RELATIONS DE COMPARAISON

Ce chapitre suppose généralement que les suites étudiées ne s'annulent pas, et qu'il en est de même des fonctions sur un voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$; en outre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Définition des relations de comparaison

Suites et fonctions négligeables

• Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et notée $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ s'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $u_n = e_n v_n$.

$$\begin{aligned} u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) &\iff \big(\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = e_n v_n\big) \text{ ET } \lim_{n\to+\infty} e_n = 0 \\ &\iff \big(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n|\big) \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \end{aligned}$$

Cette dernière définition avec un quotient limite la notion des suites négligeables aux suites ne s'annulant pas ; au contraire les deux premières définitions permettent de définir en toute généralité des suites négligeables même si certains termes sont nuls.
La deuxième définition détaille l'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} e_n = 0$.

∗ Ces relations de comparaison sont habituelles :

$$n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^2) \qquad \sqrt{n} = \underset{n\to+\infty}{o}(n) \qquad \frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

$$\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}(1) \qquad 1 = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$$

∗ La suite nulle est négligeable devant toute suite : $0 = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

∗ Ces deux propositions sont, par définition, équivalentes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

□ Les suites négligeables vérifient ces propriétés :

$$\begin{aligned} u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \text{ ET } v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n) &\implies u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n) \\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) &\implies \lambda u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n) \text{ ET } v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n) &\implies u_n + v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n) \\ \lambda \neq 0 \text{ ET } u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) &\implies u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(\lambda v_n) \\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) &\implies \frac{1}{v_n} = \underset{n\to+\infty}{o}\Big(\frac{1}{u_n}\Big) \\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) &\implies u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n w_n) \end{aligned}$$

◊ Ces démonstrations s'appliquent aux suites ne s'annulant pas et reposent sur des produits et des quotients de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \text{ ET } \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{w_n} = 0 \implies \frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n}\,\frac{v_n}{w_n} \text{ de limite } 0\times 0 = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = 0 \text{ ET } \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{w_n} = 0 \implies \frac{u_n + v_n}{w_n} = \frac{u_n}{w_n} + \frac{v_n}{w_n} \text{ de limite } 0$$

◊ Ces démonstrations sont aussi possibles en toute généralité sans quotient, par exemple celle de la dernière implication :

$$\begin{aligned} u_n = e_n v_n \text{ ET } \lim_{n\to+\infty} e_n = 0 &\implies u_n w_n = e_n (v_n w_n) \text{ ET } \lim_{n\to+\infty} e_n = 0 \\ &\implies u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n w_n) \end{aligned}$$

• La définition et les propriétés des suites négligeables s'adaptent aux fonctions en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ par l'existence d'une fonction e définie sur un voisinage de a de limite nulle en a et vérifiant $f(x) = e(x)\,g(x)$:

$$\begin{aligned} & f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \\ \iff & \text{il existe un voisinage de } a \text{ sur lequel } f(x) = e(x)\,g(x) \\ & \text{ET } \lim_{x\to a} e(x) = 0 \\ \iff & \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \end{aligned}$$

∗ La notion de fonctions négligeables dépend du voisinage étudié :

$$x = \underset{x\to 0}{o}(1) \qquad x^3 = \underset{x\to 0}{o}(x^2) \qquad 1 = \underset{x\to\pm\infty}{o}(x) \qquad x^2 = \underset{x\to\pm\infty}{o}(x^3)$$

Relation d'équivalence

• Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes et notées par $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement la différence $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$$
$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

La dernière définition se limite aux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulant pas.

◊ Dans le cas où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas la preuve de cette équivalence provient des opérations sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} - 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - v_n}{v_n} = 0$$
$$\Longleftrightarrow u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$$

■ « Être équivalentes » est une relation d'équivalence entre les suites :

réflexive : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

symétrique : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

transitive : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ET $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$

à tâtonnement

◊ La définition des suites négligeables justifie les trois propositions :

réflexive : $u_n - u_n = 0 = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$

symétrique : $u_n - v_n = e_n u_n \qquad v_n = (1-e_n)u_n \qquad u_n = \dfrac{1}{1-e_n}\, v_n$

$$v_n - u_n = 1 - \frac{1}{1-e_n}\, v_n = \frac{1-e_n-1}{1-e_n} v_n = \frac{-e_n}{1-e_n} v_n$$
$$\lim_{n\to+\infty} e_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{-e_n}{1-e_n} = \frac{0}{1-0} = 0$$

transitive : $u_n - v_n = e_n u_n \qquad v_n - w_n = f_n v_n$

$$u_n - w_n = u_n - v_n + v_n - w_n = e_n u_n + f_n v_n$$
$$= e_n u_n + f_n(1-e_n)u_n = (e_n + f_n - e_n f_n)u_n$$
$$\lim_{n\to+\infty} e_n + f_n - e_n f_n = 0$$

◊ Une démonstration plus directe pour les suites ne s'annulant pas repose sur des limites de quotients et de produits :

$\dfrac{u_n}{u_n} = 1$ de limite 1

$\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n}}$ de limite 1 dès que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

$\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\,\dfrac{v_n}{w_n}$ de limite 1 dès que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{w_n} = 1$

∗ Ces suites sont donc équivalentes :

$$n+2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n \qquad (n+1)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 - n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$$
$$\text{par exemple} \quad \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \quad \text{de limite 1}$$

∗ La symétrie de la relation « être équivalentes » autorise l'étude de la limite du plus simple des deux quotients u_n/v_n et v_n/u_n.

□ Réciproquement deux suites équivalentes peuvent caractériser des suites négligeables :

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Longleftrightarrow u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

◊ Les deux définitions sont reliées par ces équivalences :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n + v_n \Longleftrightarrow -u_n = v_n - (u_n + v_n) = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$$
$$\Longleftrightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \qquad \text{par produit par } -1$$

■ L'équivalence des suites est stable par produit, quotient, radicaux et puissances ; les propriétés suivantes sont vérifiées dès que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes et $a\in\mathbb{R}$:

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda v_n$

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ET $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n \Longrightarrow u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n x_n$

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \sqrt{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$ pour des suites à valeurs positives

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow u_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^a$ pour des suites à valeurs positives

◊ Ces propriétés se démontrent comme celles des suites négligeables.

★ L'équivalence des suites n'est pas compatible avec les sommes et les différences, au contraire des produits et des racines :

$$n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2+n \qquad \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\not\sim} n$$

□ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivalente à une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ [respectivement bornée] admet la même limite [respectivement est bornée] :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \text{ ET } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\in\overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \text{ ET } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \Longrightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}$$

◊ La première implication provient de ce produit de limites :

$$v_n = \frac{v_n}{u_n}\,u_n \quad \text{de limite } 1\times\ell = \ell\in\overline{\mathbb{R}}$$

La seconde implication est due au fait qu'une suite convergente est bornée, et que le produit de deux suites bornées est bornée :

$$v_n = u_n \times \frac{v_n}{u_n} \qquad \text{est le produit de deux suites bornées}$$

□ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $\ell\in\mathbb{R}^*$ est équivalente à la suite constante de valeur ℓ.
Deux suites ayant la même limite finie non nulle sont équivalentes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

★ Des suites ont des limites — nulles ou infinies — égales ne sont pas nécessairement équivalentes ; ces exemples illustrent que les hypothèses $\ell \neq 0$ et $\ell \neq \pm\infty$ sont nécessaires :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} = 2 \neq 1 \qquad \frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\not\sim} \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty} n^3 = \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{n^2} = +\infty \neq 1 \qquad n^3 \underset{n\to+\infty}{\not\sim} n^2$$

□ Les exponentielles de deux suites sont équivalentes à cette condition :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0 \Longleftrightarrow e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$$

◊ La continuité de l'exponentielle en 0, pour le sens direct, et celle du logarithme en 1, pour la réciproque, le prouvent par composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{u_n - v_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^0 = 1$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = \ln 1 = 0$$

■ Les logarithmes de suites à valeurs positives vérifient ces propositions :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \text{ ET } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ ET } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n$$

◊ L'écriture sous cette forme du quotient permet d'en calculer la limite :

$$\frac{\ln v_n}{\ln u_n} = \frac{\ln(v_n/u_n) + \ln u_n}{\ln u_n} = \frac{\ln(v_n/u_n)}{\ln u_n} + 1$$

La limite de cette expression est $0/\infty + 1 = 1$ quand n tend vers $+\infty$.

∗ Les limites suivantes justifient que le logarithme de deux suites équivalentes ne sont pas nécessairement équivalentes :

$$\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \qquad 1+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\not\sim} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

• La relation d'équivalence en $a\in\overline{\mathbb{R}}$ de deux fonctions est définie de la même manière et vérifie les mêmes propriétés :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{o}(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

∗ L'équivalence des fonctions dépend du voisinage de a choisi :

$$x^3 - x^2 \underset{x\to0}{\sim} -x^2 \qquad x^3 - x^2 \underset{x\to1}{\sim} x-1 \qquad x^3 - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$$
$$\sinh x \underset{x\to+\infty}{\sim} \cosh x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

∗ La définition même des dérivées énonce ces équivalents :

$$\sin' 0 = \cos 0 = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \qquad \sin x \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

$*$ Les monômes non nuls de plus haut et de plus bas degré d'un polynôme P déterminent deux équivalents simples de P en 0 et en $\pm\infty$:

$$P(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k x^k \qquad a_m \neq 0 \qquad a_n \neq 0 \qquad m \leq n$$

$$P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sum_{k=m}^{n-1} a_k x^k}{x^n} = \lim_{x\to\pm\infty} \sum_{k=m+1}^{n} a_k \frac{1}{x^{n-k}} = 0$$

$$P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_m x^m \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k}{x^m} = \lim_{x\to 0} \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^{k-m} = 0$$

Relation de domination

• Ces conditions équivalentes définissent que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}$$
$$\Longleftrightarrow \big(\exists\, M\in\mathbb{R} \quad \forall\, n\in\mathbb{N} \quad |u_n| \leq M|v_n|\big)$$

Cette dernière équivalence généralise la définition des suites dominées aux suites pouvant s'annuler.

□ Les propriétés des suites bornées entraînent celles suites dominées :

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Longrightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$$
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$$
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \text{ ET } v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n) \Longrightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n)$$
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \text{ ET } v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n) \Longrightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$$
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \text{ ET } v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n) \Longrightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$$
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \Longrightarrow \lambda u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$$
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n) \text{ ET } v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n) \Longrightarrow u_n + v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n)$$

$$\lambda \neq 0 \text{ ET } u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \Longrightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(\lambda v_n)$$
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \Longrightarrow \frac{1}{v_n} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{u_n}\right)$$
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \Longrightarrow u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n w_n)$$
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \text{ ET } w_n = \underset{n\to+\infty}{O}(x_n) \Longrightarrow u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n x_n)$$
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \text{ ET } w_n = \underset{n\to+\infty}{O}(x_n) \Longrightarrow u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n x_n)$$

◊ Un certain nombre de ces propriétés proviennent du fait que toute suites convergente est bornée, et que la somme et le produit de deux suites bornées sont bornés :

$$\lambda \neq 0 \text{ ET } u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \Longrightarrow \frac{1}{\lambda} \in\mathbb{R} \text{ ET } \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}$$
$$\Longrightarrow \left(\frac{u_n}{\lambda\, v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}$$
$$\Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \underset{n\to+\infty}{O}\big((\lambda\, v_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$$

• La définition et les propriétés de la relation de domination s'adaptent aux fonctions en $a\in\overline{\mathbb{R}}$:

$$f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x)) \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée sur un voisinage de } a$$
$$\Longleftrightarrow \big(\exists\, h > 0 \quad \exists\, M\in\mathbb{R} \quad \forall\, x\in[a-h,\, a+h] \quad |f(x)| \leq M|g(x)|\big)$$

Cette dernière équivalence correspond au cas où $a \in \mathbb{R}$; les conditions pour $a = \pm\infty$ sont similaires en remplaçant les intervalles $[a-h,\, a+h]$ par $]-\infty,\, A]$ ou $[A,\, +\infty[$ avec $A\in\mathbb{R}$.

$*$ Comme les relations d'équivalence et les fonctions négligeables, les fonctions dominées dépendent du voisinage choisi :

$$2x^2 \sin x = \underset{x\to 0}{O}(x^3) \qquad 2x^2 \sin x = \underset{x\to+\infty}{O}(x^2)$$
$$2x^2 \sin x = \underset{x\to\pi}{O}(x-\pi)$$

Comparaison des fonctions usuelles

Cas de l'exponentielle, de la puissance et du logarithme

Dans ce paragraphe $(a,\alpha)\in{\mathbb{R}_+^*}^2$ *et* $(b,\beta,c,\gamma)\in\mathbb{R}^4$.

■ Ces limites découlent de la définition de la fonction puissance :

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{pour } a<1 \\ 1 & \text{pour } a=1 \\ +\infty & \text{pour } a>1 \end{cases} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} a^x = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^b = \begin{cases} 0 & \text{pour } b<0 \\ 1 & \text{pour } b=0 \\ +\infty & \text{pour } b>0 \end{cases} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^b = \begin{cases} +\infty & \text{pour } b<0 \\ 1 & \text{pour } b=0 \\ 0 & \text{pour } b>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln^c x = \begin{cases} 0 & \text{pour } c<0 \\ 1 & \text{pour } c=0 \\ +\infty & \text{pour } c>0 \end{cases} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} |\ln x|^c = \begin{cases} 0 & \text{pour } c<0 \\ 1 & \text{pour } c=0 \\ +\infty & \text{pour } c>0 \end{cases}$$

◊ Ces limites intermédiaires facilitent les calculs :

$$0<a<1 : \ \ln a<0 \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln a = -\infty \quad b<0 : \lim_{x\to+\infty} b\ln x = -\infty$$

$$a=1 : \ \ln a=0 \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln a = 0 \quad b=0 : \lim_{x\to+\infty} b\ln x = 0$$

$$a>1 : \ln a>0 \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty \quad b>0 : \lim_{x\to+\infty} b\ln x = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln a = 0$$

Les limites de $\ln^c x$ sont obtenues à partir de celles de x^c en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} |\ln x| = +\infty$$

■ Ces relations de comparaison proviennent des limites précédentes :

$$a^x = \underset{x\to+\infty}{o}(\alpha^x) \iff a<\alpha$$

$$x^b = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\beta) \iff b<\beta \qquad x^b = \underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{o}(x^\beta) \iff b>\beta$$

$$\ln^c x = \underset{x\to+\infty}{o}(\ln^\gamma x) \iff c<\gamma \quad |\ln x|^c = \underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{o}(|\ln x|^\gamma) \iff c<\gamma$$

◊ Ces quotients de puissances aboutissent aux limites précédentes :

$$a^x = \underset{x\to+\infty}{o}(\alpha^x) \iff \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{\alpha^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^x = 0$$
$$\iff \frac{a}{\alpha}<1 \iff a<\alpha$$

$$x^b = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\beta) \iff \lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{x^\beta} = \lim_{x\to+\infty} x^{b-\beta} = 0$$
$$\iff b-\beta<0 \iff b<\beta$$

La méthode est similaire pour les autres limites.

∗ Les propriétés suivantes de ce paragraphe reposent sur ces limites :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty \qquad x = \underset{x\to+\infty}{o}(e^x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \ln x = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$$

□ Ces relations de comparaison en $+\infty$ et à droite en 0 dépendent de a et de b et permettent de calculer certaines limites de forme initialement indéterminée :

$$\text{si } b>0 : \quad \ln x = \underset{x\to+\infty}{o}(x^b) \qquad \ln^c x = \underset{x\to+\infty}{o}(x^b)$$

$$\text{si } a>1 : \quad x = \underset{x\to+\infty}{o}(a^x) \qquad x^b = \underset{x\to+\infty}{o}(a^x)$$

$$\text{si } b<0 : \quad \ln x = \underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{o}(x^b) \qquad |\ln x|^c = \underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{o}(x^b)$$

◊ Les démonstration de ces relations de comparaison en logarithmes reposent sur la composition des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty \qquad \frac{\ln x}{x^b} = \frac{1}{b}\,\frac{\ln(x^b)}{x^b} \qquad \text{de limite 0 en } +\infty$$

$$\text{pour } c>0 \qquad \frac{(\ln x)^c}{x^b} = \left(\frac{\ln x}{x^{b/c}}\right)^c \qquad \text{de limite 0 en } +\infty$$

La méthode est la même pour la deuxième série de relations :

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty$$

$$\frac{x}{a^x} = \frac{x}{\exp(x\ln a)} = \frac{1}{\ln a}\,\frac{x\ln a}{\exp(x\ln a)} \qquad \text{de limite 0 en } +\infty$$

$$\text{pour } b>0 \qquad \frac{x^b}{a^x} = \left(\frac{x}{a^{x/b}}\right)^b = b^b\left(\frac{x/b}{a^{x/b}}\right)^b \qquad \text{de limite 0 en } +\infty$$

■ Ce théorème récapitule ces relations de comparaison en $+\infty$ et en 0 :

$$a^x\,x^b\,\ln^c x = \underset{x\to+\infty}{o}(\alpha^x\,x^\beta\,\ln^\gamma x)$$

$$\iff \begin{cases} \quad a<\alpha \\ \textsf{OU}\ (a=\alpha)\ \textsf{ET}\ (b<\beta) \\ \textsf{OU}\ (a=\alpha)\ \textsf{ET}\ (b=\beta)\ \textsf{ET}\ (c<\gamma) \end{cases}$$

$$x^b\,|\ln x|^c = \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{o}(x^\beta\,|\ln x|^\gamma)$$

$$\iff \begin{cases} \quad b>\beta \\ \textsf{OU}\ (b=\beta)\ \textsf{ET}\ (c<\gamma) \end{cases}$$

◊ Une démonstration repose sur la négation des conditions sur les coefficients ; il reste ensuite à comparer dans ces trois cas le quotient des deux suites produits par les théorèmes précédents :

$$\textsf{NON} \begin{cases} \quad a<\alpha \\ \textsf{OU}\ (a=\alpha)\ \textsf{ET}\ (b<\beta) \\ \textsf{OU}\ (a=\alpha)\ \textsf{ET}\ (b=\beta)\ \textsf{ET}\ (c<\gamma) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \quad \alpha<a \\ \textsf{OU}\ (\alpha=a)\ \textsf{ET}\ (\beta<b) \\ \textsf{OU}\ (\alpha=a)\ \textsf{ET}\ (\beta=b)\ \textsf{ET}\ (\gamma<c) \end{cases} \quad \textsf{OU} \quad \begin{cases} \quad a=\alpha \\ \textsf{ET}\ b=\beta \\ \textsf{ET}\ c=\gamma \end{cases}$$

Lorsque $a<\alpha$ ou $(a=\alpha)\,\textsf{ET}\,(b<\beta)$ ou $(a=\alpha)\,\textsf{ET}\,(b=\beta)\,\textsf{ET}\,(c<\gamma)$ seul le sous-cas $a<\alpha$ ne correspond pas, par quotient, à une propriété déjà énoncée mais au produit de deux relations de comparaisons :

$$\frac{a^x\,x^b\,\ln^c x}{\alpha^x\,x^\beta\,\ln^\gamma x} = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^x x^{b-\beta}\,\ln^{c-\gamma} x = \left(\left(\frac{a}{\alpha}\right)^x x^{b-\beta+1}\right) \times (x^{-1}\ln^{c-\gamma} x)$$

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)^x x^{b-\beta-1} = \frac{x^{b-\beta-1}}{(\alpha/a)^x} \qquad x^{b-\beta-1} = \underset{x\to+\infty}{o}((\alpha/a)^x) \quad \text{car } \alpha/a>1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^x x^{b-\beta-1} = 0$$

$$x^{-1}\,\ln^{c-\gamma} x = \frac{\ln^{c-\gamma} x}{x^1} \quad \text{de limite 0 car } \ln^{c-\gamma} x = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$$

Le produit de ces deux limites termine la démonstration du cas $a<\alpha$.

■ Ces limites découlent des relations de comparaison précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} a^n\,n^b\,\ln^c n = 0 \iff \begin{cases} \quad a<1 \\ \textsf{OU}\ (a=1)\ \textsf{ET}\ (b<0) \\ \textsf{OU}\ (a=1)\ \textsf{ET}\ (b=0)\ \textsf{ET}\ (c<0) \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a^n\,n^b\,\ln^c n = 1 \iff (a=1)\ \textsf{ET}\ (b=0)\ \textsf{ET}\ (c=0)$$

$$\lim_{n\to+\infty} a^n\,n^b\,\ln^c n = +\infty \iff \begin{cases} \quad a>1 \\ \textsf{OU}\ (a=1)\ \textsf{ET}\ (b>0) \\ \textsf{OU}\ (a=1)\ \textsf{ET}\ (b=0)\ \textsf{ET}\ (c>0) \end{cases}$$

◊ La suite constante de valeur 1 correspond à $\left(1^n\,n^0\,\ln^0 n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Les limites nulles ou infinie sont équivalentes à une relation de suite négligeable par rapport à la suite constante de valeur 1.

∗ Les suites $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^b)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\ln^c n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des cas particuliers de la famille de suites $(a^n\,n^b\,\ln^c n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $a=1$, $b=0$ ou $c=0$.

► Calcul de la limite de $(2^x)^{(3^x)}/(3^x)^{(2^x)}$ en $+\infty$.

▷ Le logarithme de cette expression aboutit à des limites de la forme précédente :

$$\ln\left(\frac{(2^x)^{(3^x)}}{(3^x)^{(2^x)}}\right) = 3^x\,\ln(2^x) - 2^x\,\ln(3^x) = 3^x x\,\ln 2 - 2^x\,x\,\ln 3$$

$$= 3^x x\,(\ln 2 - (2/3)^x\,\ln 3)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(2/3)^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\ln 2 - (2/3)^x\,\ln 3 = \ln 2 > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3^x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} 3^x x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{(2^x)^{(3^x)}}{(3^x)^{(2^x)}}\right) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{(2^x)^{(3^x)}}{(3^x)^{(2^x)}} = +\infty$$

Équivalent de la factorielle

■ L'équivalent de Stirling dont une démonstration repose sur un calcul d'intégrales énonce cet équivalent :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

◊ Ce résultat fait intervenir des calculs d'intégrales.

∗ Dès les petites valeurs de n comme 10, le quotient est proche de 1 :

$$\frac{10!}{\sqrt{20\pi}(\frac{10}{e})^{10}} = \frac{3628800}{3598695,618\cdots} = 1,00836\cdots$$

∗ L'équivalent de Stirling énonce un équivalent au coefficient du binôme :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\,(\frac{2n}{e})^{2n}}{(\sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n)^2} = \frac{2\sqrt{\pi n}\,2^{2n}n^{2n}}{e^{2n}}\,\frac{e^{2n}}{2\pi n^{2n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

Exemple d'une forme indéterminée

∗ L'exemple suivant fait intervenir une forme indéterminée d'exponentielle et de puissance étudiée dans ce chapitre.

Applications $\mathcal{C}^\infty$ définie par morceaux

► Les applications f et g sont définies ainsi sur $\mathbb{R}$ où $n\in\mathbb{N}$ et P est une application polynomiale ; le but est de montrer par récurrence que ces applications sont de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{P(x)\,e^{-1/x}}{x^n} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

▷ La limite de l'exponentielle en $-\infty$ justifie la continuité de l'application f en 0 ; la continuité de l'application g en 0 provient des relations de comparaison entre l'exponentielle et les puissances en $-\infty$:

$$f(0) = 0 = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{-1/x} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$$

$$\frac{x^p e^{-1/x}}{x^n} = x^{p-n}e^{-1/x} = u^{n-p}e^{-u} \qquad \text{où } u = 1/x$$

$$\lim_{u\to+\infty} u^{n-p}e^{-u} = 0 = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x^p e^{-1/x}}{x^n} \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{P(x)\,e^{-1/x}}{x^n} = 0$$

La limite associée au polynôme P est une combinaison finie des limites nulles précédentes associées à chaque monôme en x^p. Les applications f et g sont donc continues.

▷ La dérivée f' est continue sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. La limite en 0 de f' est nulle, donc $f'(0) = 0$ et l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\text{si } x < 0 \quad f'(x) = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f'(x) = 0$$

$$\text{si } x > 0 \quad f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2} \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f'(x) = \lim_{u\to-\infty} u^2e^u = 0$$

▷ Plus généralement la dérivée d'une application g est une autre application du même type où n est remplacé par $n+2$; cette dérivée est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ car l'application g est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$\Big(\frac{P(x)e^{-1/x}}{x^n}\Big)' = \frac{(x^2\,P'(x) - nx\,P(x) + P(x))e^{-1/x}}{x^{n+2}} \text{ pour } x > 0$$

$$\Big(\frac{P(x)\,f(x)}{x^n}\Big)' = \frac{(x^2\,P'(x) - nx\,P(x) + P(x))f(x)}{x^{n+2}} \quad \text{si } x>0 \text{ ou } x<0$$

La dérivée g' de g est une application du type de g en remplaçant n par $n+2$ et $P(x)$ par $x^2\,P'(x) - nxP(x) + P(x)$. L'application g est continue en 0 et sa dérivée g' possède donc une limite nulle en 0, ainsi l'application g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$, par passage à la limite.
L'application g' est continue en 0, de dérivée nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et de dérivée continue sur $\mathbb{R}_+^*$; en conclusion l'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
De même l'application g' a la structure d'application g et est donc de classe $\mathcal{C}^1$, ainsi toute application g est de classe $\mathcal{C}^2$.

▷ En supposant comme hypothèse de récurrence sur $p\in\mathbb{N}$ que toute application g est de classe $\mathcal{C}^p$, alors l'application g' qui est de la même forme est donc de classe $\mathcal{C}^p$, ainsi toute application g est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$.
En conclusion toutes les applications g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, et en particulier l'application f qui est une application g de type particulier, avec $P = 1$ et $n = 0$.

∗ L'étude repose sur cette limite de forme indéterminée et les fonctions négligeables :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \qquad x^n = \underset{x\to+\infty}{o}(e^x) \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$