DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Un développement limité a pour but d'étudier plus précisément qu'une dérivée les variations d'une fonction au voisinage d'un point. Sauf indications contraires, les fonctions réelles f et g intervenant dans ce chapitre sont définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

Définitions et propriétés

Définition

• Ces propositions sont équivalentes ; la deuxième illustre la définition des fonctions négligeables et la dernière définit le développement limité de la fonction f au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k}{(x-a)^n} = 0 \qquad \text{où } (a_k)_{k=0}^{n} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\iff f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k = \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$

$$\iff f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$

La somme est appelée la partie principale du développement limité.

Opérations sur les fonctions négligeables

□ Les développements limités exploitent ces relations de comparaison :

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \text{ ET } g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \Longrightarrow f = \underset{x\to a}{o}(h(x))$$

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x)) \text{ ET } g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x)) \Longrightarrow f(x) + g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$$

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \Longrightarrow \lambda f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$$

$$\lambda \neq 0 \text{ ET } f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \Longrightarrow f(x) = \underset{x\to a}{o}(\lambda g(x))$$

□ Ces propositions sont vérifiées dès que $f(x) = \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$:

$$(x-a)^m f(x) = \underset{x\to a}{o}(x-a)^{n+m} \qquad \frac{f(x)}{(x-a)^m} = \underset{x\to a}{o}(x-a)^{n-m}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad m \leq n \Longrightarrow f(x) = \underset{x\to a}{o}(x-a)^m$$

◊ Les démonstrations se ramènent à des manipulations de limites nulles.

■ Les hypothèses $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ et $m > 0$ entraînent ces relations :

$$f(\lambda x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n) \qquad f(x^m) = \underset{x\to 0}{o}(x^{mn})$$

$$f^m(x) = \big(f(x)\big)^m = \underset{x\to 0}{o}(x^{mn})$$

◊ Les implications suivantes prouvent les propriétés ci-dessus ; la première propriété est évidente si $\lambda = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(\lambda x)}{(\lambda x)^n} = 0 \qquad \text{par composition des limites car } \lim_{x\to 0} \lambda x = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(\lambda x)}{\lambda^n x^n} = 0 \qquad \text{pour } \lambda \neq 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(\lambda x)}{x^n} = 0 \qquad \text{par multiplication par } \lambda^n$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x^m)}{(x^m)^n} = 0 \qquad \text{par composition des limites car } \lim_{x\to 0} x^m = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x^m)}{x^{mn}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \Big(\frac{f(x)}{x^n}\Big)^m = 0 \qquad \text{par composition des limites car } \lim_{u\to 0} u^m = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f^m(x)}{x^{mn}} = 0$$

★ Ces égalités formelles proviennent des propriétés précédentes et correspondent à des règles de réécriture appliquées de gauche à droite :

$$\lambda \underset{x\to a}{o}(x-a)^n = \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$
$$\underset{x\to a}{o}(\lambda(x-a)^n) = \underset{x\to a}{o}(x-a)^n \qquad \text{pour } \lambda \neq 0$$
$$\underset{x\to a}{o}(x-a)^n \pm \underset{x\to a}{o}(x-a)^n = \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$
$$\underset{x\to a}{o}(x-a)^m \times \underset{x\to a}{o}(x-a)^n = \underset{x\to a}{o}(x-a)^{m+n}$$
$$\left(\underset{x\to a}{o}(x-a)^n\right)^m = \underset{x\to a}{o}(x-a)^{mn} \qquad \text{pour } m > 0$$

∗ Ainsi la dernière ligne ci-dessus correspond à cette propriété :
$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(x-a)^n \ \mathsf{ET}\ m > 0 \Longrightarrow f^m(x) = \underset{x\to a}{o}(x-a)^{mn}$$

Premières propriétés

Ce paragraphe suppose que les fonctions f et g possèdent des développements limités à l'ordre n en a :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$
$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$

■ Le développement limité de toute application f en a à l'ordre n, s'il existe, est unique.

◊ Si les familles $(a_k)_{k=0}^n$ et $(\widetilde{a_k})_{k=0}^n$ correspondent aux coefficients du développement limité de f en a à l'ordre n. La preuve par l'absurde que l'ensemble des indices dont les coefficients sont différents est vide justifie l'unicité du développement limité :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{a_k}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$
$$p = \min\left\{k \in \{0 \cdots n\} \ \big/\ a_k \neq \widetilde{a}_k\right\} \leq n$$
Si cet ensemble n'est pas vide, il possède un plus petit élément $p \leq n$ car il est fini, avec au maximum $n+1$ éléments, et le raisonnement aboutit à la contradiction $a_p = \widetilde{a_p}$:

$$(a_p - \widetilde{a}_p)(x-a)^p = \sum_{k=p+1}^{n} (\widetilde{a}_k - a_k)(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$
$$= \underset{x\to a}{o}(x-a)^p \qquad \text{car } p < k \leq n$$
$$\lim_{x\to a} \frac{(a_p - \widetilde{a}_p)(x-a)^p}{(x-a)^p} = 0 = a_p - \widetilde{a_p} \qquad\qquad a_p = \widetilde{a_p}$$

∗ Les coefficients du développement limité de la fonction nulle sont nuls :
$$0 = 0 + 0(x-a) + \cdots + 0(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$
$$\text{car } 0 = \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$

◊ Cette expression est un développement limité possible de l'application nulle, et il est unique par la propriété précédente.

■ La partie principale d'un développement limité à l'ordre $m \leq n$ en a de la fonction f est obtenue en tronquant à l'ordre m la partie principale du développement limité d'ordre n au même point de cette fonction :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^m$$

◊ Les termes restants d'ordre strictement supérieur à m sont négligeables devant $(x-a)^m$, et n'interviennent donc pas dans le développement limité à l'ordre m :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x-a)^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$
$$\text{car } k > m \Longrightarrow a_k(x-a)^k = \underset{x\to a}{o}(x-a)^m$$

■ La partie principale du développement limité de la somme de deux fonctions est la somme des parties principales des développements limités de ces fonctions au même ordre en ce même point ; il en est de même pour le produit d'un développement limité par une constante :

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)(x-a)^k+\underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$
$$\lambda\, f(x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda a_k(x-a)^k+\underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$

◊ Ce résultat provient de la linéarité des limites :

$$\frac{f(x)+g(x)-\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k+b_k)(x-a)^k\Big)}{(x-a)^n}$$
$$=\frac{f(x)-\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-a)^k\Big)}{(x-a)^n}+\frac{g(x)-\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}b_k(x-a)^k\Big)}{(x-a)^n}\quad \text{de limite } 0$$

■ La partie principale du développement limité du produit de deux fonctions à un certain ordre en un même point est le produit tronqué à cet ordre des parties principales des deux développements limités :

$$\begin{aligned}f(x)\,g(x)&=\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}\Big)(x-a)^k+\underset{x\to a}{o}(x-a)^n\\&=\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{\substack{i+j=k\\0\le i,j\le k}}a_ib_j\Big)(x-a)^k+\underset{x\to a}{o}(x-a)^n\end{aligned}$$

◊ Le produit $f(x)\,g(x)$ se développe de la manière suivante :

$$\begin{array}{llll}
f(x)\,g(x) & & & \\
=a_0b_0 & +a_0b_1(x-a) & +\cdots+a_0b_n(x-a)^n & +\underset{x\to a}{o}(x-a)^n\\
+a_1b_0(x-a) & +a_1b_1(x-a)^2 & +\cdots+a_1b_n(x-a)^{n+1} & +\underset{x\to a}{o}(x-a)^{n+1}\\
+a_2b_0(x-a)^2 & +a_1b_1(x-a)^3 & +\cdots+a_1b_n(x-a)^{n+2} & +\underset{x\to a}{o}(x-a)^{n+2}\\
+ & \cdots & \cdots & \cdots\\
+a_nb_0(x-a)^n & +a_1b_1(x-a)^{n+1} & +\cdots+a_1b_n(x-a)^{2n} & +\underset{x\to a}{o}(x-a)^{2n}\\
+\underset{x\to a}{o}(x-a)^n & +\underset{x\to a}{o}(x-a)^{n+1} & +\cdots+\underset{x\to a}{o}(x-a)^{2n} & +\underset{x\to a}{o}(x-a)^{2n}
\end{array}$$

Le coefficient de $(x-a)^k$ est une somme de termes diagonaux. Tous les monômes en $(x-a)^k$ où $k>n$ sont négligeables devant $(x-a)^n$. Les termes de plus haut degrés sont donc absorbés par $\underset{x\to a}{o}(x-a)^n$, d'où cette simplification en regroupant les termes de même degré sur chaque diagonale :

$$\begin{array}{l}
a_0b_0+a_0b_1(x-a)+a_0b_2(x-a)^2+\cdots+\quad a_0b_n(x-a)^n\\
\quad +a_1b_0(x-a)+a_1b_1(x-a)^2+\cdots+a_1b_{n-1}(x-a)^n\\
\qquad +a_2b_0(x-a)^2+\cdots+a_1b_{n-2}(x-a)^n\\
\qquad\qquad +\quad \cdots\quad \cdots\\
\qquad\qquad\quad +a_nb_0(x-a)^n+\underset{x\to a}{o}(x-a)^n\\
=f(x)\,g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\Big(\sum\limits_{\substack{i+j=k\\0\le i,j\le k}}a_ib_j\Big)(x-a)^k+\underset{x\to a}{o}(x-a)^n
\end{array}$$

Si $(a_0,b_0)\neq(0,0)$, l'ordre du développement limité du produit est limité à n à cause des termes $a_0\times\underset{x\to a}{o}(x-a)^n$ et $b_0\times\underset{x\to a}{o}(x-a)^n$.

∗ Une présentation les uns sous les autres des termes de même degré dans le développement des produits facilite le calcul de la somme finale.

∗ Un produit par $(x-a)^m$ augmente l'ordre du développement limité :

$$(x-a)^m\,f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-a)^{m+k}+\underset{x\to a}{o}(x-a)^{m+n}$$

∗ Ces produits remarquables simplifient le calcul des carrés et des cubes des développements limités :

$$(a+b+c+\cdots)^2=a^2+b^2+c^2+\cdots+2ab+2ac+2bc+\cdots$$
$$\begin{aligned}(a+b+c+d+\cdots)^3=\;&a^2+b^2+c^2+\cdots\\&+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+\cdots\\&+6abc+6abd+6acd+6bcd+\cdots\end{aligned}$$

★ L'expression $\sqrt{x}$ n'a pas de développement limité à l'ordre 1 en 0. La recherche des coefficients a et b du développement limité en 0 justifie que $a=0$ et que b n'existe pas :

$$\sqrt{x}=a+bx+\underset{x\to 0}{o}(x)\qquad \sqrt{x}-bx+\underset{x\to 0}{o}(x)=a \text{ de limite } 0\qquad a=0$$
$$\frac{\sqrt{x}+\underset{x\to 0}{o}(x)}{x}=b \text{ de limite infinie en } 0\qquad b\in\mathbb{R} \text{ n'existe pas}$$

∗ De même le développement limité de $x^{3/2}$ à l'ordre 1 à droite en 0 est $0+0x+\underset{x\to 0}{o}(x)$, et n'existe pas à l'ordre 2 en 0.

□ Les développements limités des applications à valeurs complexes sont obtenus, comme n'importe quelle limite, à partir des développements limités de la partie réelle et de la partie imaginaire.

Dérivation et développements limités

★ L'application f possède un développement limité à l'ordre 0 en a si et seulement si f a une limite finie en a.

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ [existe et]} = \ell \in \mathbb{R} \iff f(x) = \ell + \underset{x\to a}{o}(1)$$

Une application f continue en a vérifie $f(x) = f(a) + \underset{x\to a}{o}(1)$.

★ Une application f possède un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a, ainsi :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$
$$\iff f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \underset{x\to a}{o}(x-a)$$
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$$

⊠ Une application h dérivable sur un voisinage de a vérifie cette implication :

$$h'(x) = \underset{x\to a}{o}(x-a)^n \implies h(x) - h(a) = \underset{x\to a}{o}(x-a)^{n+1}$$

◊ La preuve repose sur le théorème des accroissements finis. Soit $\varepsilon > 0$, si $x \in [a-\eta,\, a+\eta]$ alors le nombre c intervenant dans le théorème des accroissements finis appartient à cet intervalle $[a-\eta,\, a+\eta]$:

$$h'(x) = \underset{x\to a}{o}(x-a)^n \qquad \lim_{x\to a} \frac{h'(x)}{(x-a)^n} = 0$$

$$\exists\, \eta > 0 \quad \forall\, x \in [a-\eta,\, a+\eta] \quad \left|\frac{h'(x)}{(x-a)^n}\right| \le \varepsilon$$

$$\forall\, x \in [a-\eta,\, a+\eta] \quad \exists\, c \in]a,\, x[\subset [a-\eta,\, a+\eta] \quad \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = h'(c)$$

$$\text{ET} \left|\frac{h(x)-h(a)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \left|\frac{h'(c)}{(x-a)^n}\right| \le \left|\frac{h'(c)}{(c-a)^n}\right| \le \varepsilon$$

L'intervalle $]a,\, x[$ de cette démonstration suppose implicitement que $x > a$, et doit être remplacé par $]x,\, a[$ si $x < a$.

■ Si l'application f est dérivable sur un voisinage de a et si f' possède

un développement limité à l'ordre n en a, alors f a un développement limité à l'ordre $n+1$ en a défini ainsi :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$
$$\implies f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + \underset{x\to a}{o}(x-a)^{n+1}$$

◊ La démonstration repose sur la propriété précédente :

$$h(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} \qquad h'(x) = \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$

Formule de Taylor-Young

■ Toute application f qui est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de a et qui est $n \ge 1$ fois dérivable en a vérifie la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$

Ainsi toute application de classe $\mathcal{C}^\infty$ possède un développement limité en tout point à n'importe quel ordre.

◊ Cette formule se démontre par récurrence sur n ; l'application $f^{(n-1)}$ est dérivable en a et possède un développement limité en a à l'ordre 1 par les premières remarques ; le théorème précédent prouve successivement que $f^{(n-2)}$, $f^{(n-3)}$, etc. ont des développements limités aux ordres 2, 3, etc. :

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)\,(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$$

$$\begin{aligned} f^{(n-2)}(x) = \quad & f^{(n-2)}(a) + f^{(n-1)}(a)\,(x-a) \\ & + \frac{f^{(n)}(a)}{2}\,(x-a)^2 + \underset{x\to a}{o}(x-a)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(n-3)}(x) = \quad & f^{(n-3)}(a) + f^{(n-2)}(a)\,(x-a) + \frac{f^{(n-1)}(a)}{2}\,(x-a)^2 \\ & + \frac{f^{(n)}(a)}{2\cdot 3}\,(x-a)^3 + \underset{x\to a}{o}(x-a)^3 \end{aligned}$$

∗ L'existence d'un développement limité aux ordres 0 ou 1 de l'application f en a est équivalente à la continuité ou à la dérivabilité de f en a.

★ Au contraire une application peut avoir un développement limité à l'ordre $n \geq 2$ en a sans posséder de dérivée seconde en a.
La formule de Taylor-Young énonce une condition suffisante d'existence d'un développement limité à l'ordre n à partir des dérivées successives ; cette condition n'est pas nécessaire pour $n \geq 2$.

► Cette application f possède un développement limité à l'ordre 4 en 0, est dérivable en 0, et n'est pas deux fois dérivable en 0 :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x^5 \sin(1/x^4) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

▷ L'application f possède un développement limité en 0 à l'ordre 4 et un critère séquentiel montre que f' n'est pas continue en 0 :

$$\frac{f(x)}{x^4} = x \sin(1/x^4) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} = 0$$
$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$
$$f'(x) = 5x^4 \sin(1/x^4) - 4 \cos(1/x^4) \qquad f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$
$$u_n = 1/\sqrt[4]{2n\pi} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \qquad f'(u_n) = -4$$
$$\lim_{n\to+\infty} f'(u_n) = -4 \neq f'(0) = 0 \qquad f \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^1$$

∗ Si l'application f' possède un développement limité à l'ordre n en a alors f possède un développement limité à l'ordre $n+1$. La réciproque est fausse : une application f dérivable peut posséder un développement limité à l'ordre $n \geq 2$ en a sans que f' ait de développement limité à l'ordre 1 en a.
La dérivée précédente f' n'a pas de développement limité en 0, même à l'ordre 0, car f' n'est pas continue, alors que f possède un développement limité à l'ordre 4 en 0.

Formulaire au voisinage de zéro

■ La principale méthode de calcul d'un développement limité opère sur les développements limités des fonctions usuelles :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \qquad \text{à l'aide des séries géométriques}$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \qquad \text{en remplaçant } x \text{ par } -x$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$\text{à partir du développement limité de la dérivée}$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$\exp x = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \qquad \text{par la formule de Taylor-Young}$$
$$\exp(-x) = e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) \qquad \text{par Taylor-Young}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

à partir du développement limité de la dérivée

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \underset{x\to 0}{o}(x^8)$$

par exemple par quotient

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

à partir de e^x

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \underset{x\to 0}{o}(x^8)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

à partir de $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \cdots$$

pour $a \in \mathbb{R}$ fixé

$$\cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(a-j)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

par Taylor-Young

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} x^4 + \cdots$$

à partir de $(1-x^2)^{-1/2}$

$$\cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}\, k!^{\,2}} x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots$$

à partir de $\arcsin' x$

$$\cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}\, k!^{\,2}} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} x^4 + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}\, k!^{\,2}} x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

◊ Le premier développement limité provient de la série géométrique :

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\text{car } \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \frac{x}{1-x} \text{ est de limite 0 en 0}$$

◊ Les développements de $f(-x) = f(-1 \times x)$ du formulaire proviennent par composition de ceux de $f(x)$.

◊ La dérivée de $x \mapsto \ln(1+x)$ est l'inverse $1/1+x$ dont le développement limité est connu, le théorème sur les développement limité des dérivées énonce le développement limité du logarithme :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-1})$$
$$\Longrightarrow \ln 1+x = \ln 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\, x^{k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k\pm 1}}{k}\, x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

◊ Les dérivées successives de l'application exp de classe $\mathcal{C}^\infty$ est elle-même ; les hypothèses de la formule de Taylor-Young s'appliquent à tout ordre en 0 :

$$\exp^{(k)} = \exp \qquad \exp^{(k)} 0 = \exp 0 = 1$$
$$\exp x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

La méthode est la même pour la fonction sin. La formule de Taylor-Young à l'ordre $2n+2$ aboutit à ce résultat :

$$\sin' = \cos \qquad \sin'' = -\sin \qquad \sin^{(3)} = -\cos \qquad \sin^{(4)} = \sin$$
$$\sin^{(k)} = \begin{cases} \sin \text{ si } k = 4p \\ \cos \text{ si } k = 4p+1 \\ -\sin \text{ si } k = 4p+2 \\ -\cos \text{ si } k = 4p+3 \end{cases} \qquad \sin^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } k = 2q \\ (-1)^q \text{ si } k = 2q+1 \end{cases}$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

◊ Le développement limité de cos peut être obtenu de la même façon que celui de sin ou à partir de celui de $\cos' = -\sin$. Les développements limités de cosh et sinh peuvent provenir de leur définition à partir de l'exponentielle ou de la formule de Taylor-Young.

◊ Différentes méthodes sont possibles pour déterminer le développement limité de tan et font l'objet d'un paragraphe complet du cours. Les méthodes sont analogues pour tanh.

◊ Le développement limité de la dérivée de $\arctan x$ est connu :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^2 n)$$
$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

Ce dernier développement limité est même valable à l'ordre $2n+2$ car le coefficient en x^{2n+1} est nul.

◊ Un calcul par récurrence énumère les dérivées successives de $(1+x)^a$ en 0 ; la formule de Taylor construit alors de développement limité de cette fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$\big((1+x)^a\big)' = a(1+x)^{a-1}$$
$$\big((1+x)^a\big)'' = a(a-1)(1+x)^{a-2}$$
$$\big((1+x)^a\big)^{(3)} = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}$$
$$\big((1+x)^a\big)^{(k)} = a(a-1)\cdots(a-m+1)(1+x)^{a-k}$$
$$= \prod_{i=0}^{k-1} (a-i)(1+x)^{a-k}$$
$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}\, x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}\, x^3 + \cdots$$
pour $a \in \mathbb{R}$ fixé
$$\cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}\, x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(a-j)}{k!}\, x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

◊ Le développement limité de arcsin s'obtient à partir de celui de sa dérivée obtenue par composition avec x^2 à la place de x et $a = -1/2$; le coefficient de x^{2k} dans $\arcsin' x = (1-x^2)^{-1/2}$ demande d'être transformé :

$$(-1)^k\,\frac{(-\frac12)\cdot(-\frac32)\cdot(-\frac52)\cdots(-\frac{2k+1}{2})}{k!} = (-1)^{2k}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k+1)}{2^k\,k!}$$
$$= \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2k)} = \frac{\frac{(2k+1)}{2^k\,k!}}{2^k\,k!} = \frac{(2k+1)}{2^{2k}\,k!^{\,2}}$$
$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 1 + \frac12\,x^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,x^4 + \cdots + \frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\,x^{2n} + \underset{x\to0}{o}(x^{2n+1})$$
$$\arcsin x$$
$$= x + \frac12\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to0}{o}(x^{2n+2})$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{2^{2k}\,k!^{\,2}}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to0}{o}(x^{2n+2})$$

Méthodes pratiques et applications

□ La partie principale du développement limité en 0 d'une application paire f est paire, et celui d'une application g impaire est impaire :

$$f(-x) = f(x) \implies f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}x^{2k} + \underset{x\to0}{o}(x^{2n+1})$$
$$g(-x) = -g(x) \implies g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}x^{2k+1} + \underset{x\to0}{o}(x^{2n+2})$$

◊ La différence $f(x) - f(-x)$ ou la somme $g(x) + g(-x)$ est nulle, de développement limité nul. L'unicité du développement limité justifie l'identification terme à terme des coefficients $2a_{2k+1} = 0$ dans le premier cas et $2a_{2k} = 0$ dans le second.

∗ L'égalité suivante permet de calculer le développement limité de arccos en 0 :

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

∗ Ces égalités issues de l'analyse complexe justifient les changements de signes entre les coefficients des développements limités des fonctions trigonométriques et ceux des fonctions hyperboliques :

$$\tan x = -\mathrm{i}\ \tanh(\mathrm{i}x) \qquad \tanh x = -\mathrm{i}\ \tan(\mathrm{i}x)$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \underset{x\to0}{o}(x^8)$$
$$\tan(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}x + \frac{(\mathrm{i}x)^3}{3} + \frac{2(\mathrm{i}x)^5}{15} + \frac{17(\mathrm{i}x)^7}{315} + \underset{x\to0}{o}(x^8)$$
$$\tanh x = -\mathrm{i}\ \tan(\mathrm{i}x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \underset{x\to0}{o}(x^8)$$

∗ Si le développement limité d'une application n fois dérivable en a est connu, alors la formule de Taylor-Young détermine la valeur des dérivées succesives en a pour $k\in\{0\cdots n\}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n \qquad f^{(k)}(a) = k!\,a_k$$

∗ En particulier le développement limité à l'ordre n de la dérivée d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ est la dérivée du développement limité à l'ordre $n+1$ de cette application au même point.

∗ Cette méthode n'est pas valable pour les applications qui ne sont pas suffisamment dérivables. L'application $f(x) = x^5\,\sin(1/x^4)$ possède bien un développement limité à l'ordre 4, est dérivable mais m'a pas de dérivée seconde en 0. Les coefficients, nuls, de son développement limité de l'ordre 2 à l'ordre 4 ne sont pas liées à ces dérivées successives.

►► Un grand nombre de méthodes sont possibles pour calculer le développement limité de $(1+x)^{-2}$ en 0. Toutes ne sont pas aussi efficaces :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to0}{o}(x^n)$$
$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^n(n+1)x^n + \underset{x\to0}{o}(x^n)$$

▷▷ La méthode la plus directe consiste à appliquer la formule du développement de $(1+x)^a$ pour $a = -2$.

▷▷ La formule de Taylor-Young s'applique directement et les dérivées successives de $(1+x)^{-2}$ en 0 s'obtiennent aisément :

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f(0)=1 \qquad f'(x)=\frac{-2}{(1+x)^3} \qquad f'(0)=-2$$
$$f''(x)=\frac{(-2)(-3)}{(1+x)^4} \qquad f'(0)=3!$$
$$f^{(3)}(x)=\frac{(-1)^3\,4!}{(1+x)^5} \qquad f^{(3)}(0)=(-1)^3\,4!$$
$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\,(n+1)!}{(1+x)^{n+1}} \qquad f^{(n)}(0)=(-1)^n\,(n+1)!$$

Une division par $k!$ des dérivées d'ordre k détermine le coefficient de x^k du développement limité.

⊳ Du fait que $(1+x)^{-2}$ est la dérivée de $-1/(1+x)$ qui représente une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, la remarque précédente justifie donc que ce développement limité est la dérivée de celui de $1/(1+x)$.

⊳ Une autre méthode, sans doute la moins pertinente, calcule le carré du développement de $1/(1+x)$.

⊳ Une cinquième méthode développe $1/(1+2x+x^2)$ sous la forme $1/(1+h)$ avec $h=2x+x^2$; elle ne présente pas non plus d'intérêt.

⊳ Les coefficients du développement de $(1+x)^{-2}$ peuvent être obtenus par identification terme à terme dans $(1+x)(1+x)^{-2}=(1+x)^{-1}$:

$$\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots a_nx^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x}$$
$$=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$=(1+x)\,\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$=\quad a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots a_nx^n$$
$$+a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\cdots+a_{n-1}x^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$=a_0+(a_1+a_0)x+(a_2+a_1)x^2+\cdots+(a_n+a_{n-1})x^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

L'unicité du développement limité, qui existe bien car l'application est de classe $\mathcal{C}^\infty$, justifie l'identification des coefficients :

$$a_0=1 \qquad a_1+a_0=-1 \qquad a_2+a_1=1 \qquad \cdots$$
$$a_0=1 \quad a_1=-1-a_0=-2 \quad a_2=1-a_1=3 \qquad \cdots$$
$$a_n+a_{n-1}=(-1)^n \qquad a_n=(-1)^n-+a_{n-1}=(-1)^n(n+1)$$

∗ L'une ou l'autre de ces méthodes s'adaptent à de nombreux calculs de développements limités.

∗ Le développement limité de $f(x)^{g(x)}$ dont l'exposant est variable ne peut pas être justifié par celui de $(1+x)^a$ où a est fixé.
La méthode à appliquer consiste à calculer successivement les développements limités de $\ln(f(x))$, de $h(x)=g(x)\ln(f(x))$ et de $\exp(h(x))$.

∗ Une composition ou un produit de développements limités peuvent modifier l'ordre d'un développement limité.

► Le développement limite de $(\cos x)^{\sinh(x^2)}$ à l'ordre 7 en 0 l'illustre.

⊳ Le développement limité de $\ln(1+h)$ à l'ordre 2 suffit pour déterminer celui de $\ln(\cos x)$ à l'ordre 5 car $h=\cos x-1$ vérifie $h^3=\underset{x\to 0}{o}(x^5)$, au contraire il est nécessaire de calculer celui de $\cos x$ à l'ordre 5 :

$$\cos x=1+h=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)$$
$$\ln(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+\underset{h\to 0}{o}(h^3)$$
$$\ln(\cos x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

Une fois calculés les développements limités de $\sinh(x^2)$ et de $\ln(\cos x)$ à l'ordre 5, le développement limité du produit est d'ordre 7 en exploitant deux factorisations par x^2 :

$$\begin{aligned}\sinh(x^2)\,\ln(\cos x)&=\Big(x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^5)\Big)\Big(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)\Big)\\&=x^4\Big(1+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\Big)\Big(-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\Big)\\&=-\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{12}+\underset{x\to 0}{o}(x^7)\end{aligned}$$

Enfin, pour la même raison que pour $\ln(\cos x)$, le développement limité de e^h en 0 à l'ordre 1 suffit pour obtenir $(\cos x)^{\sinh(x^2)}$ à l'ordre

7 car le terme en h^2 est de l'ordre de x^8 qui est négligeable devant x^7 :

$$(\cos x)^{\sinh(x^2)} = 1 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^7)$$

$*$ Les exemples suivants illustrent quelques transformations ramenant un développement limité à un de ceux du formulaire.

$*$ Le développement limité de $1/\cos^2 x$ en 0 à l'ordre 7 est plus facile à obtenir à partir de celui de $\tan x$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2 x} &= 1 + \tan^2 x = 1 + \Big(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \underset{x\to 0}{o}(x^8)\Big)^2\\ &= 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{15} + \frac{x^6}{9} + \underset{x\to 0}{o}(x^7)\\ &= 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45}\, \underset{x\to 0}{o}(x^7)\end{aligned}$$

▶ Développement limité de $\sqrt{a+x}$ où $a > 0$ en 0 à l'ordre 3.

▷ Une factorisation par $\sqrt{a}$ aboutit à $(1+h)^{1/2}$ pour $h = x/a$:

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a}\,\sqrt{1+x/a} = \sqrt{a}\,\Big(1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} + \frac{x^3}{48a^3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\Big)$$

$*$ Les transformations suivantes sont aussi possibles :

$$\exp x = \exp a\, \exp(x-a) \qquad \ln(a+x) = \ln a + \ln(1+x/a)$$
$$\sin x = \sin(x-a)\, \cos a + \cos(x-a)\, \sin a$$
$$\cos x = \cos(x-a)\, \cos a - \sin(x-a)\, \sin a$$

▶ Développement limité à l'ordre 4 en $\pi/3$ de $\sin x$:

▷ Le développement limité de l'application sin en $x = \pi/3$ est obtenu à partir de ceux, connus, des fonctions trigonométriques au voisinage de $h = 0$ par le changement de variable $h = x - \pi/3$ de limite 0 quand x tend vers $\pi/3$, ainsi $x = \pi/3 + h$:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin((x-\pi/3)+\pi/3) = \sin(\pi/3+h)\\ &= \sin(\pi/3)\, \cos h + \cos(\pi/3)\, \sin h \qquad h = x - \pi/3 \qquad \lim_{x\to\pi/3} h = 0\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, h - \frac{\sqrt{3}}{4}\, h^2 - \frac{1}{12}\, h^3 + \frac{\sqrt{3}}{48}\, h^4 + \underset{h\to 0}{o}(h^4)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,(x-\pi/3) - \frac{\sqrt{3}}{4}\,(x-\pi/3)^2 - \frac{1}{12}\,(x-\pi/3)^3\\ &\qquad + \frac{\sqrt{3}}{48}\,(x-\pi/3)^4 + \underset{x\to\pi/3}{o}(x-\pi/3)^4\end{aligned}$$

▷ Un passage par les complexes aboutit à des calculs similaires :

$$\sin x = \mathrm{im}(e^{ix}) = \mathrm{im}(e^{\mathrm{i}\pi/3} e^{\mathrm{i}h}) = \frac{\mathrm{im}((1+\mathrm{i}\sqrt{3})e^{\mathrm{i}h})}{2}$$
$$e^{ih} = 1 + \mathrm{i}h - \frac{h^2}{2} - \mathrm{i}\,\frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + \underset{h\to 0}{o}(h^4)$$
$$\sin x = \frac{1}{2}\,\Big(\sqrt{3} + h - \frac{\sqrt{3}}{2}\, h^2 - \frac{1}{6}\, h^3 + \frac{\sqrt{3}}{24}\, h^4 + \underset{h\to 0}{o}(h^4)\Big)$$

Synthèse des principales méthodes

★ Le calcul d'un développement limité est décomposé en une somme ou un produit de développements limités plus simples ; les plus simples sont ceux faisant intervenir des sommes ou des différences.
La méthode est la même pour les quotients de la forme $1/(1+u)$ lorsque u tend vers 0.
Les calculs des développements limités des puissances distinguent le cas de la forme $(1+x)^a$ où l'exposant est constant, obtenu à partir du formulaire, de celui en $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\, \ln(f(x))$ calculé grâce à l'exponentielle et au logarithme.

★ Les développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0 s'obtiennent directement à partir du formulaire, au contraire les développements limités au voisinage de $x = a$ se ramènent à ceux, mieux connus, au voisinage de 0 par un changement de variable $h = x - a$ de limite 0 quand x tend vers a, ou plus rarement par quotient x/a de limite 1.

★ Les premiers termes d'un développement limité sont la valeur au point et la valeur de sa dérivée ; les développements limités en zéro ont la même parité que la fonction étudiée.

★ La composition des développements limités doit tenir compte de la valeur du résultat intermédiaire pour être licite. Produits, quotients et compositions de développements limités peuvent modifier l'ordre d'un développement limité.

Applications aux limites et équivalents

★ Certaines limites peuvent être obtenues par un développement limité :

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{x^2/2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{x^2} = \frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

∗ Cette méthode permet aussi d'obtenir des équivalents :

$$\begin{aligned}\cos x + \cosh x - 2 &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) + 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 2 \\ &= \frac{x^4}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{12}\end{aligned}$$

Développement limité de tangente en zéro

➤ Les exemples ci-dessous exploitent cinq méthodes différentes pour calculer le développement limité de $\tan x$ en 0.

⊳ La méthode la plus directe est la suivante :

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \underset{x\to 0}{o}(x^8) \\ \cos x &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{o}(x^7) = 1 + h \\ h &= \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{o}(x^7) \\ \frac{1}{1+h} &= 1 - h + h^2 - h^3 + \underset{h\to 0}{o}(h^3) \\ \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+h} \\ &= 1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{o}(x^7) + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \frac{x^6}{8} \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \underset{x\to 0}{o}(x^7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan x &= \sin x \, \frac{1}{\cos x} \\ &= \quad x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} + \frac{61x^7}{720} + \underset{x\to 0}{o}(x^8) \\ &\quad - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} - \frac{5x^7}{144} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{240} - \frac{x^7}{5040} \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \underset{x\to 0}{o}(x^8)\end{aligned}$$

⊳ La deuxième méthode tire profit de la relation $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ et de l'expression du développement limité de f à l'ordre $n+1$ à partir de celui de f' à l'ordre n pour obtenir de proche en proche un développement limité de plus en plus précis de $\tan x$ en 0 ; la première égalité est issue de $\tan 0 = 0$ et $\tan' 0 = 1$:

$$\begin{aligned}\tan x &= x + \underset{x\to 0}{o}(x) \qquad (x + \underset{x\to 0}{o}(x))^2 = x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ \tan' x &= 1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ \tan' x &= 1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\ \tan^2 x &= x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{15} + \underset{x\to 0}{o}(x^6) \\ \tan' x &= 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \underset{x\to 0}{o}(x^6) \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \underset{x\to 0}{o}(x^7)\end{aligned}$$

Cette méthode calcule donc de proche en proche les coefficients du développement limité de la fonction tan de classe $\mathcal{C}^\infty$.

⊳ La formule de Taylor-Young fournit le développement limité de $\tan x$ en 0 à partir de ses dérivées successives ; celles-ci peuvent s'exprimer sous la forme d'une suite de polynômes $\tan^{(n)} x = P_n(\tan x)$ et seul le coefficient constant de ces polynômes est nécessaire car $\tan^{(n)} 0 = P_n(0)$:

$$
\begin{aligned}
\tan x &= P_0(\tan x) & P_0(X) &= X\\
\tan' x &= 1+\tan^2 x = P_1(\tan x) & P_1(X) &= 1+X^2\\
\tan'' x &= (P_1(\tan x))' = (1+\tan^2 x)\, P_1'(\tan x) & P_2(X) &= 2X+2X^3
\end{aligned}
$$

$$
P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X) \qquad \tan^{(n)} 0 = P_n(\tan 0) = P_n(0)
$$

$$
\begin{aligned}
P_3(X) &= (1+X^2)P_2'(X) = (1+X^2)(2+6X^2) = 2+8X^2+6X^4\\
P_4(X) &= (1+X^2)P_3'(X) = 16X+40X^3+24X^5\\
P_5(X) &= (1+X^2)P_4'(X) = 16+136X^2+240X^4+120X^6\\
P_6(X) &= 272X+1232X^3+\cdots \qquad P_7(X) = 272+3968X^2+\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\tan' 0 = 1 \qquad \tan^{(3)} 0 = 2 \qquad 0 = \tan'' 0 = \tan^{(4)} 0
$$

$$
\tan^{(5)} 0 = 16 \qquad \tan^{(7)} 0 = 272 \qquad = \tan^{(6)} 0 = \tan^{(8)} 0
$$

$$
\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \underset{x\to 0}{o}(x^8) \qquad \text{car } \frac{272}{7!} = \frac{17}{315}
$$

⊳ La méthode suivante ramène le calcul du développement limité de $\tan x$ en 0 à la résolution d'un système linéaire triangulaire dont les inconnues sont les coefficients du développement limité de $\tan x$; elle évite de calculer le développement limité du quotient $1/\cos x$, et exploite l'existence et l'unicité du développement limité d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$; enfin la parité de ces fonctions permet d'omettre le calcul d'un terme sur deux :

$$
\tan x = t_1 x + t_3 x^3 + t_5 x^5 + t_7 x^7 + \underset{x\to 0}{o}(x^8)
$$

$$
\begin{aligned}
\cos x\, \tan x = {} & t_1 x + \Big(t_3 - \frac{t_1}{2}\Big)x^3 + \Big(t_5 - \frac{t_3}{2} + \frac{t_1}{24}\Big)x^5\\
& + \Big(t_7 - \frac{t_5}{2} + \frac{t_3}{24} - \frac{t_1}{720}\Big)x^7 + \underset{x\to 0}{o}(x^8)\\
& = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \underset{x\to 0}{o}(x^8)
\end{aligned}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
t_1 &= 1\\
t_3 - \frac{t_1}{2} &= -\frac{1}{6}\\
t_5 - \frac{t_3}{2} + \frac{t_1}{24} &= \frac{1}{120}\\
t_7 - \frac{t_5}{2} + \frac{t_3}{24} - \frac{t_1}{720} &= -\frac{1}{5040}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
t_1 &= 1\\
t_3 &= -\frac{1}{6} + \frac{t_1}{2} = \frac{1}{3}\\
t_5 &= \frac{1}{120} + \frac{t_3}{2} - \frac{t_1}{24} = \frac{2}{15}\\
t_7 &= -\frac{1}{5040} + \frac{t_5}{2} - \frac{t_3}{24} + \frac{t_1}{720} = \frac{17}{315}
\end{aligned}
\right.
$$

⊳ L'application tan est l'application réciproque de arctan dont le développement limité est connu ; le développement limité à l'ordre 8 en 0 de l'application composée $\tan\circ\arctan = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est $x + \underset{x\to 0}{o}(x^8)$; il reste donc à identifier ce développement limité avec celui de $\tan\circ\arctan$ en remarquant que la parité de ces fonctions simplifie certains calculs :

$$
\begin{aligned}
\tan x &= t_1 x + t_3 x^3 + t_5 x^5 + t_7 x^7 + \underset{x\to 0}{o}(x^8)\\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \underset{x\to 0}{o}(x^8)\\
\arctan^3 x &= x^3 - \frac{3x^5}{3} + \frac{3x^7}{9} + + \frac{3x^7}{5} + \underset{x\to 0}{o}(x^8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan(\arctan x) = {} & t_1\Big(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\Big) + t_3\Big(x^3 - x^5 + \frac{14x^7}{15}\Big)\\
& + t_5\Big(x^5 - \frac{5x^7}{7}\Big) + t_7 x^7 + \underset{x\to 0}{o}(x^8)\\
= {} & t_1 x + \Big(-\frac{t_1}{3} + t_3\Big)x^3 + \Big(\frac{t_1}{5} - t_3 + t_5\Big)x^5\\
& + \Big(-\frac{t_1}{7} + \frac{14t_3}{15} - \frac{5t_5}{3} + t_7\Big)x^7 + \underset{x\to 0}{o}(x^8)\\
= {} & x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 + 0x^6 + 0x^7 + \underset{x\to 0}{o}(x^8)
\end{aligned}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
t_1 &= 1\\
-\frac{t_1}{3} + t_3 &= 0\\
\frac{t_1}{5} - t_3 + t_5 &= 0\\
-\frac{t_1}{7} + \frac{14t_3}{15} - \frac{5t_5}{3} + t_7 &= 0
\end{aligned}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{aligned}
t_1 &= 1\\
t_3 &= \frac{t_1}{3} = \frac{1}{3}\\
t_5 &= -\frac{t_1}{5} + t_3 = \frac{2}{15}\\
t_7 &= \frac{t_1}{7} - \frac{14t_3}{15} + \frac{5t_5}{3} = \frac{17}{315}
\end{aligned}
\right.
$$

Exemples de développements limités

▶ Détermination des quatre premiers termes des développements de ces trois puissances au voisinage de 0 :

$$(1+x)^{1/x} \qquad (1+x^2)^{1/x} \qquad (1-x)^{1/x^2}$$

▶ La méthode usuelle consiste à calculer d'abord leur logarithme :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$
$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} = x - \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
$$\frac{\ln(1-x)}{x^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
$$(1+x)^{1/x} = \exp\Big(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\Big)$$
$$= e\ \exp\Big(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\Big)$$
$$= e\Big(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{48}\Big)$$
$$= e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} - \frac{7ex^3}{16} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
$$(1+x^2)^{1/x} = 1 + x - \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
$$(1-x)^{1/x^2} = \exp\Big(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\Big)$$
$$= e^{-1/x-1/2}\ \exp\Big(-\frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\Big)$$
$$= \frac{e^{-1/x}}{\sqrt{e}}\Big(1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) + \frac{x^2}{18} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^3}{162}\Big)$$
$$= \frac{e^{-1/x}}{\sqrt{e}}\Big(1 - \frac{x}{3} - \frac{7x^2}{26} - \frac{199x^3}{1620} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\Big) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{e^{-1/x}}{\sqrt{e}}$$

Cette dernière expression est appelée développement asymptotique

au voisinage de $x = 0$ et non développement limité à cause du facteur $e^{-1/x}$ de limite indéterminée en 0.

▶ Déduire ces limites de suites des développements précédents :

$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n \qquad \Big(\frac{n^2+1}{n^2}\Big)^n \qquad \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{n^2}$$

▷ Poser $x = 1/n$ ramène l'étude de ces suites en $+\infty$ à celle des fonctions précédentes au voisinage de $x = 0$:

$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = (1+x)^{1/x}$$
$$= e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} - \frac{7e}{16n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \qquad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n = e$$
$$\Big(\frac{n^2+1}{n^2}\Big)^n = \Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big)^n = (1+x^2)^{1/x}$$
$$= 1 + \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\Big(\frac{1}{n}\Big) \qquad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^2+1}{n^2}\Big)^n = 1$$
$$\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{n^2} = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{n^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{e^{-n}}{\sqrt{e}}$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-1/x} = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1-x)^{1/x^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{n^2} = 0$$

▶ Développement limité de $(\tan x)^{\tan(2x)}$ à l'ordre 3 au voisinage de $\pi/4$.

▷ Le développement limité de $\tan x$ peut par exemple être obtenu à partir des formules d'addition afin de pouvoir exploiter le formulaire de $\tan h$ au voisinage de 0, avec $h = x - \pi/4$:

$$\tan x = \tan(\pi/4 + (x - \pi/4)) = \frac{\tan(\pi/4) + \tan h}{1 - \tan(\pi/4)\ \tan h}$$
$$= \frac{1+\tan h}{1-\tan h} = \frac{1 + h + \frac{h^3}{3} + \underset{h\to 0}{o}(h^4)}{1 - h - \frac{h^3}{3} + \underset{h\to 0}{o}(h^4)}$$

$$\frac{1}{1-h-\frac{h^3}{3}+\underset{h\to0}{o}(h^4)}$$
$$=1+h+\frac{h^3}{3}+\underset{h\to0}{o}(h^4)+h^2+\frac{2h^4}{3}+h^3+h^4$$
$$=1+h+h^2+\frac{4h^3}{3}+\frac{5h^4}{3}+\underset{h\to0}{o}(h^4)$$

$\tan x$
$$= \quad 1+h+h^2+\frac{4h^3}{3}+\frac{5h^4}{3}+\frac{32h^5}{15}+\underset{h\to0}{o}(h^5)$$
$$+h+h^2+h^3+\frac{4h^4}{3}+\frac{h^3}{3}+\frac{h^4}{3}$$
$$=1+2h+2h^2+\frac{8h^3}{3}+\frac{10h^4}{3}+\underset{h\to0}{o}(h^4)$$
$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\underset{h\to0}{o}(u^4)$$

$\ln(\tan x)$
$$= \quad 2h+2h^2+\frac{8h^3}{3}+\frac{10h^4}{3}+\underset{h\to0}{o}(h^4)$$
$$-2h^2-4h^3-2h^4-\frac{16h^4}{3}+\frac{8h^3}{3}+8h^4-4h^4$$
$$=2h+\frac{4h^3}{3}+\underset{h\to0}{o}(h^4)$$

La limite de $\tan(2x)$ en $\pi/4$ est $\pm\infty$, et les transformations trigonométriques classiques aboutissent à une factorisation de $1/h$ du développement limité :
$$\tan(2x)=\tan(\pi/2+2(x-\pi/4))=\tan(\pi/2+2h)$$
$$=-\frac{1}{\tan 2h}=-\frac{1}{2h+\frac{8h^3}{3}+\frac{64h^5}{15}+\underset{h\to0}{o}(h^6)}$$
$$=-\frac{1}{2h}\,\frac{1}{1+\frac{4h^2}{3}+\frac{32h^4}{15}+\underset{h\to0}{o}(h^5)}$$
$$=-\frac{1}{2h}\Big(1-\frac{4h^2}{3}-\frac{32h^4}{15}+\underset{h\to0}{o}(h^5)+\frac{16h^4}{9}\Big)$$
$$=-\frac{1}{2h}+\frac{2h}{3}+\frac{8h^3}{45}+\underset{h\to0}{o}(h^4)$$

Le développement limité initial est d'ordre 6, et par la factorisation de $1/h$, le résultat final est d'ordre 4.

$\tan(2x)\ \ln(\tan x)$
$$=\Big(-\frac{1}{2h}+\frac{2h}{3}+\frac{8h^3}{45}+\underset{h\to0}{o}(h^4)\Big)\Big(2h+\frac{4h^3}{3}+\underset{h\to0}{o}(h^4)\Big)$$
$$=-1+\frac{4h^2}{3}-\frac{2h^2}{3}+\underset{h\to0}{o}(h^3)=-1+\frac{2h^2}{3}+\underset{h\to0}{o}(h^3)$$

Le résultat précédent est d'ordre 3 à cause du produit par $1/h$; en fait un développement limité à l'ordre 2 de $\tan(2x)$ suffirait pour mener à bien les calculs à l'ordre 3. En revanche il est nécessaire d'avoir le développement de $\ln(\tan x)$ à l'ordre 4.

$(\tan x)^{\tan(2x)}$
$$=\exp\Big(-1+\frac{2h^2}{3}+\underset{h\to0}{o}(h^3)\Big)$$
$$=\frac{1}{e}\ \exp\Big(\frac{2h^2}{3}+\underset{h\to0}{o}(h^3)\Big)=\frac{1}{e}\Big(1+\frac{2h^2}{3}+\underset{h\to0}{o}(h^3)\Big)$$
$$=\frac{1}{e}+\frac{2h^2}{3e}+\underset{h\to0}{o}(h^3)=\frac{1}{e}+\frac{2(x-\pi/4)^2}{3e}+\underset{x\to\pi/4}{o}(x^3)$$
$$\lim_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan(2x)}=\frac{1}{e}$$

∗ Une autre possibilité pour obtenir le développement limité de $\tan x$ en $\pi/4$ consiste à calculer ses dérivées successives comme présenté dans la partie précédente, pour appliquer ensuite la formule de Taylor-Young à cette fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

∗ Ce développement limité détermine une limite de la forme *a priori* indéterminée 1^∞.

➢ Développement asymptotique à l'ordre $1/n$ en $+\infty$ de ce quotient :
$$\frac{n^{3/2}}{(-1)^n\sqrt{n}+1}$$

⊳ La méthode du développement asymptotique de ce quotient, en fonction des puissances de $\sqrt{n}$ au voisinage de $+\infty$, est similaire :

$$
\begin{aligned}
\frac{n^{3/2}}{(-1)^n\sqrt{n}+1} &= (-1)^n n\,\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}\\
&=(-1)^n n\Big(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{2n}}{n}-\frac{(-1)^{3n}}{n^{3/2}}+\frac{(-1)^{4n}}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\\
&=(-1)^n n-\sqrt{n}+(-1)^n-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)
\end{aligned}
$$

► Développement limité à l'ordre 7 au voisinage de 0, après avoir justifié son existence, de l'application réciproque de $f : x \mapsto x + x^3$.

▷ L'application $f : x \mapsto x + x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$, car f est strictement croissante et continue. Son application réciproque $g = f^{-1}$ est continue.
Par ailleurs f est dérivable et sa dérivée $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1$ ne s'annule pas, donc g est dérivable. En outre l'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et donc g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et possède un développement limité à tout ordre.
L'application f est impaire, il en est de même pour g et les coefficients d'ordre impair du développement de g sont nuls. Une méthode par identification des coefficients détermine les premiers termes du développement de g en 0 :

$$
\begin{aligned}
&f(x)=x+x^3\\
&g(x)=f^{-1}(x)=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+\underset{x\to0}{o}(x^7)\\
&f(0)=0=g(0)\qquad f'(0)=1\qquad g'(0)=\frac{1}{1}=1=a_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)(x) &= x = 0+1x+\sum_{k=2}^{2}0x^k+\underset{x\to0}{o}(x^7)\\
&=\sum_{k=0}^{3}a_{2k+1}(x+x^3)^{2k+1}+\underset{x\to0}{o}(x^7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{ordre 3 : } x+x^3+a_3(x+x^3)^3+\underset{x\to0}{o}(x^3) && a_3=-1\\
&\text{ordre 5 : } x-3x^5-3x^7+a_5(x+x^3)^5+\underset{x\to0}{o}(x^5) && a_5=3\\
&\text{ordre 7 : } x-12x^7+a_7(x+x^3)^7+\underset{x\to0}{o}(x^7) && a_7=12
\end{aligned}
$$

$$
g(x)=x-x^3+3x^5-12x^7+\underset{x\to0}{o}(x^7)
$$