x^{2n+1}) - 1}{1+x} \\
&= \frac{x^{2n+1}}{1+x} \geq 0
\end{aligned}$$

En conclusion $f'_n(x) \geq 0$ et $g'_n(x) \geq 0$ et $f_n(0) = g_n(0) = 0$, ainsi ces applications f_n et g_n sont croissantes et donc positives sur $\mathbb{R}_+$, l'encadrement est donc démontré.

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	
$f_n(x)$	0 ↗	+

x	0	$+\infty$
$g'_n(x)$	+	
$g_n(x)$	0 ↗	+

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

- Démontrons par récurrence l'encadrement de e^{-x} par les polynômes associés à f_n et à g_n :

$$\begin{aligned}
f_n : x &\mapsto e^{-x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \\
g_n : x &\mapsto \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} - e^{-x}
\end{aligned}$$

Les encadrements précédents prouvent $f_1(x) \geq 0$ et $g_1(x) \geq 0$. Remarquons aussi que la dérivée du terme constant en x^0 avec $k=0$

est nulle, et, si $k \geq 1$ ces égalités prouvent ainsi $g'_{n+1}(x) = f_n(x)$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^k}{k!}\right)' &= \frac{kx^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\
g_{n+1}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k \frac{x^k}{k!} - e^{-x} \\
g'_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + e^{-x} \\
&= e^{-x} - 1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= e^{-x} - \sum_{j=0}^{2n+1} (-1)^j \frac{x^j}{j!} = f_n(x)
\end{aligned}$$

Il en est de même pour vérifier $f'_n(x) = g_n(x)$. Remarquons que $f_n(0) = 0 = g_n(0)$. La démonstration se fait par récurrence sur ces tableaux de variations :

x	0	$+\infty$
$g(x) = g_1(x) = f'_1(x)$	0 ↗	+
$f_1(x) = g'_2(x)$	0 ↗	+
$g_2(x) = f'_2(x)$	0 ↗	+
$f_2(x) = g'_3(x)$	0 ↗	+

x	0	$+\infty$
$g_{n-1}(x) = f'_{n-1}(x)$	0 ↗	+
$f_{n-1}(x) = g'_n(x)$	0 ↗	+
$g_n(x) = f'_n(x)$	0 ↗	+
$f_n(x) = g'_{n+1}(x)$	0 ↗	+
$g_{n+1}(x) = f'_{n+1}(x)$	0 ↗	+

Cette cascade de tableaux de variations démontre l'encadrement demandé pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$$

L'intégrale $I_n = \int_1^e \frac{t^n}{1+t} dt$.

Prouver le premier encadrement puis démontrer le second par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ à l'aide de factorisations :

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{(2n+1)^2}{4(n+1)^2} \leq \frac{2n+1}{2n+3}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

6 - Étudions donc la différence de deux termes consécutifs de l'encadrement :

$$\begin{aligned} & \frac{2n+1}{2n+3} - \frac{(2n+1)^2}{4(n+1)^2} \\ &= \frac{4(n+1)^2(2n+1) - (2n+1)^2(2n+3)}{4(n+1)^2(2n+3)} \\ &= \frac{(4n^2 + 8n + 4)(2n+1) - (4n^2 + 4n + 1)(2n+3)}{4(n+1)^2(2n+3)} \\ &= \frac{8n^3 + 16n^2 + 8n + 4n^2 + 8n + 4}{4(n+1)^2(2n+3)} \\ &\quad - \frac{8n^3 + 8n^2 + 2n + 12n^2 + 12n + 3}{4(n+1)^2(2n+3)} \\ &= \frac{(8n^3 + 20n^2 + 16n + 4) - (8n^3 + 20n^2 + 14n + 3)}{4(n+1)^2(2n+3)} \\ &= \frac{2n+1}{4(n+1)^2(2n+3)} > 0 \\ &\frac{(2n+1)^2}{4(n+1)^2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(2n+1)^2 - 4n(n+1)}{4(n+1)^2} \\ &= \frac{4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 4n}{4(n+1)^2} = \frac{1}{4(n+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

Ces deux différences sont positives, ce qui termine la preuve du premier encadrement à démontrer.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $P(n)$ cette hypothèse de récurrence.

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

L'encadrement évident $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ justifie que la proposition $P(1)$ pour $n = 1$ est vérifiée, et correspond à l'initialisation de la récurrence.

Démontrons l'hérédité de la proposition. La proposition $P(n+1)$ à démontrer se réécrit ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{2\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ &\leq u_{n+1} = u_n \frac{2n+1}{2(n+1)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} \end{aligned}$$

Tous les termes intervenant sont strictement positifs. Le premier encadrement, sa racine carrée et l'hypothèse de récurrence $P(n)$ prouvent, par produit des deuxièmes et troisièmes encadrement, la proposition $P(n+1)$, à partir de $u_{n+1} = u_n \frac{2n+1}{2(n+1)}$:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} &\leq \frac{(2n+1)^2}{4(n+1)^2} \leq \frac{2n+1}{2n+3} \\ \sqrt{\frac{n}{n+1}} &\leq \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} &\leq u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} &= \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \end{aligned}$$

Ce dernier encadrement est $P(n+1)$.

Le théorème de récurrence permet donc de conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t}$ par une majoration, puis calculer de deux façons différentes cette intégrale pour en déduire la limite de cette somme ;

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{1 - (1+t) + (t+t^2) - (t^2+t^3) + \cdots + (-1)^n (t^{n-1} + t^n)}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (t^k + t^{k+1})}{1+t} dt \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \end{aligned}$$

7 - L'encadrement suivant pour $t \in [0, 1]$ démontre, par intégration, la limite de l'intégrale à partir de $t+1 \geq 1$:

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t} \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t} = 0$$

L'intégrale I_n se calcule de deux façons différentes, en simplifiant d'abord le numérateur ou en simplifiant d'abord la fraction :

$$\begin{aligned} & 1 - (1+t) + (t+t^2) - \dots + (-1)^n(t^{n-1} + t^n) \\ &= (1-1) + (-t+t) + \dots + (-1)^{n-1}(t^{n-1} - t^{n-1}) + (-1)^n t^n \\ &= (-1)^n t^n \quad \text{donc } I_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n t^n dt}{1+t} \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (1+t) + (t+t^2) - \dots + (-1)^n(t^{n-1} + t^n)}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} - 1 + t - t^2 + t^3 + \dots + (-1)^n t^{n-1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \int_0^1 -1 + t - t^2 + t^3 + \dots + (-1)^n t^{n-1} dt \\ &= \left[\ln(1+t) \right]_0^1 + \left[-t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n t^n}{n} \right]_0^1 \\ &= \ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} = I_n \\ & -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2 + I_n \\ & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 - I_n \quad \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln 2 - I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= \ln 2 - 0 = \ln 2 \end{aligned}$$

- Cette même démonstration avec les sommes $\sum \bullet$ est un peu plus concise et habituelle. La seconde ligne applique le changement d'indices $j = k+1$ et donc $k = j-1$, ainsi $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. La troisième ligne sort de la somme et traite en cas particulier les deux extrémités de ces deux sommes, la quatrième change le nom muet de l'indice j en k , de même valeur, et la suivante ligne repose sur la factorisation $(-1)^{k-1} = -(-1)^k$.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (t^k + t^{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k + \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} t^j \\ &= t^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k t^k + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} t^j + (-1)^{n-1} t^n \\ &= t^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k t^k + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} t^k + (-1)^{n-1} t^n \\ &= t^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k t^k - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k t^k + (-1)^{n-1} t^n \\ &= t^0 + \sum_{k=1}^{n-1} ((-1)^k - (-1)^k) t^k + (-1)^{n-1} t^n = 1 + (-1)^{n-1} t^n \end{aligned}$$

Par ailleurs la seconde simplification s'effectue de même :

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (t^k + t^{k+1})}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^k + t^{k+1}}{1+t} \\ &= \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \frac{1+t}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \end{aligned}$$

L'intégration comporte le même changement d'indice que précédemment en $k+1$ résumé en une ligne, puis le passage à la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ permet de conclure :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \\
&= \int_0^1 \frac{1 - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (t^k + t^{k+1})}{1+t} dt = \int_0^1 (-1)^n t^n dt \\
&\quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} - \int_0^1 \frac{1}{1+t} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt \\
&= -\ln 2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -\ln 2
\end{aligned}$$

Les deux méthodes aboutissent au même résultat, la seconde devient petit à petit habituelle aux mathématiciens.