DÉRIVATION

Les fonctions réelles f et g de ce chapitre sont définies sur un intervalle I ni vide ni réduit à un point, $a\in I$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(m,n)\in\mathbb{N}^2$.

Définition et premières propriétés

Dérivée en un point

• La fonction f est dérivable en a si et seulement si la limite suivante notée $f'(a)$ existe et est réelle :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\in\mathbb{R}$$

◊ Cette égalité des limites provient du théorème de composition des limites des applications continues avec $h\mapsto x=a+h$ pour déduire la seconde limite de la première :

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\qquad \varphi(a+h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=f'(a)\qquad \lim_{h\to 0}a+h=a$$
$$\lim_{h\to 0}\varphi(a+h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

La première limite découle réciproquement de la seconde par composition par l'application $x\mapsto h=x-a$.

∗ Les dérivées des applications constantes et de l'identité s'en déduisent :

$$f:x\mapsto c\qquad f'(a)=0\qquad g:x\mapsto x\qquad g'(a)=1$$

∗ La dérivée $f'(a)$ est la limite quand x tend vers a de la pente de la corde entre les points d'abscisse x et a du graphe de f dans un repère orthonormé.

★ Le vecteur tangent au graphe de f au point d'abcisse a aboutit à l'équation de la tangente à la courbe en ce point :

$$\begin{pmatrix}1\\ f'(a)\end{pmatrix}\qquad f'(a)=\frac{y-f(a)}{x-a}\qquad y=f'(a)\,(x-a)+f(a)$$

∗ Une limite infinie de ce taux d'accroissement de f se traduit sur le graphe de f par une tangente verticale, comme pour la fonction $\sqrt{\bullet}$ en 0.

∗ Les dérivées à gauche et à droite de f en a sont ces limites finies :

$$f'_g(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}\qquad f'_d(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$$

□ La fonction f est dérivable en a si et seulement si les dérivées à gauche et à droite existent et sont égales ; dans ce cas :

$$f'_g(a)=f'_d(a)=f'(a)$$

★ De nombreuses démonstrations sur les applications dérivables en a reposent sur la continuité en a de l'application φ représentant ce taux d'accroissement et prolongée par continuité en ce point limite a :

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{pour } x\neq a\\ f'(a) & \text{pour } x=a\end{cases}$$

■ Toute application dérivable en a est continue en a.

◊ Une application dérivable f a donc comme limite $f(a)$ en a :

$$f(x)=f(a)+(x-a)\,\varphi(x)\qquad \lim_{x\to a}f(x)=f(a)+0\times\varphi(a)=f(a)$$

∗ La réciproque est fausse ; la valeur absolue $|\bullet|$ est continue en 0 et n'est pas dérivable en 0 :

$$f(x)=|x|\qquad f'_g(0)=-1\qquad f'_d(0)=1\neq -1$$
f n'est pas dérivable en 0.

Application dérivée

• L'application f est dérivable si et seulement si pour tout $a\in I$ la dérivée $f'(a)$ est définie ; l'application dérivée de f est $f':a\mapsto f'(a)$.

∗ Cette définition est similaire à celle de la continuité ; « dérivable » signifie « dérivable en tout point de l'ensemble de définition ».

• L'application f définie sur I est de classe $\mathcal{C}^1$ et est notée $f\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ si et seulement si la dérivée f' est bien définie sur I et continue.

□ Si l'application dérivable f est paire [repectivement impaire, périodique] alors f' est impaire [repectivement paire, périodique de même période].

◊ Les démonstrations des trois propriétés de ce théorème reposent sur le théorème de composition des limites. La première preuve suppose l'application f dérivable en a et paire :

$$f(u) = f(-u) \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \qquad \lim_{y\to -a} -y = a$$

$$\frac{f(y)-f(-a)}{y-(-a)} = -\frac{f(-y)-f(a)}{(-y)-a}$$

$$\text{de limite } f'(-a) = -f'(a) \text{ en } -a$$

Cette limite est obtenue par la composition de l'application $y \mapsto -y$ continue en $-a$ avec le taux d'accroissement de f en a de limite $f'(a)$.

∗ Cet exemple de fonction qui n'est ni impaire et ni périodique illustre que la réciproque est fausse :

$$f : x \mapsto 1 + x + \sin x$$

$$f'(x) = 1 + \cos x \text{ est paire et } 2\pi\text{-périodique}$$

Opérations et composition des dérivées

Opérations sur les dérivées

■ Si les applications f et g sont dérivables en a alors les applications suivantes sont dérivables en a et ce formulaire en précise les dérivées :

$$(\lambda f)'(a) = \lambda\, f'(a) \qquad (-f)'(a) = -f'(a)$$

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \qquad (fg)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)$$

$$\Big(\frac{1}{f}\Big)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)} \qquad \text{lorsque } f(a) \neq 0$$

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g^2(a)} \qquad \text{lorsque } g(a) \neq 0$$

$$\big(\sqrt{f}\,\big)'(a) = \frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}} \qquad \text{lorsque } f(a) > 0$$

$$(f^n)'(a) = n\, f^{n-1}(a)\, f'(a) \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

◊ La linéarité des limites justifie les premières propriétés :

$$\frac{\lambda\, f(x) - \lambda\, f(a)}{x-a} = \lambda\, \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{de limite } \lambda\, f'(a)$$

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$\text{de limite } f'(a) + g'(a)$$

◊ Les autres égalités proviennent des limites suivantes et exploitent le fait que les applications dérivables en a sont continues en a :

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x)\, g(x) - f(a)\, g(a)}{x-a} \\
&= \frac{f(x)\, g(x) - f(a)\, g(x)}{x-a} + \frac{f(a)\, g(x) - f(a)\, g(a)}{x-a} \\
&= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\, g(x) + f(a)\, \frac{g(x)-g(a)}{x-a}
\end{aligned}$$

$$\text{de limite } f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a) \text{ en } a$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} \\
&= \frac{f(a)-f(x)}{f(x)\, f(a)\, (x-a)} = -\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \frac{1}{f(x)\, f(a)}
\end{aligned}$$

$$\text{de limite } -f'(a)/f^2(a) \text{ quand } x \text{ tend vers } a$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)}}{x-a} \\
&= \frac{\big(\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)}\,\big)\big(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)}\,\big)}{(x-a)\big(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)}\,\big)} \\
&= \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\, \frac{1}{\big(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)}\,\big)}
\end{aligned}$$

$$\text{de limite } f'(a)/\big(2\sqrt{f(a)}\,\big) \text{ en } a$$

Une récurrence prouve la dérivée de la puissance à partir du produit.

Composition des dérivées

■ Si l'application f est dérivable en a et si l'application g est dérivable en $f(a)$ alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a)$$

◊ Une démonstration de cette propriété exploite les limites en a et

$f(a)$ de ces applications φ et ψ :

$$\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x\neq a \\ f'(a) & \text{si } x=a \end{cases} \quad \psi(y)=\begin{cases} \dfrac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} & \text{si } y\neq f(a) \\ g'(f(a)) & \text{si } y=f(a) \end{cases}$$

$$\frac{(g\circ f)(x))-(g\circ f)(a)}{x-a}=\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}$$
$$=\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\psi(f(x))\,\varphi(x)$$
$$\lim_{x\to a}\psi(f(x))\,\varphi(x)=g'(f(a))\,f'(a)$$

Cette égalité entre le premier terme correspondant au taux d'accroissement, et le dernier qui possède une limite est aussi bien valable si $f(x)\neq f(a)$ que si $f(x)=f(a)$.

★ Une notation comme $(x^2)'=2x$ est parfois ambiguë : dans l'exemple ci-dessous la première dérivée correspond à celle de la fonction ln en $2x$, et la seconde à celle d'une application composée en x :

$$\ln'(2x)=\frac{1}{2x} \qquad (\ln(2x))'=\frac{1}{x}$$

Dérivation à valeurs complexes

• La dérivée en $a\in I$ d'une fonction h définie sur $I\subset\mathbb{R}$ à valeurs complexes est obtenue par dérivation des parties réelles et imaginaires :

$$h'(a)=(\operatorname{re}h)'(a)+\mathrm{i}\,(\operatorname{im}h)'(a)$$

□ Le formulaire sur les dérivées des sommes, produits et quotients d'applications dérivables s'étend aux applications dérivables à valeurs complexes ; il en est de même pour le conjugué :

$$\overline{h}\,'(a)=\overline{h'(a)}$$

◊ Cette démonstration note h et k deux applications à valeurs complexes dérivable en a de parties réelles et imaginaires h_x, k_x, h_y et k_y et détermine la dérivée de la somme et du produit de ces applications :

$$(h+k)(t)=h_x(t)+k_x(t)+\mathrm{i}\,(h_y(t)+k_y(t))$$
$$(h+k)'(a)=h'_x(a)+k'_x(a)+\mathrm{i}\,(h'_y(a)+k_y(a))=h'(a)+k'(a)$$

$$(hk)(t)=h(t)\,k(t)$$
$$=h_x(t)\,k_x(t)-h_y(t)\,k_y(t)+\mathrm{i}\,(h_x(t)\,k_y(t)+h_y(t)\,k_x(t))$$
$$(hk)'(a)$$
$$=\ h'_x(a)\,k_x(a)+h_x(a)\,k'_x(a)-h'_y(a)\,k_y(a)-h_y(a)'\,k_y(a)$$
$$+\ \mathrm{i}\,(h'_x(a)\,k_y(a)+h_x(a)\,k'_y(a)+h'_y(a)\,k_x(a)+h_y(a)\,k'_x(a))$$
$$=\ h'_x(a)\,k_x(a)-h'_y(a)\,k_y(a)+\mathrm{i}\,(h'_x(a)\,k_y(a)+h'_y(a)\,k_x(a))$$
$$+\,h_x(a)\,k'_x(a)-h_y(a)'\,k_y(a)+\mathrm{i}\,(h_x(a)\,k'_y(a)+h_y(a)\,k'_x(a))$$
$$=h'(a)\,k(a)+h(a)\,k'(a)$$

► La dérivée de l'application réelle $f:t\mapsto 1/(t-u)$ pour $u\in\mathbb{R}$ donné est $f'(t)=-1/(t-u)^2$. La formule de la dérivée est la même quand $u\in\mathbb{C}$.

▻ Les premières égalités déterminent la partie réelle et la partie imagiaire de l'application précédente, pour une variable t sous-entendue réelle. Les égalités suivantes dérivent les parties réelles et imaginaires puis regroupent les termes pour simplifier la dérivée complexe :

$$\frac{1}{t-u}=\frac{t-\overline{u}}{(t-u)(t-\overline{u})}=\frac{t-\overline{u}}{t^2-(u+\overline{u})t+|u|^2}$$
$$=\frac{t-\operatorname{re}u}{t^2-(u+\overline{u})t+|u|^2}-\mathrm{i}\,\frac{\operatorname{im}u}{t^2-(u+\overline{u})t+|u|^2}$$
$$\Big(\frac{1}{t-u}\Big)'$$
$$=\frac{t^2-(u+\overline{u})t+|u|^2-(t-\operatorname{re}u)(2t-(u+\overline{u}))}{(t^2-(u+\overline{u})t+|u|^2)^2}$$
$$+\mathrm{i}\,\frac{\operatorname{im}u\,(2t-(u+\overline{u}))}{(t^2-(u+\overline{u})t+|u|^2)^2}$$
$$=\frac{t^2-2\,\operatorname{re}u\,t+(\operatorname{re}u)^2+(\operatorname{im}u)^2-2(t-\operatorname{re}u)^2+2\mathrm{i}\ \operatorname{im}u\,(t-\operatorname{re}u)}{(t^2-(u+\overline{u})t+|u|^2)^2}$$
$$=\frac{(t-\operatorname{re}u)^2+(\operatorname{im}u)^2-2(t-\operatorname{re}u)^2+2\mathrm{i}\ \operatorname{im}u\,(t-\operatorname{re}u)}{((t-u)(t-\overline{u}))^2}$$

$$= \frac{-(t-\operatorname{re} u)^2 + 2\mathrm{i}\ \operatorname{im} u\,(t-\operatorname{re} u) - (\mathrm{i}\ \operatorname{im} u)^2}{(t-u)^2(t-\overline{u})^2}$$

$$= -\frac{(t-\operatorname{re} u + \mathrm{i}\ \operatorname{im} u)^2}{(t-u)^2(t-\overline{u})^2} = -\frac{(t-\overline{u})^2}{(t-u)^2(t-\overline{u})^2} = -\frac{1}{(t-u)^2}$$

∗ Ce théorème évite le plus souvent de devoir calculer la partie réelle et imaginaire de chaque application pour en calculer la dérivée.

★ La dérivation des fractions rationnelles à coefficients complexes définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ s'effectue comme celle des fractions rationnelles réelles.

Théorèmes de dérivation sur un segment

Dans cette partie l'application à valeurs réelles f est définie sur $[a,\ b]$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $a<b$.

Théorème de Rolle

■ Le théorème de Rolle énonce :

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ est continue sur } [a,\ b] \\ \mathsf{ET}\ f \text{ est dérivable sur }]a,\ b[\\ \mathsf{ET}\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \big(\exists\, c\in]a,\ b[\quad f'(c)=0\big)$$

◊ Si l'application f n'est pas constante elle possède un maximum ou un minimum atteint en un point $c\in\,]a,\ b[$ de valeur $f(c)\neq f(a)=f(b)$ car f est continue sur le segment $[a,\ b]$.
Si c correspond à un maximum, le signe de ces quotients et l'existence de la dérivée prouvent $f'(c)=0$:

$$\forall\, x\in[a,\ c[\ \neq\emptyset\quad \frac{f(c)-f(x)}{c-x}\geq 0 \qquad \lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} \frac{f(c)-f(x)}{c-x} = f'_g(c)\geq 0$$

$$\forall\, x\in]c,\ b]\neq\emptyset\quad \frac{f(c)-f(x)}{c-x}\leq 0 \qquad \lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} \frac{f(c)-f(x)}{c-x} = f'_d(c)\leq 0$$

$$f'_g(c)=f'_d(c)=f'(c)=0$$

Le fait que c appartient à l'intervalle ouvert $]a,\ b[$ permet de justifier l'existence des limites à gauche $f'_g(c)$ et à droite $f'_d(c)$.
La démonstration est similaire si c est un minimum, seuls changent les signes des taux d'accroissements à gauche et à droite de c.

∗ L'application suivante f est continue sur $[0,\ 1]$, dérivable en tout point de $]0,\ 1[$, mais n'est pas dérivable aux extrémités de l'intervalle :

$$f(x)=\sqrt{x(1-x)}=\sqrt{x-x^2} \qquad f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} \qquad f'(1/2)=0$$

∗ L'application f doit être continue aux extrémités de l'intervalle ; seule l'hypothèse de continuité en 1 de $g: x\mapsto x-\mathrm{E}(x)$ définie sur $[0,\ 1]$ manque, et il n'existe pas $c\in]0,\ 1[$ vérifiant $g'(c)=0$.

∗ En particulier le théorème s'applique si l'application f est définie et dérivable sur un intervalle I et vérifie $f(a)=f(b)$ où $(a,b)\in I^2$; il existe un réel c compris entre a et b donc élément de I, vérifiant $f'(c)=0$.

Théorème des accroissements finis

■ Ce théorème relie la dérivée au taux d'accroissement :

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ est continue sur } [a,\ b] \\ \mathsf{ET}\ f \text{ est dérivable sur }]a,\ b[\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\exists\, c\in]a,\ b[\quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$$

∗ Les deux égalités ci-dessous sont équivalentes :

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Longleftrightarrow f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$$

★ L'énoncé de ce théorème est symétrique par rapport à a et à b : Il existe c strictement compris entre a et b vérifiant l'une et l'autre des égalités précédentes, dans les deux cas $a<b$ et $b<a$.

◊ La preuve du théorème des accroissements finis applique le théorème de Rolle à l'application auxiliaire g :

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g(b)=f(b)-(f(b)-f(a))=f(a)=g(a)$$

$$g'(c)=0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Inégalité des accroissements finis

□ Cette propriété est connue sous le nom d'inégalité des accroissements finis d'ordre un :

$$\left.\begin{array}{l} \quad f \text{ est continue sur } [a,\, b] \\ \textsf{ET}\, f \text{ est dérivable sur }]a,\, b[\\ \textsf{ET}\, \exists\, M \in \mathbb{R}_+ \ \forall\, x \in]a,\, b[\ \left|f'(x)\right| \leq M \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(b)-f(a)| \leq (b-a)M$$

◊ Cette inégalité provient du théorème des accroissements finis.

∗ La dérivée d'une application $f \in \mathcal{C}^1([a,\, b], \mathbb{R})$ est bornée car f' est continue sur le segment $[a,\, b]$:

$$\sup_{x\in[a,\,b]} |f(x)| \in \mathbb{R}_+ \qquad |f(b)-f(a)| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,\,b]} \left|f'(x)\right|$$

∗ Cette propriété se généralise à $a > b$ en remplaçant $b-a$ par $|b-a|$.

□ L'inégalité des accroissements finis s'étend aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \quad h \text{ est continue de } [a,\, b] \text{ dans } \mathbb{C} \\ \textsf{ET}\, h \text{ est dérivable sur }]a,\, b[\\ \textsf{ET}\, \exists\, M \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall\, x \in]a,\, b[\ \ \left|h'(x)\right| \leq M \end{array}\right.$$
$$\Longrightarrow |h(b)-h(a)| \leq (b-a)M$$

◊ La fonction auxiliaire $f = \operatorname{re} g \leq |g| = |h|$ permet d'appliquer l'inégalité des accroissements finis de l'application réelle f pour justifier la propriété correspondante de l'application complexe h. Par ailleurs la dérivabilité des applications g et f provient de celle de h :

$$\theta = -\arg(h(b)-h(a)) \qquad g(x) = e^{\mathrm{i}\,\theta}(h(x)-h(a))$$
$$g(b) = e^{-\arg(h(b)-h(a))}(h(b)-h(a)) = |h(b)-h(a)| \in \mathbb{R}$$
$$g(a) = 0 \qquad g'(x) = e^{\mathrm{i}\,\theta} h'(x)$$
$$f(x) = \operatorname{re} g(x) \in \mathbb{R} \qquad f(a) = 0$$
$$f(b) = |h(b)-h(a)| = f(b)-f(a)$$
$$\left|f'(x)\right| = \left|\operatorname{re}(g'(x))\right| \leq \left|g'(x)\right| = \left|h'(x)\right| \leq M$$
$$|f(b)-f(a)| = |h(b)-h(a)| \leq (b-a)M \qquad \text{car } \left|f'(x)\right| \leq M$$

Cette démonstration suppose $h(a) \neq h(b)$. La propriété recherchée est immédiate à vérifier si $h(a) = h(b)$.

★ Le théorème de Rolle et celui des accroissements finis ne s'appliquent pas aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. L'application $h : t \mapsto e^{\mathrm{i}\,t}$ de $[0,\, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$ est bien dérivable et vérifie $h(0) = h(2\pi) = 1$,

cependant $h'(t) = \mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,t}$ est de module 1 et ne s'annule pas.

Monotonie et dérivation sur un intervalle

■ La monotonie d'une application f définie et dérivable sur un intervalle I ni vide ni réduit à un point dépend de ces conditions :

$(\forall\, x \in I \quad f'(x) \geq 0) \Longleftrightarrow f$ est croissante, sous-entendu au sens large

$(\forall\, x \in I \quad f'(x) \leq 0) \Longleftrightarrow f$ est décroissante

$(\forall\, x \in I \quad f'(x) = 0) \Longleftrightarrow f$ est constante

◊ Le taux d'accroissement d'une application croissante de f est positif, sa limite, qui définit sa dérivée, est donc positive.
Réciproquement le théorème des accroissements finis justifie que toute application à dérivée positive est croissante :

$$x < y \Longrightarrow \exists\, c \in]x,\, y[\quad f(y)-f(x) = (y-x)\, f'(c)$$
$$\Longrightarrow f(y)-f(x) \geq 0$$

La démonstration est similaire pour les applications décroissantes.
Les applications constantes sont croissantes et décroissantes.

□ Le signe d'une application dérivable fournit une condition nécessaire de stricte monotonie :

$$(\forall\, x \in I \quad f'(x) > 0) \Longrightarrow f \text{ est strictement croissante}$$
$$(\forall\, x \in I \quad f'(x) < 0) \Longrightarrow f \text{ est strictement décroissante}$$

◊ La démonstration repose comme la précédente sur le théorème des accroissements finis.

∗ L'application $f : x \mapsto 1/x$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est dérivable et vérifie $f'(x) = -1/x^2 < 0$. Les restrictions $f_{/\mathbb{R}^*_-}$ et $f_{/\mathbb{R}^*_+}$ sont strictement décroissantes car elles vérifient les hypothèses précédentes sur les intervalles $\mathbb{R}^*_-$ et $\mathbb{R}^*_+$.
Au contraire $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle et l'application inverse f n'est pas décroissante même si sa dérivée est négative. en effet $f(-1) = -1 < f(1) = 1$.

■ Si la dérivée f' est positive au sens large et si $\left\{u \in I \;\middle/\; f'(u) = 0\right\}$ est un ensemble fini alors l'application f est strictement croissante.

◊ Ce théorème repose également sur le thérème des accroissements finis.

Soit $(x,y)\in I^2$ tel que $x<y$. L'ensemble F des nombres du segment $]x,\, y[$ où la dérivée f' est nulle est fini et éventuellement vide.
Si l'ensemble F est vide alors f' est à valeurs strictement positives sur l'intervalle $]x,\, y[$ et le théorème des accroissements finis appliqué à $[x,\, y]$ justifie $f(y)-f(x)=(y-x)\,f'(c)>0$.
Si au contraire l'ensemble fini F n'est pas vide, alors il possède un plus petit élément v vérifiant $x<v<y$. La fonction f est dérivable sur I de dérivée strictement positive sur $]x,\, v[$. Le théorème des accroissements finis sur $[x,\, v]$ justifie donc l'existence de c vérifiant $f(x)-f(u)=(x-v)\,f'(c)>0$. Par ailleurs la dérivée est positive ou nulle sur $[v,\, y]$, donc $f(v)\leq f(y)$.
En conclusion $f(x)<f(v)\leq f(y)$, et $f(x)<f(y)$.

▶ L'application $f : x\mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ illustre cette propriété.

▷ La dérivée de f est positive ou nulle et nulle en un seul point 0, l'application f est donc strictement croissante.

▷ Par ailleurs des manipulations algébriques suffisent pour démontrer que f est strictement croissante. Soit $x<y$, étudions le signe de $f(y)-f(x)$:

$$y^3-x^3=(y-x)(y^2+xy+x^2) \qquad y-x>0 \text{ par hypothèse}$$

Le trinome y^2+xy+x^2 est du second degré en y, de signe strictement positif si $\Delta=x^2-4x^2=-3x^2<0$. Donc l'hypothèse supplémentaire $x\neq 0$ aboutit à $y^3-x^3>0$.
Si au contraire $x=0$ alors $y>x=0$ et $y^3>x^3=0$. Dans tous ces cas $x<y$ aboutit à $x^3<y^3$.

Outils pour l'étude des fonctions

Limite d'une dérivée

■ La limite de la dérivée d'une application continue en un point est la dérivée au point limite :

$$\begin{cases} f \text{ est continue en } a \\ \textsf{ET } f' \text{ est définie sur un voisinage de } a \text{ sauf en } a \\ \textsf{ET } \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) \text{ [existe et]} \in\mathbb{R} \end{cases} \qquad \Longrightarrow f'(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)$$

$$\begin{cases} f \text{ est continue en } a \\ \textsf{ET } f' \text{ est définie et continue en tout point autre que } a \\ \textsf{ET } \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) \text{ [existe et]} \in\mathbb{R} \end{cases} \qquad \Longrightarrow f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \textsf{ ET } f'(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)$$

L'expression « f' est définie sur un voisinage de a sauf en a » signifie qu'il existe $h>0$ tel que f' est bien définie sur $[a-h,\, a[$ et $]a,\, a+h]$.

∗ Ce théorème justifie qu'avec ces hypothèses $f'(a)$ existe aussi.

◊ La démonstration repose sur le théorème des accroissements finis ; si « x est proche de a » alors $c\in]a,\, x[$ intervenant dans le théorème des accroissements finis est « proche de a » et permet de conclure.
Plus précisément la première ligne énonce que $f'(x)$ admet une limite $\ell\in\mathbb{R}$ en a, la deuxième applique le théorème des accroissements finis, et la dernière proposition, par une inclusion d'intervalles, justifie que le taux d'accroissement de f en a est de limite ℓ en a, ceci prouve $f'(a)=\ell$:

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\eta>0 \quad \forall\,u\in]a-\eta,\, a+\eta[\setminus\{a\} \quad \left|f'(u)-\ell\right|<\varepsilon$$

$$\forall\,x\in]a-\eta,\, a+\eta[\setminus\{a\} \quad \exists\,c\in]a,\, x[\quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

$$\forall\,x\in]a-\eta,\, a+\eta[\setminus\{a\} \qquad c\in]a,\, x[\,\subset\,]a-\eta,\, a+\eta[\setminus\{a\} \quad \textsf{ET } \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\ell\right|=\left|f'(c)-\ell\right|\leq\varepsilon$$

L'intervalle $]a,\, x[$ sur les deuxièmes et troisièmes lignes doit être changé en $]x,\, a[$ si $x<a$.

∗ Sur le même principe, si une dérivée f' possède une limite infinie en a, alors fonction f n'est pas dérivable en a et son graphe possède une tangente verticale en a.

▶ L'application $f : x\mapsto x^3\,\sin(1/x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

⊳⊳ L'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ est continue. Un passage à la limite dans la majoration de $|f(x)|$ justifie le prolongement par continuité $f(0) = 0$. L'application f ainsi prolongée est donc continue sur $\mathbb{R}$.
L'application f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et f' est continue sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs la dérivée f' admet une limite en 0. L'application f est donc dérivable en 0, de dérivée obtenue par un prolongement par continuité de f'. Ces propositions montrent donc que f est de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f : x \mapsto x^3 \sin(1/x) \qquad |f(x)| \leq x^3$$
$$f'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x) \qquad |f'(x)| \leq 3x^2 + |x|$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0 = f'(0)$$

►► L'application $g : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ est dérivable sans être $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

⊳⊳ Cette application g est continue sur $\mathbb{R}$ après le prolongement par continuité $g(0) = 0$, et est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. La définition de la dérivée permet de déterminer $g'(0) = 0$. L'application g est donc dérivable en tout point de $\mathbb{R}$

$$g : x \mapsto x^2 \sin(1/x) \qquad g'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0 = g'(0)$$

Un critère séquentiel prouve que l'application g' n'est pas continue en 0, et g n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$:

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} g'(u_n) = -1 \neq g'(0)$$

∗ Ces exemples correspondent aux deux principales méthodes pour étudier la dérivabilité d'une fonction en des points particuliers.

Restrictions et prolongements

□ Toute restriction d'une application dérivable [respectivement en a] est dérivable [respectivement en a].

□ Si la restriction à un intervalle ouvert J d'une fonction est dérivable en $a \in J$ alors l'application f est dérivable en a.
Si la restriction à un intervalle ouvert J d'une fonction est dérivable

sur J alors l'application f est dérivable en tout point de J.

∗ L'hypothèse sur les intervalles ouverts est nécessaire ; l'application valeur absolue n'est pas dérivable en 0 et les restrictions de la valeur absolue sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ sont dérivables car $|x| = \pm x$ est de dérivée ± 1.

□ En supposant $a < b < c$, si la restriction de f à $]a, b]$ est dérivable à gauche en b, et si la restriction de f à $[b, c[$ est dérivable à droite en b et a la même dérivée, alors l'application f est dérivable en b.
Ce théorème s'adapte aux intervalles d'extrémités infinies.

◊ Les démonstrations sont similaires à celles faite dans le chapitre précédents pour les théorèmes de continuité car une dérivée est une limite.

►► Dérivabilité de l'application $f : x \mapsto x\,|x|$.

⊳⊳ Les restrictions de f aux intervalles $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$ sont dérivables. L'application f est donc dérivable en tout point des intervalles ouverts $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Les dérivées à gauche et à droite en 0 des restrictions $f_{/\mathbb{R}_-}$ et $f_{/\mathbb{R}_+}$ sont égales et prouvent que f est dérivable en 0. En conclusion f est de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f : x \mapsto x\,|x| \qquad f_{/\mathbb{R}_-}(x) = -x^2 \qquad f_{/\mathbb{R}_+}(x) = x^2$$
$$(f_{/\mathbb{R}_-})'(x) = -2x = 2|x| \qquad f'_g(0) = (f_{/\mathbb{R}_-})'(0) = 0$$
$$(f_{/\mathbb{R}_+})'(x) = 2x = 2|x| \qquad f'_d(0) = (f_{/\mathbb{R}_+})'(0) = 0$$
$$f'_g(0) = f'_d(0) = 0 = f'(0) \qquad f'(x) = 2|x|$$

Applications dérivables et bijectives

Dans ce paragraphe l'application f est définie et dérivable sur un intervalle I ni vide ni réduit à un point.

■ Ce théorème énonce à quelles conditions l'application réciproque f^{-1} de f existe et est dérivable en $b = f(a) \in f(I)$:

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } I \text{ ET } f \text{ est strictement monotone} \\ \text{ET } f \text{ est dérivable en } a \text{ ET } f'(a) \neq 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f^{-1} \text{ existe et est continue de l'intervalle } f(I) \text{ dans } I \\ \text{ET } f^{-1} \text{ est dérivable en } b = f(a) \\ \text{ET } (f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{(f' \circ f^{-1})(b)} \end{array}\right.$$

∗ Ce théorème complète celui d'existence et de continuité d'une application réciproque énoncé dans le chapitre précédent.

★ Il suffit que la dérivée f' soit de signe constant et ne s'annule pas pour vérifier l'hypothèse de stricte monotonie de f.

∗ Le produit $f'(a)\,(f^{-1})'(b) = 1$ peut être retrouvé à partir de la dérivation de l'application composée $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$, et traduit la symétrie par rapport à l'axe $y = x$ des tangentes des graphes de f et f^{-1}.

◊ Le taux d'accroissement de l'application f^{-1} s'exprime à partir de l'application φ associée à f ; la stricte monotonie de l'application f fait que ces fractions sont bien définies, et la limite finale est obtenue par composition des limites car φ est continue en a et f^{-1} en b :

$$\varphi(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{pour } x \neq a \\ f'(a) & \text{pour } x = a \end{array}\right.$$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}}$$

$$= \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))} \qquad \text{de limite } \frac{1}{f'(a)} \text{ quand } y \text{ tend vers } b$$

□ Les hypothèses suivantes entraînent que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \text{ ET } f' \text{ est de signe constant et ne s'annule pas}$$

$$\Longrightarrow f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(I), \mathbb{R}) \text{ ET } f^{-1} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Dérivées successives

Dans cette partie m et n sont des entiers positifs.

Définitions

○ La dérivée seconde $f''(a)$ est la dérivée de l'application f' en a. L'application dérivée seconde f'' est l'application $a \mapsto f''(a)$.

○ De la même manière la dérivée troisième $f'''(a) = f^{(3)}(a)$ est la dérivée de l'application f'' en a ; elle définit l'application dérivée troisième $f^{(3)}$.
Les dérivées successives sont définies par récurrence :

$$f^{(0)} = f \qquad f' = f^{(1)} \qquad f'' = f^{(2)} \qquad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' = (f')^{(n)}$$

$$\begin{aligned} f \text{ est } n+1 \text{ fois dérivable} &\Longleftrightarrow f' \text{ est } n \text{ fois dérivable} \\ &\Longleftrightarrow f^{(n)} \text{ est dérivable} \end{aligned}$$

∗ Les dérivées successives vérifient $f^{(m+n)} = \left(f^{(m)}\right)^{(n)}$.

○ Une application f est de classe $\mathcal{D}^n$ si et seulement si l'application $f^{(n)}$ est bien définie ; ceci signifie que toutes les dérivées successives $f^{(k)}$ existent et sont dérivables lorsque $k \in \{1 \cdots n-1\}$.
Une application f est de classe $\mathcal{C}^n$ si et seulement si l'application $f^{(n)}$ est bien définie et continue.
Une application f dérivable à tout ordre est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$.

○ Les ensembles des applications d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{D}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$ sont notés $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.
Une application continue est dite de classe $\mathcal{C}^0$: $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

□ Ces classes de régularité vérifient les implications suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow f \text{ est } \mathcal{D}^{n+1} \Longrightarrow f \text{ est } \mathcal{C}^n \Longrightarrow f \text{ est } \mathcal{D}^n \Longrightarrow \cdots \\ \cdots \Longrightarrow f \text{ est } \mathcal{C}^1 \Longrightarrow f \text{ est } \mathcal{D}^1 \Longrightarrow f \text{ est } \mathcal{C}^0 \end{aligned}$$

► L'application $f : x \mapsto x|x|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sans être de classe $\mathcal{D}^2$.

▷ L'étude précédente démontre $f'(x) = 2\,|x|$ qui n'est pas une application dérivable car f' n'est pas dérivable en 0.

∗ La fonction $g : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ prolongée par continuité en 0 est de classe $\mathcal{D}^1$ sans être de classe $\mathcal{C}^1$.

Opérations et composition

■ Lorsque les applications f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{D}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$ sur un même ensemble de définition, alors les applications $f+g$, λf et fg sont de la même classe :

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \qquad (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$$

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)} &= f\,g^{(n)} + nf'g^{(n-1)} + \binom{n}{2} f^{(2)}g^{(n-2)} + \cdots \\ &\quad \cdots + \binom{n}{n-2} f^{(n-2)}g^{(2)} + nf^{(n-1)}g' + f^{(n)}g \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)} \qquad \text{est appelée formule de Leibniz.}\end{aligned}$$

En outre si l'application f ne s'annule pas alors l'application $1/f$ est de la même classe que f.

◊ La dérivation est linéaire, il en est de même des dérivées successives.

◊ La preuve de la formule de Leibniz s'effectue par récurrence, à la manière de la démonstration de la formule du binôme. Le cas $n=0$ correspond à la convention $(fg)^{(0)} = fg$, et $n=1$, à la dérivée simple du produit fg.
La suite suppose l'égalité à l'ordre n et la démontre à l'ordre $n+1$:

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= ((fg)')^{(n)} = (f'g+fg')^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f')^{(k)}g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(g')^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\ &\qquad + \binom{n}{0} f^{(0)}g^{(n+1)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)}g^{(0)} \\ &= f^{(0)}g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)}g^{(0)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)}\end{aligned}$$

□ Si les applications f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{D}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$, f de l'intervalle I dans l'intervalle J, et g de J dans $\mathbb{R}$, alors l'application $g \circ f$ est bien définie et est de la même classe que f et g.

◊ La dérivée première $(g \circ f)'$ est constituée par produit et composition de g', f et f'. De même la dérivée d'ordre deux $(g \circ f)''$ est constituée par somme, produits, et compositions de g'', g', f'', f' et f :

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f' \qquad (g \circ f)'' = g'' \circ f \times f'^{\,2} + g' \circ f \times f''$$

Plus généralement la preuve par récurrence justifie que la dérivée d'ordre n de $g \circ f$ est constituée par sommes, produits, et compositions des dérivées successives de f et de g jusqu'à l'ordre n.

□ Dès que l'application f est de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{D}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$, et que f' est de signe constant et ne s'annule pas, alors l'application réciproque f^{-1} existe et est de la même classe que f.

◊ Par exemple si f est de classe $\mathcal{C}^2$, et si en plus f' ne s'annule pas, alors l'application réciproque $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^1$:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \qquad (f^{-1})'' = -\frac{f'' \circ f^{-1} \times (f^{-1})'}{(f' \circ f^{-1})^2} = \frac{-f'' \circ f^{-1}}{(f' \circ f^{-1})^3}$$

Une démonstration par récurrence généralise ces arguments à l'ordre n.

∗ Dans ces dérivées successives de l'application réciproque intervient uniquement le fait que f' ne s'annule pas. les autres dérivées itérées de f peuvent être de valeurs quelconques, y compris nulles.

Mise en œuvre des dérivées

Calcul de dérivées successives

▶ Déterminer les dérivées successives de $f : x \mapsto 2x^2 \sin^2 x$.

▷ L'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la formule de Leibniz permet de calculer sa dérivée n-ème quand $n \geq 3$, sachant que la dérivation d'une expression trigonométrique linéarisée est plus facile que celle d'un produit, et que les dérivées successives de x^2 sont bien connues :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 \sin^2 x = (1-\cos(2x))x^2 \\
(\cos(2x))' &= -2 \sin(2x) = 2 \cos\Big(2x + \frac{\pi}{2}\Big) \\
(\cos(2x))'' &= 4 \cos(2x+\pi) \\
f^{(n)}(x) &= (x^2)^{(n)} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (\cos(2x))^{(n-k)} \\
&= 0 - x^2(\cos(2x))^{(n)} - n \times 2x \times (\cos(2x))^{(n-1)} \\
&\quad - \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \times (\cos(2x))^{(n-2)} \\
&= -2^n x^2 \cos\Big(2x + \frac{n\pi}{2}\Big) - 2^n nx \cos\Big(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\Big) \\
&\quad - n(n-1)2^{n-2} \cos\Big(2x + \frac{(n-2)\pi}{2}\Big) \\
&= 2^{n-2}(n^2-n-4x^2) \cos\Big(2x + \frac{n\pi}{2}\Big) \\
&\quad - 2^n nx \cos\Big(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\Big) \\
&= 2^{n-2}(n^2-n-4x^2) \cos\Big(2x + \frac{n\pi}{2}\Big) \\
&\quad - 2^n nx \sin\Big(2x + \frac{n\pi}{2}\Big)
\end{aligned}$$

▶ Déterminer les dérivées successives de ces fractions :

$$\frac{1}{1+x} \qquad \frac{1}{1-x} \qquad \frac{1}{1-x^2} \qquad \frac{x}{1-x^2}$$

▷ Les deux premières fractions correspondent à des puissances négatives d'application affine, d'où les premières dérivées successives :

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad \Big(\frac{1}{1+x}\Big)' = (-1)(1+x)^{-2} = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$\Big(\frac{1}{1+x}\Big)'' = (-1)((1+x)^{-2})' = (-1)(-2)(1+x)^{-3} = \frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3}$$

$$\Big(\frac{1}{1+x}\Big)^{(3)} = (-1)(-2)((1+x)^{-3})' = (-1)^3\, 3!\,(1+x)^{-4} = \frac{(-1)^3\, 3!}{(1+x)^4}$$

La première dérivée d'ordre n semble être celle-ci :

$$\Big(\frac{1}{1+x}\Big)^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Une démonstration par récurrence justifie ce résultat déjà vérifié pour $n \in \{0,1,2,3\}$. Il reste à montrer à partir de cette hypothèse à l'ordre n que la dérivée à l'ordre $n+1$ correspond bien :

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{1+x}\Big)^{(n+1)} &= \Big(\frac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}}\Big)' = (-1)^n\, n!\,((1+x)^{-n-1})' \\
&= (-1)^n\, n!\,(-1)(n+1)(1+x)^{-n-2} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}
\end{aligned}$$

▷ La deuxième dérivée est une application composée similaire, sans coefficient en $(-1)^n$ à cause terme $-x$:

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{1-x}\Big)' &= ((1-x)^{-1})' = (1-x)'(1-x)^{-2} \\
&= -\frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{+1}{(1-x)^2} \\
\Big(\frac{1}{1-x}\Big)'' &= ((1-x)^{-2})' = (-1)(-2)(1-x)^{-3} = \frac{+1 \cdot 2}{(1-x)^3} \\
\Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{(3)} &= 1 \cdot 2\,((1-x)^{-3})' = 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (1-x)^{-4} \\
&= \frac{+3!}{(1-x)^4}
\end{aligned}$$

La récurrence est similaire, l'hypothèse est vérifiée pour $n \in [\![0,3]\!]$; la preuve la suppose à l'ordre n et la démontre à l'ordre $n+1$:

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{(n)} &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \\
\Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{(n+1)} &= \Big(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\Big)' = n!((1-x)^{-n-1})' \\
&= n!\,(-1)(-n-1)(1+x)^{-n-2} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}
\end{aligned}$$

⊳ Les autres dérivées en découlent par somme et différence :

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{2}{1-x^2} \qquad \frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}=\frac{2x}{1-x^2}$$
$$\frac{1/2}{1-x}+\frac{1/2}{1+x}=\frac{1}{1-x^2} \qquad \frac{1/2}{1-x}-\frac{1/2}{1+x}=\frac{x}{1-x^2}$$
$$\Big(\frac{1}{1-x^2}\Big)^{(n)}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{(n)}+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+x}\Big)^{(n)} =\frac{n!}{2(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n\,n!}{2(1+x)^{n+1}}$$
$$\Big(\frac{x}{1-x^2}\Big)^{(n)}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{(n)}-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+x}\Big)^{(n)} =\frac{n!}{2(1-x)^{n+1}}-\frac{(-1)^n\,n!}{2(1+x)^{n+1}}$$

Séries géométriques et dérivées

▶ Ces trois suites obtebues par dérivation d'une série géométrique possèdent une limite finie lorsque $x\in]-1,\,1[$:

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k \qquad T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}kx^k \qquad U_n(x)=\sum_{k=0}^{n}k^2x^k$$
$$\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\frac{1}{1-x} \qquad \lim_{n\to+\infty}T_n(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$$
$$\lim_{n\to+\infty}U_n(x)=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

⊳ Ces sommes correspondent à une série géométrique et à ses dérivées successives lorsque $n\geq 2$:

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}+\frac{x^{n+1}}{x-1}$$
$$T_n(x)=x\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=x\,S_n'(x)=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}}{(x-1)^2}$$

$$U_n(x)=x\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}=x\,T_n'(x)$$
$$=\frac{x^2+x}{(1-x)^3} +\frac{(n(n+2)x^{n+2}-(n+1)^2x^{n+1})(x-1)-2nx^{n+3}+2(n+1)x^{n+2}}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}+\frac{n^2x^{n+3}-(2n^2+2n-1)^2x^{n+2}+(n+1)^2x^{n+1}}{(x-1)^3}$$

La limite nulle de ce produit quand $|x|<1$ et $p\in\mathbb{N}$ termine la preuve :

$$\lim_{n\to+\infty}n^p\,x^n=0$$

Encadrement des fonctions trigonométriques

▶ Les fonctions trigonométriques vérifient ces encadrements sur $\mathbb{R}_+$:

$$\sum_{k=0}^{2p+1}\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!}\leq\cos x\leq\sum_{k=1}^{2p}\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{où } p\in\mathbb{N} \text{ et } x\in\mathbb{R}_+$$
$$\sum_{k=0}^{2p+1}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!}\leq\sin x\leq\sum_{k=0}^{2p}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

⊳ La démonstration repose sur l'étude de fonctions auxiliaires.

$$f_n(x)=\cos x-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!} =\cos x-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!}$$
$$g_n(x)=\sin x-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!} =\sin x-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Le tableau de variation des fonctions f_0, g_0, f_1 et g_1 montrent les premiers encadrements :

x	0		$+\infty$
$f_0(x) = g_0'(x)$	0		$-$
$g_0(x) = -f_1'(x)$	0	$\searrow$	$-$
$f_1(x) = g_1'(x)$	0	$\nearrow$	$+$
$g_1(x) = -f_2'(x)$	0	$\nearrow$	$+$
$f_2(x) = g_2'(x)$	0	$\searrow$	$-$

$$f_0(x) = \cos x - 1 \leq 0$$
$$g_0(x) = \sin x - x \leq 0$$
$$f_1(x) = \cos x - 1 + x^2/2 \geq 0$$
$$g_1(x) = \sin x - x + x^3/6 \geq 0$$

Les dérivées de f_n et de g_n sont reliées par ces égalités si $n \geq 1$:

$$f_n'(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -g_{n-1}(x)$$

$$g_n'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} = f_n(x)$$

Un raisonnement par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ construit de même les tableaux de variations aux ordres $2p$ et $2p+1$ à partir de l'hypothèse de récurrence sur le signe de g_{2p-1} :

x	0		$+\infty$
$g_{2p-1}(x) = -f_{2p}'(x)$	0		$+$
$f_{2p}(x) = g_{2p}'(x)$	0	$\searrow$	$-$
$g_{2p}(x) = -f_{2p+1}'(x)$	0	$\searrow$	$-$
$f_{2p+1}(x) = g_{2p+1}'(x)$	0	$\nearrow$	$+$
$g_{2p+1}(x) = -f_{2p+2}'(x)$	0	$\nearrow$	$+$
$f_{2p+2}(x) = g_{2p+2}'(x)$	0	$\searrow$	$-$

$$f_{2p}(x) \leq 0$$
$$g_{2p}(x) \leq 0$$
$$f_{2p+1}(x) \geq 0$$
$$g_{2p+1}(x) \geq 0$$

Ces résultats à l'ordre $p+1$ terminent la preuve par récurrence des deux encadrements.

∗ La même méthode convient pour montrer cet encadrement de e^{-x} :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \qquad \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2p} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

∗ Le chapitre *primitives et intégrales* propose une autre méthode fondée sur la formule de Taylor avec reste intégral pour encadrer e^x si $x \geq 0$.

Présentation des fonctions de Lambert

∗ L'application $f : x \mapsto xe^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable, possède un minimum de $-1/e$ en -1, est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$:

$$f(x) = xe^x \qquad f'(x) = (x+1)e^x$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

∗ Les deux restrictions de f à $]-\infty, -1]$ et $[-1, +\infty[$ sont donc deux bijections, la première à valeurs dans $[-1/e, 0[$ et la seconde dans $[-1/e, +\infty[$. Les applications réciproques de ces deux fonctions sont appelées fonctions V et W de Lambert et sont continues.

▶ Les dérivées des applications V et W de classe $\mathcal{C}^\infty$ sont les suivantes :

$$V'(x) = \frac{V(x)}{x(V(x)+1)} \qquad W'(x) = \frac{W(x)}{x(W(x)+1)}$$

▷ Les dérivées des fonctions V et W sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$ sont de la forme $(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$:

$$V'(x) = \frac{1}{(V(x)+1)e^{V(x)}} \qquad W'(x) = \frac{1}{(W(x)+1)e^{W(x)}}$$

Les applications V et W vérifient ces égalités :

$$f(V(x)) = x = V(x)\, e^{V(x)} \qquad e^{V(x)} = \frac{x}{V(x)}$$
$$f(W(x)) = x = W(x)\, e^{W(x)} \qquad e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$$

Les dérivées précédentes combinées à ces relations s'expriment ainsi :

$$V'(x) = \frac{1}{(V(x)+1)e^{V(x)}} = \frac{1}{(V(x)+1)\frac{x}{V(x)}} = \frac{V(x)}{x(V(x)+1)}$$
$$W'(x) = \frac{1}{(W(x)+1)e^{W(x)}} = \frac{1}{(W(x)+1)\frac{x}{W(x)}} = \frac{W(x)}{x(W(x)+1)}$$

▷ Une démonstration par récurrence justifie ensuite que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La démonstration précédente prouve que les applications V et W sont de classe $\mathcal{C}^1$.

L'hypothèse que les applications V et W sont de classe $\mathcal{C}^n$ entraîne, à cause des opérations usuelles sur les dérivées, que les applications V' et W' — qui s'expriment à l'aide des applications V et W — sont

de classe $\mathcal{C}^n$, donc V et W sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Ces deux arguments terminent la démonstration par récurrence et montrent que les applications V et W sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

► Les fonctions de Lambert permettent de résoudre ces équations :

$$\frac{e^x}{x} = a \qquad x^2 \ln x = a \qquad \text{d'inconnue } x \in \mathbb{R} \text{ et de paramètre } a \in \mathbb{R}$$

▷ Ces deux équations se ramenent à l'équation $x \exp x = a$ d'inconnue réelle x dont les solutions sont $V(a)$ et $W(a)$:

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{x} = a &\iff x\, e^{-x} = \frac{1}{a} \iff (-x)\, e^{-x} = -\frac{1}{a} \\
&\iff x = -V(1/a) \text{ OU } x = -W(1/a) \\
x^2 \ln x = a &\iff e^{2 \ln x} \ln x = a \iff 2 \ln x\, e^{2 \ln x} = 2a \\
&\iff 2 \ln x = V(2a) \text{ OU } 2 \ln x = W(2a) \\
&\iff x = e^{V(2a)/2} \text{ OU } x = e^{W(2a)/2}
\end{aligned}$$

Utilisation d'une fonction auxiliaire

► Toute application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a-h,\, a+h]$ où $h > 0$ vérifie cette propriété :

$$\exists\, c \in [0,\, h[\quad f(a+h) - f(a-h) = h(f'(a+c) + f'(a-c))$$

La démonstration applique le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire de la forme suivante :

$$\varphi : [-h,\, h] \to \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = f(a+x) - f(a-x) - Ax$$

▷ Le paramètre A de l'application auxiliaire φ de classe $\mathcal{C}^1$ est choisie de façon à vérifier $\varphi(h) = \varphi(-h)$ pour appliquer le théorème de Rolle :

$$\begin{aligned}
\varphi(0) = \varphi(h) &= f(a+h) - f(a-h) - Ah \\
A &= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} \\
\varphi(h) &= 0 = \varphi(-h) \\
\varphi'(x) &= f'(a+x) + f'(a-x) - A
\end{aligned}$$

Il existe donc $u \in]-h,\, h[$ vérifiant $\varphi'(u) = 0$.

$$\begin{aligned}
\varphi'(u) &= 0 = f'(a+u) + f'(a-u) - A \\
A &= f'(a+u) + f'(a-u) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}
\end{aligned}$$

Il existe donc $u \in]-h,\, h[$ vérifiant l'égalité demandée, vue la symétrie de cette formule $c = |u| \in [0,\, h[$ convient également.