ESPACES VECTORIELS

La notion d'espace vectoriel est une structure algébrique aussi employée en géométrie et en analyse. Cette structure est définie à partir des groupes et des corps dont ce cours suppose connues les définitions et les principales propriétés.
Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n est un entier strictement positif.

Présentation des espaces vectoriels

Définition

• Un ensemble E muni d'une addition de vecteurs $+ : E \times E \to E$ et d'une multiplication par un scalaire $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si et seulement si ces opérations vérifient les propositions suivantes :

$$\begin{array}{lll} & & (E,+) \text{ est un groupe commutatif d'élément neutre noté } \mathbf{0}_E \\ \forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2 & \forall\,\boldsymbol{u}\in E & (\lambda+\mu)\cdot\boldsymbol{u} = (\lambda\cdot\boldsymbol{u}) + (\mu\cdot\boldsymbol{u}) \\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K} & \forall\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in E^2 & \lambda\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = (\lambda\cdot\boldsymbol{u}) + (\lambda\cdot\boldsymbol{v}) \\ \forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2 & \forall\,\boldsymbol{u}\in E & (\lambda\times\mu)\cdot\boldsymbol{u} = \lambda\cdot(\mu\cdot\boldsymbol{u}) \\ & \forall\,\boldsymbol{u}\in E & 1\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \end{array}$$

• Les éléments de E sont appelés vecteurs et sont notés $\boldsymbol{u}$ ou $\vec{u}$.
Les éléments de $\mathbb{K}$, souvent notés avec des lettres grecques comme λ ou μ, sont appelées des scalaires, et $\mathbb{K}$ est appelé le corps de base de E.

• Le groupe commutatif $(E,+)$ d'élément neutre $\mathbf{0}_E$ construit à partir de la loi de composition interne $+$ qui est associative, commutative et pour laquelle tout élément $\boldsymbol{u}$ de E possède un symétrique noté $-\boldsymbol{u}$:

$$\begin{array}{rl} \forall\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in E^2 & \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\in E \\ \forall\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in E^3 & (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \\ \forall\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in E^2 & \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \\ \forall\,\boldsymbol{u}\in E^2 & \boldsymbol{u}+\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E+\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \\ \forall\,\boldsymbol{u}\in E^2 & \boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E \end{array}$$

• La structure d'espace vectoriel n'est pas celle d'un anneau car le produit par un scalaire $\cdot$ est une opération externe $\mathbb{K}\times E \to E$ et pas, comme pour les anneaux, une loi de composition interne sur E définie par $E\times E\to E$.
La notion d'associativité et de distributivité est généralement réservé aux lois de composition interne, pour cette raison le produit par un scalaire n'est pas présenté comme associatif et distributif par rapport à l'addition sur E même si les formules sont comparables.

Dans la suite du chapitre E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, λ et μ sont des scalaires de $\mathbb{K}$, et $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ des vecteurs de E.

• Le vecteur $\mathbf{0}_E$ est appelé vecteur nul, il vérifie $\boldsymbol{u}+\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E+\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.
Le symétrique d'un vecteur $\boldsymbol{u}\in E$ pour l'addition $+$ sur E est appelé opposé de $\boldsymbol{u}$ et est noté $-\boldsymbol{u}$.

• L'addition sur les vecteurs $+$ est notée de la même façon que l'addition sur le corps de base $\mathbb{K}$. Le type des termes additionnés — vecteurs ou scalaires — permet de déterminer si la loi $+$ est celle de $\mathbb{K}$ ou de E ; il en est de même pour le produit et l'opposé.
Les addition d'un vecteur et d'un scalaire n'a pas de sens, pas plus que le produit de deux vecteurs.

• Par abus de notation l'opérateur $\cdot$ est généralement omis, et la différence de deux vecteurs est définie à partir de l'opposé :

$$\lambda\,\boldsymbol{u} = \lambda\cdot\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{v})$$

• L'associativité de la loi de composition interne $+$ sur E autorise les notations $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ à la place de $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$.
L'expression $\lambda\mu\,\boldsymbol{u}$ correspond à l'égalité $\lambda(\mu\,\boldsymbol{u}) = (\lambda\mu)\,\boldsymbol{u}$ valable dans tout espace vectoriel.

Premières propriétés

• Un espace vectoriel E est un groupe commutatif pour l'addition des vecteurs et en a donc les propriétés.
Ainsi le vecteur nul $\mathbf{0}_E$ et l'opposé $-\boldsymbol{u}$ du vecteur $\boldsymbol{u}$ sont uniques, la commutativité du groupe entraîne cette première égalité, et la régularité de loi $+$ l'implication suivante :

$$\begin{array}{rl} \forall\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in E^2 & -(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \\ \forall\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in E^2 & \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \Longrightarrow \boldsymbol{v}=\boldsymbol{w} \\ & \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \Longrightarrow \boldsymbol{u}=\boldsymbol{v} \end{array}$$

• Les manipulations de base du vecteur nul reposent sur ces propriétés :

$$\begin{array}{rl} \forall\, \boldsymbol{u}\in E & 0\,\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E \\ \forall\, \lambda\in\mathbb{K} & \lambda\,\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E \\ \forall\, \lambda\in\mathbb{K}\ \ \forall\, \boldsymbol{u}\in E & \lambda\,\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E \Longrightarrow (\lambda = 0 \text{ OU } \boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E) \end{array}$$

• Les deux premières égalités reposent principalement la structure de groupe commutatif de $(E,+)$ et la régularité de l'addition des vecteurs :

$$0\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{u} = (0+0)\boldsymbol{u} = 0\boldsymbol{u} = 0\boldsymbol{u} + \mathbf{0}_E \Longrightarrow 0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E$$
$$\lambda\mathbf{0}_E + \lambda\mathbf{0}_E = \lambda(\mathbf{0}_E + \mathbf{0}_E) = \lambda\mathbf{0}_E = \lambda\mathbf{0}_E + \mathbf{0}_E \Longrightarrow \lambda\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$$

• La réciproque provient du fait que tout scalaire λ non nul du corps $\mathbb{K}$ possède un inverse :

$$\lambda\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E \text{ ET } \lambda \neq 0 \Longrightarrow \boldsymbol{u} = \frac{\lambda}{\lambda}\,\boldsymbol{u} = \frac{1}{\lambda}(\lambda\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$$

• Ces égalités récapitulent les propriétés de l'opposé d'un vecteur :

$$\begin{array}{rl} \forall\, \lambda\in\mathbb{K}\ \ \forall\, \boldsymbol{u}\in E & (-\lambda)\boldsymbol{u} = -(\lambda\,\boldsymbol{u}) = \lambda(-\boldsymbol{u}) \quad \text{est aussi noté } -\lambda\,\boldsymbol{u} \\ \forall\, \boldsymbol{u}\in E & -\boldsymbol{u} = (-1)\boldsymbol{u} \end{array}$$

• Les démonstration reposent sur la définition de l'opposé d'un vecteur et sur la régularité de l'addition :

$$\begin{array}{l} \lambda\boldsymbol{u} - (\lambda\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E = 0\boldsymbol{u} = (\lambda-\lambda)\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} + (-\lambda)\boldsymbol{u} \\ \Longrightarrow -(\lambda\boldsymbol{u}) = (-\lambda)\boldsymbol{u} \\ \lambda\boldsymbol{u} - \lambda\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E = 0\boldsymbol{u} = \lambda(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u} + \lambda(-\boldsymbol{u}) \\ \Longrightarrow -(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda(-\boldsymbol{u}) \end{array}$$

La dernière égalité applique les égalités précédentes à $\lambda = -1$ et $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

• L'ensemble vide $\emptyset$ n'est pas un espace vectoriel car tout espace vectoriel E contient le vecteur nul $\mathbf{0}_E$.

Espaces vectoriels usuels

Espaces de vecteurs-coordonnées

• L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les lois $+$ et $\cdot$ définies coordonnée par coordonnée :

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \qquad\qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

Par exemple $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

• Le fait que $\mathbb{K}$ soit un corps par construction des espaces vectoriels signifie en particulier que $(\mathbb{K},+)$ est un groupe commutatif. Ainsi la structure produit $(\mathbb{K}^n,+)$ est donc un groupe commutatif pour la loi produit déterminée coordonnée par coordonnée.
La vérification des propositions associées au produit par un scalaire dans la définition des espaces vectoriels repose aussi sur un calcul coordonnée par coordonnée.

• $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les opérations $+$ et $\cdot$ de $\mathbb{K}$, ainsi $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $\mathbb{C}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

• Par convention $\mathbb{K}^0$ est un espace vectoriel réduit au vecteur nul $\mathbb{K}^0 = \{\mathbf{0}\}$.

Espaces vectoriels d'applications

• Si X est un ensemble non vide et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, l'ensemble E^X des applications de X dans E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les opérations usuelles $f+g$ et λf sur les applications :

$$\begin{array}{rl} f+g : X & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto f(x)+g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \lambda f : X & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \lambda f(x) \end{array} \qquad \text{où } (f,g)\in (E^X)^2$$

• L'application nulle $\mathbf{0}_{X\to E} : x \mapsto \mathbf{0}_E$ est le vecteur nul de l'espace des applications E^X de X dans E, et l'opposé $-f$ d'une application f est le vecteur opposé dans l'espace vectoriel E^X.

• En particulier l'ensemble $\mathbb{R}^I$ des applications d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, et l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs réelles sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

• Une preuve repose sur les vérifications par la somme et le produit par un scalaire d'applications de la définition des espaces vectoriels. Les égalités ci-dessous justifie trois de ces propositions ; toutes ces fonctions sont définies de X dans E et la démonstration de l'égalité de ces fonctions consiste à vérifier l'égalité des images de $x \in X$ quelconque :

$$\begin{aligned}(\mathbf{0}_{X\to E} +_{E^X} f)(x) &= \mathbf{0}_{X\to E}(x) +_E f(x) = \mathbf{0}_E + f(x) = f(x)\\ &= f(x) + \mathbf{0}_E = f(x) + \mathbf{0}_{X\to E}(x) = (f + \mathbf{0}_{X\to E})(x)\end{aligned}$$

La somme dans le premier terme est l'addition sur E^X notée $+_{E^X}$ alors que le signe $+$ du deuxième terme représente l'addition des vecteurs des E notée $+_E$ par soucis de précision. Dans les termes suivants le contexte précise si l'opération est effectuée dans E ou dans E^X.
Ces égalités dans E sur les images de $x \in X$ termine la preuve de l'égalité d'applications $\mathbf{0}_{X\to E} + f =_{E^X} = f + \mathbf{0}_{X\to E}$.
Les autres preuves sont similaires, celle-ci justifie une des propriétés caractéristiques du produit par un scalaire λ ; les indices précisent les ensembles sur lesquelles opèrent chaque loi :

$$\begin{aligned}&(\lambda \cdot_{E^X} (f +_{E^X} g))(x) = \lambda \cdot_E ((f +_{E^X} g)(x)) = \lambda \cdot_E (f(x) +_E g(x))\\ &= (\lambda \cdot_E f(x)) +_E (\lambda \cdot_E g(x)) = (\lambda \cdot_{E^X} f)(x) +_E (\lambda \cdot_{E^X} g)(x)\\ &= (\lambda \cdot_{E^X} f +_{E^X} \lambda \cdot_{E^X} g)(x)\end{aligned}$$

En conclusion $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$.
Ces égalités vérifient sur le même principe que l'application $-f$ est l'opposé de la fonction f :

$$\begin{aligned}\mathbf{0}_{X\to E}(x) = \mathbf{0}_E &= -(f(x)) + f(x) = ((-f) + f)(x)\\ &= f(x) - f(x) = (f + (-f))(x)\end{aligned}$$

• Cette propriété impose que l'ensemble d'arrivée E soit un espace vectoriel, mais n'énonce aucune hypothèse sur l'ensemble de départ X.

• La démonstration précédente justifie de façon analogue que l'ensemble des applications G^X de X dans un groupe G est un groupe pour la loi définie sur les applications par $(f \star g)(x) = f(x) \star g(x) \in G$.

Autres espaces vectoriels

• L'ensemble $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les opérations usuelles : l'addition de deux complexes et la multiplication d'un complexe par un nombre réel opèrent sur les parties réelles et les parties imaginaires comme sur des coordonnées.

• Le singleton $\{\mathbf{0}\}$ est un espace vectoriel, appelé espace vectoriel nul, pour les opérations $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ et $\lambda\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Combinaisons linéaires

• Lorsque $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ est une famille finie de n vecteurs de E, et $(\lambda_k)_{k=1}^n$ est une famille de n scalaires, l'expression ci-dessous est appelée combinaison linéaire des vecteurs $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, \boldsymbol{u}_k = \lambda_1\, \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\, \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_n\, \boldsymbol{u}_n$$

Modifier l'ordre des termes et regrouper par des parenthèses certains calculs ne modifie pas la valeur d'une combinaison linéaire car l'addition des vecteurs est associative et commutative.

• La valeur d'une combinaison linéaire réduite à un terme est ce terme, et la somme vide est par convention le vecteur nul :

$$\sum_{k=1}^{1} \lambda_k\, \boldsymbol{u}_k = \lambda_1\, \boldsymbol{u}_1 \qquad \sum_{k=1}^{0} \lambda_k\, \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0}_E$$

• Une combinaison linéaire à un terme correspond ainsi au produit d'un vecteur par un scalaire.
Une combinaison de vecteurs dont tous les coeffcients sont de valeur 1 correspond à une somme de vecteurs.

Espaces vectoriels produits

• Si E et F sont deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$ alors le produit cartésien $E \times F$ est un espace vectoriel pour les lois produits :

$$\begin{array}{cc} + : (E\times F)\times(E\times F) \to E\times F & \cdot : \mathbb{K}\times(E\times F) \to E\times F\\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{y}) & \lambda\cdot(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\lambda\,\boldsymbol{u}, \lambda\,\boldsymbol{v})\\ \mathbf{0}_{E\times F} = (\mathbf{0}_E, \mathbf{0}_F) & -(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (-\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{v})\end{array}$$

• Cette notion de produits de deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$ s'étend aux produits quelconques d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ par des opérations définies coordonnée par coordonnée.

• La démonstration est similaire aux démonstrations précédentes sur les espaces vectoriels d'applications ou les espaces vectoriels de coordonnées.
Chaque vérification s'effectue en exploitant la structure d'espace vectoriel sur chaque coordonnée.

• Ce théorème et le fait que $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ prouvent d'une autre façon que $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K}\times\mathbb{K}$,

$\mathbb{K}^3 = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, etc.

Sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et F et G sont des sous-ensembles de E.

Définition et premières propriétés

• Le sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel, aussi noté *sev*, de E si et seulement si F a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour opérations $+$ et $\cdot$ de E restreintes à F.

• En particulier la restrictions des opérations $+$ et $\cdot$ à F doivent aboutir à des opérations sur F, et F donc F est stable

• Tout sous-espace vectoriel est donc, par définition, stable pour l'addition des vecteurs et pour la multiplication par un scalaire.

$$\forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in F^2 \quad \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in F \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall \boldsymbol{u} \in F \quad \lambda \boldsymbol{u} \in F$$

Les restrictions des opérations $+$ et $\cdot$ à F doivent aboutir par définition de l'espace vectoriel F à des opérations sur F :

• La stabilité par combinaison linéaire de deux vecteurs d'un sous-espace s'énonce ainsi :

$$\forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in F^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v} \in F$$

• La stabilité par combinaison linéaire de deux vecteurs découle de la stabilité pour la somme et le produit.
Réciproquement la stabilité de F pour les combinaisons linéaires entraine celle pour les additions et produits par un scalaire, en prenant $\lambda = \mu = 1$ ou $\mu = 0$.
Plus généralement une récurrence sur le nombre de termes prouve par associativité que la stabilité par combinaison linéaire de deux termes est équivalente à la stabilité par combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs.

• La structure de groupe de $(E, +)$ entraîne que le vecteur nul de E et l'opposé d'un vecteur du sous-espace vectoriel F sont des éléments de F :

$$F \neq \emptyset \qquad \boldsymbol{0}_E \in F \qquad \forall \boldsymbol{u} \in F \quad -\boldsymbol{u} \in F$$

• La stabilité par opposé peut aussi bien être vue comme une propriété du groupe $(E, +)$ que comme un cas particulier pour $\lambda = -1$ de la stabilité par produit.

• Les sous-ensembles $\{\boldsymbol{0}_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Propriété caractéristique des sous-espaces vectoriels

• Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(F \subset E) \ \mathsf{ET} \ (\boldsymbol{0}_E \in F) \ \mathsf{ET} \ F \text{ est stable par } + \ \mathsf{ET} \ F \text{ est stable par } \cdot$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(F \subset E) \ \mathsf{ET} \ (F \neq \emptyset) \ \mathsf{ET} \ \big(\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \ \forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in F^2 \ \lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v} \in F\big)$$

Autrement dit un sous-ensemble non vide de E stable pour les combinaisons linéaires est un sous-espace vectoriel de E.

• Le paragraphe précédent justifie que la première proposition entraîne la deuxième, et que la deuxième entraîne la troisième.
Il reste à montrer que la troisème proposition implique que le sous-ensemble $F \subset E$ a une structure d'espace vectoriel.
Le sous-ensemble F vérifie la propriété caractéristique des sous-groupes additifs en prenant $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. En conclusion F a un sous-groupe de $(E, +)$ et a une structure de groupe.
La condition $\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v} \in E$ appliquée à $\mu = 0$ justifie que F est stable par produit par un scalaire quelconque $\lambda \in \mathbb{K}$.
Les autres propriétés caractéristiques des sous-espaces vectoriels sont vérifiées par les vecteurs de F qui sont des vecteurs du sous-espace vectoriel E, par exemple $(\lambda + \mu)\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{u}$ pour tout vecteur de F car cette égalité est vérifiée pour tout vecteur de E et car $F \subset E$.

• La proposition la plus simple à rédiger est souvent la deuxième, et celle dont la rédaction est la plus concise est la dernière.

• Dans ces propositions les conditions $F \neq \emptyset$ et $\boldsymbol{0}_E \in F$ sont équivalentes, car $\boldsymbol{u} \in F$ entraîne que $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_E \in F$ dès que F est stable pour le produit par un scalaire.
Sur le même principe la stabilité de F pour le produit par un scalaire λ aboutit à la stabilité de F pour l'opposé en prenant $\lambda = -1$, et permet de justifier ensuite que F est un sous-groupe de $(E, +)$.

Exemples de sous-espaces vectoriels

• Les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}at\\bt\end{pmatrix} \;/\; t\in\mathbb{R}\right\} \qquad \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \;/\; ax+by=0\right\} \qquad \text{où } (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

• Au contraire les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ ci-dessous ne sont pas des sous-espaces vectoriels car ils ne contiennent par le vecteur nul :

$$\left\{\begin{pmatrix}t+1\\2t\end{pmatrix} \;/\; t\in\mathbb{R}\right\} \qquad \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \;/\; x+2y=3\right\} \qquad \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \;/\; x^2+y^2=1\right\}$$

• Ces sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas stables pour la somme ou pour l'opposé des vecteurs :

$$F = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \;/\; |x|=|y|\right\} \qquad G = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \;/\; x\geq 0 \text{ ET } y\geq 0\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1\\\pm 1\end{pmatrix}\in F \quad \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\notin F \qquad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\in G \qquad -\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\notin G$$

• Le sous-ensemble F de $\mathbb{K}^n$ caractérisé par la nullité d'une combinaison linéaire de coefficients $(\lambda_k)_{k=1}^n\in\mathbb{K}^n$ quelconques des coordonnées des vecteurs est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

$$F = \left\{\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix} \;/\; \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0\right\} \quad \text{est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}^n \text{ pour toute famille } (\lambda_k)_{k=1}^n \text{ de } \mathbb{K}^n.$$

• Le sous-ensemble précédent F de E contient le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$, n'est donc pas vide.

Avec ces notations, les égalités suivantes justifient que F est stable par combinaison linéaire :

$$U\begin{pmatrix}u_1\\\vdots\\u_n\end{pmatrix} \qquad V\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix} \qquad W\begin{pmatrix}w_1\\\vdots\\w_n\end{pmatrix}$$

$$W = \alpha U + \beta V = \begin{pmatrix}\alpha u_1+\beta v_1\\\vdots\\\alpha u_n+\beta v_n\end{pmatrix}$$

$$U\in F \qquad \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0 \qquad V\in F \qquad \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \lambda_k w_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k(\alpha u_k+\beta v_k) &= \alpha\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k + \beta\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \\ &= \alpha\cdot 0+\beta\cdot 0 = 0 \qquad\qquad W\in F\end{aligned}$$

La propriété caractéristique des sous-espaces prouve donc que F est un sous-espace vectoriel de E.

• Lorsque I est un intervalle ni vide ni réduit à un point de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ des applications continues de I dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathcal{C}^m(I,\mathbb{R})$ des applications de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^m$ où $m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ ont une structure d'espace vectoriel.

• L'ensemble $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ étant inclus dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^I$, justifier que $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est espace vectoriel se fait plus simplement en prouvant que $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}^I$ des applications de I dans $\mathbb{R}$.

• Les propriétés usuelles de l'analyse justifient d'une part que les applications constantes sont continues, ainsi le sous-ensemble $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ de l'ensemble $\mathbb{R}^I$ des applications de I dans $\mathbb{R}$ n'est pas vide.
Elles énoncent d'autre part que le produit par une constante d'une application continue et la somme de deux applications continues sont continues ; ainsi $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.
En conclusion $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^I$.
Les propriétés de linéarité des dérivées successives démontrent de façon analogue que l'ensemble $\mathcal{C}^m(I,\mathbb{R})$ des applications de classe $\mathcal{C}^m$ de I dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.

• Les propriétés de linéarité des dérivées démontrent que l'ensemble $\mathcal{C}^m(I,\mathbb{R})$ des applications de classe $\mathcal{C}^m$ de I dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^I$ des applications de I dans $\mathbb{R}$, lorsque $m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

• Lorsque I est un intervalle ni vide ni réduit à un point de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ des applications continues de I dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathcal{C}^m(I,\mathbb{R})$ des applications de classe $\mathcal{C}^m$ de I dans $\mathbb{R}$ ont une structure d'espace vectoriel.

Intersection des sous-espaces vectoriels

• L'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

• Une preuve consiste à vérifier la propriété caractéristique des sous-espaces sur l'instersection, sachant que chaque sous-espace la vérifie et contient le vecteur nul.

• Cet ensemble est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ lorsque $(\lambda_k)_{k=1}^n$ et $(\mu_k)_{k=1}^n$ sont deux familles de scalaires de $\mathbb{K}^n$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Big/ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0 \text{ ET } \sum_{k=1}^{n} \mu_k v_k = 0 \right\}$$

est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

• La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est généralement pas un sous-espace vectoriel ; les sous-ensembles F et G sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ et $F \cup G$ n'est pas un sous-espace car il n'est pas stable pour la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

$$F = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \Big/ a \in \mathbb{R} \right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F \subset F \cup G$$

$$G = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \Big/ a \in \mathbb{R} \right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in G \subset F \cup G$$

$$F \cup G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big/ |x| = |y| \right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F \cup G$$

• La réunion $F \cup G$ de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.

Si $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors $F \cup G = G$ ou $G \cup F = F$ qui sont des sous-espaces vectoriels par hypothèse.

Réciproquement si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel montrons que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Deux cas sont possibles $F \subset G$ ou $F \not\subset G$.

Dans le premier cas la démonstration est finie.

Dans le second $F \not\subset G$, ainsi il existe $\boldsymbol{u} \in F$ tel que $\boldsymbol{u} \notin G$. Soit $\boldsymbol{v} \in G$ montrons que $\boldsymbol{v} \in F$ en étudiant $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.

La somme $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in F \cup G$ du fait que $\boldsymbol{u} \in F \cap F \cup G$, que $\boldsymbol{v} \in G \cap F \cup G$, et que par hypothèse $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel.

Deux cas sont encore possibles, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in F$ ou $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in G$.

Si $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in G$, alors $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \in F$ car tout sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire. Ce résultat contredit l'hypothèse $\boldsymbol{v} \notin F$ et donc le cas $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in G$ est impossible.

Ainsi $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \notin G$ et $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in F \cup G$, en conclusion $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in F$. Le sous-espace F est stable par combinaison linéaire et différence de deux vecteurs de F donc $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u} \in F$.

Cette proposition termine la preuve de l'inclusion $G \subset F$.

Dans les deux cas $F \subset G$ ou $G \subset F$. La démonstration réciproque est terminée.

Sous-espaces vectoriels engendrés

Dans ce paragraphe X et Y sont deux sous-ensembles de E.

• L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X est un sous-espace vectoriel, appelé sous-espace vectoriel engendré par X :

$$\text{Vect}\, X = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \boldsymbol{x}_k \Big/ n \in \mathbb{N} \text{ ET } (\lambda_k)_{k=1}^n \in \mathbb{K}^n \text{ ET } (\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^n \in X^n \right\}$$

$$X \subset \text{Vect}\, X \subset \text{Vect}\, X$$

$$\text{Vect}\, \boldsymbol{u} = \text{Vect}\, \{\boldsymbol{u}\} = \mathbb{K}\, \boldsymbol{u} \qquad \text{Vect}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \text{Vect}\, \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} = \mathbb{K}\, \boldsymbol{u} + \mathbb{K}\, \boldsymbol{v}$$

Cette dernière ligne décrit les deux notions possibles de l'espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.

• Cette définition appliquée avec $n = 0$ énonce $\mathbf{0}_E \in \text{Vect}\, X$.

• L'ensemble $\boldsymbol{X}$ est inclus dans E car toute combinaison linéaire de vecteurs de $X \subset E$ est un vecteur de l'espace E.

Le sous-ensemble $\text{Vect}\, X$ contient le vecteur nul $\mathbf{0}_E$ par convention sur la combinaison linéaire vide.

Par ailleurs tout vecteur $\boldsymbol{u}$ de X peut s'écrire sous la forme de la combinaison linéaire à un vecteur $\boldsymbol{u} = 1 \cdot \boldsymbol{u} \in \text{Vect}\, X$. Ainsi $X \subset \text{Vect}\, X$.

Si $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ sont deux vecteurs de $\text{Vect}\, X$ alors $\alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w}$ est une combinaison linéaire de vecteurs $n + p$ vecteurs de X :

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \boldsymbol{x}_k \qquad \boldsymbol{w} = \sum_{k=1}^{p} \mu_k \boldsymbol{y}_k$$

$$\alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w} = \sum_{k=1}^{n} \alpha \lambda_k \boldsymbol{x}_k + \sum_{k=1}^{p} \beta \mu_k \boldsymbol{y}_k$$

• Les propriétés de base des sous-espaces engendrés sont les suivantes :

$$\operatorname{Vect} \emptyset = \operatorname{Vect} \{\mathbf{0}_E\} = \{\mathbf{0}_E\}$$
$$X \subset Y \Longrightarrow \operatorname{Vect} X \subset \operatorname{Vect} Y$$
$$\operatorname{Vect} X = X \Longleftrightarrow X \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$

• La première proposition consiste à vérifier que tout vecteur $\boldsymbol{u}$ est une combinaison linéaire à un vecteur :

$$\forall\, \boldsymbol{u} \in X \quad \boldsymbol{u} = 1 \cdot \boldsymbol{u} \in \operatorname{Vect} X$$

La deuxième proposition reprend la convention d'une combinaison linéaire sans vecteur dont la valeur est le vecteur nul $\mathbf{0}_E$.
Si $X \subset Y$ et si $\boldsymbol{v}$ est une combinaison linéaire de vecteurs de X alors ces vecteurs sont dans Y et $\boldsymbol{v}$ est une combinaison linéaire de vecteurs de Y :

$$\boldsymbol{v} \in \operatorname{Vect} X \Longrightarrow \boldsymbol{v} \in \operatorname{Vect} Y$$

Si $X = \operatorname{Vect} X$ alors X est un sous-espace vectoriel car égal au sous-espace $\operatorname{Vect} X$.
Réciproquement montrons que si X est un sous-espace vectoriel, alors $X = \operatorname{Vect} X$.
La preuve de $X \subset \operatorname{Vect} X$ a déjà été démontrée en toute généralité.
Réciproquement si $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Vect} X$ alors $\boldsymbol{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de X ; comme X est un sous-espace vectoriel stable par combinaison linéaire le vecteur $\boldsymbol{u}$ est dans X, d'où la seconde inclusion $\operatorname{Vect} X \subset X$ dans ce cas.

• Le sous-espace engendré $\operatorname{Vect} X$ peut aussi être caractérisé comme étant le plus petit sous-espace de E contenant X ; autrement dit $\operatorname{Vect} X$ est un sous-espace vectoriel et tout sous-espace F contenant X inclus nécessairement $\operatorname{Vect} X$.

$$\mathcal{S} = \Big\{F \subset E \Big/ X \subset F \text{ ET } F \text{ est un sev de } E\Big\}$$
$$\operatorname{Vect} X \in \mathcal{S} \qquad \forall\, F \in \mathcal{S} \quad \operatorname{Vect} X \subset F \qquad \operatorname{Vect} X = \bigcap_{F \in \mathcal{S}} F$$

Cette proposition donne la possibilité de construire $\operatorname{Vect} X$ par une intersection de sous-espaces vectoriels.

• Par construction $\operatorname{Vect} X$ est un sous-espace vectoriel.
Si le sous-espace F contient X alors tous les vecteurs de X sont des vecteurs de F qui est stable par combinaisons linéaires ; ainsi

$\operatorname{Vect} X \subset F$; cette propriété justifie dans l'inclusion de $\operatorname{Vect} X$ dans l'intersection de tous ces sous-espaces de $\mathcal{S}$:

$$\forall\, F \in \mathcal{S} \quad \operatorname{Vect} X \subset F$$
$$\operatorname{Vect} X \subset \bigcap_{F \in \mathcal{S}} F$$

Le sous-espace $\operatorname{Vect} X$ est un des éléments de l'ensemble $\mathcal{S}$ qui est donc non vide, ainsi $\operatorname{Vect} X$ est inclus dans l'intersection de tous les sous-espaces de $\mathcal{S}$, sur le principe :

$$\bigcap_{F \in \mathcal{S}} F = \operatorname{Vect} X \cap \cdots \subset \operatorname{Vect} X$$

Somme de sous-espaces vectoriels

Jusqu'à la fin de cette partie F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

• La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est le sous-espace de E défini ainsi :

$$F + G = \Big\{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \Big/ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in F \times G\Big\} \subset E$$
$$\text{est un sous-espace vectoriel de } E.$$

• Par construction $F + G \subset E$. Le vecteur nul $\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E + \mathbf{0}_E \in F + G$ est bien la somme d'un vecteur du sous-espace F et du sous-espace G.
La stabilité des sous-espaces F et G par combinaisons linéaires et la commutativité de la somme de vecteurs justifie que $F + G$ est stable par combinaisons linéaires :

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') \in F^2 \qquad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') \in G^2$$
$$\lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \mu(\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}') = (\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{u}') + (\lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{v}') \in F + G$$

• Par exemple $\operatorname{Vect}(F \cup G) = F + G$.
Ces inclusions reposent sur le fait que les sous-espaces F et G contiennent le vecteur nul :

$$F = F + \mathbf{0}_E \subset F + G \qquad G = \mathbf{0}_E + G \subset F + G$$
$$\text{donc} \quad F \cup G \subset F + G$$

Le sous-espace somme $F + G$ est un sous-espace, ainsi $F \cup G \subset F + G$ entraîne que toute combinaison linéaire de vecteurs de $F + G$ est un vecteur de $F + G$, ainsi $\operatorname{Vect}(F \cup G) \subset F + G$.
Réciproquement tout vecteur de $F + G$ est par définition la somme

d'un vecteur de F et d'un vecteur de G et est donc une combinaison linéaire d'un vecteur de F et d'un vecteur de G qui sont deux vecteurs de $F \cup G$, donc $F + G \subset \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

• La somme d'une famille $(F_k)_{k=1}^n$ non vide et finie de n sous-espaces vectoriels généralise la définition précédente et est un sous-espace de E :

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{v}_k \;/\; (\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^n \in \prod_{k=1}^{n} F_k \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

• Dans le cas où $X \subset E$ contient un nombre fini de vecteurs $X = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ le sous-espace engendré $\mathrm{Vect}\, X$ s'écrit aussi simplement sous cette forme :

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}\, X &= \mathrm{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n) = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n \\ &= \mathbb{K}\boldsymbol{u}_1 + \mathbb{K}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{u}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{K}\boldsymbol{u}_k \end{aligned}$$

Somme directe de deux sous-espaces

• Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} & F \cap G = \{\mathbf{0}_E\} \\ \Longleftrightarrow & \big(\forall\, \boldsymbol{w} \in F + G \quad \exists!\, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in F \times G \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\big) \\ \Longleftrightarrow & \big(\forall\, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in F \times G \quad \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E \Longrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E\big) \end{aligned}$$

• Une démonstration de ces équivalences par implications circulaires est possible.

La preuve de l'unicité de la décomposition de $\boldsymbol{w} \in F + G$ si $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$ repose sur la stabilité des sous-espaces pour les combinaisons linéaires où $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \in F^2$ et $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \in G^2$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2 &\Longrightarrow \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 \in F \cap G = \{\mathbf{0}_E\} \\ &\Longrightarrow \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}_E \\ &\Longrightarrow \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 \text{ ET } \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

La deuxième proposition appliquée à $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}_E$ énonce l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Par ailleurs $\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E + \mathbf{0}_E \in F + G$ est une décomposion du vecteur nul sur $F + G$, et est donc la seule ; d'où la conclusion :

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E \Longrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E$$

L'intersection de deux sous-espaces est un sous-espace et contient nécessairement le vecteur nul, ainsi $\{\mathbf{0}_E\} \subset F \cap G$.

Réciproquement si $\boldsymbol{w} \in F \cap G \subset F$ alors $-\boldsymbol{w} \in F \cap G \subset G$ et $\mathbf{0}_E = \boldsymbol{w} + (-\boldsymbol{w}) \in F + G$. La deuxième proposition énonce que la seule décomposition possible du vecteur nul est $\mathbf{0}_E + \mathbf{0}_E$, ainsi $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}_E$ et $-\boldsymbol{w} = \mathbf{0}_E$ et donc dans ce cas $F \cap G \subset \{\mathbf{0}_E\}$.

• Si tout vecteur de $F + G$ peut être décomposé de façon unique sous la forme de la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, alors la somme de F et de G est dite directe et est notée $F \oplus G$.

• La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G est directe et est notée $F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$.

• Cette caractérisation est souvent la plus facile à justifier, et elle provient des équivalences précédentes.

Sous-espaces supplémentaires

• Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires si et seulement si $E = F \oplus G$.

• Cette équivalence caractérise les sous-espaces supplémentaires :

$$F \oplus G = E \Longleftrightarrow \big(\forall\, \boldsymbol{w} \in E \quad \exists!\, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in F \times G \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\big)$$

• La démonstration de deux sous-espaces supplémentaires repose sur ces quatre inclusions dont deux sont vérifiées pour tous les sous-espaces :

$E \subset F + G$ $\quad F + G \subset E$ $\quad$ car la somme de deux sev est un sev

$F \cap G \subset \{\mathbf{0}_E\}$ $\quad \{\mathbf{0}_E\} \subset F \cap G$ $\quad$ car l'intersection de sev est un sev.

• Les deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^n$ sont des sous-espaces supplémentaires. Par construction $G = \mathbb{R}V = \mathrm{Vect}(U) \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Le sous-ensemble F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ car il est défini par la nullité d'une combinaison linéaire des coordonnées des vecteurs :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle/ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n \qquad U \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad W \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$G = \mathbb{R}U \subset \mathbb{R}^n \qquad \mu = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k}{n} \qquad W - \mu U \in F \qquad F \oplus G = \mathbb{R}^n$$

Les inclusions $\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\} \subset F \cap G$ et $F + G \subset \mathbb{R}^n$ sont dues aux propriétés des sommes et des intersections des sous-espaces vectoriels.
Si $V \in F \cap G$ alors V est de la forme $V = \lambda U$ et, $n\lambda = 0$ car la somme des coordonnées des vecteurs de F est nulle, d'où $F \cap G \subset \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$.
La décomposition $W = (W - \mu U) + \mu U \in F + G$ justifie la dernière inclusion $\mathbb{R}^n \subset F + G$.

- Montrer l'implication suivante lorsque F, G et H sont trois sous-espaces vectoriels de E :

$$F \subset H \qquad E = F \oplus G \Longrightarrow H = F \oplus (G \cap H)$$

L'hypothèse $H = F \oplus G$ justifie $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$, d'où la preuve de la somme directe de F et de $G \cap H$:

$$F cap (G \cap H) = (F cap G) \cap H = \{\mathbf{0}_E\} \cap H = \{\mathbf{0}_E\}$$

Les sous-espaces F et $G \cap H$ sont inclus dans H qui est un sous-espace stable par somme, ainsi $F \oplus (G \cap H) \subset H$.
Soit $\boldsymbol{w}$ un vecteur de $H \subset E$, l'hypothèse $E = F \oplus G$ entraine l'existence de $\boldsymbol{u} \in F$ et $\boldsymbol{v} \in G$ vérifiant $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in H$, et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}$ est la combinaison linéaire de deux vecteurs de H car $\boldsymbol{u} \in F \subset H$, et donc $\boldsymbol{v} \in H$. En conclusion $\boldsymbol{u} \in F$, $\boldsymbol{v} \in G \cap H$ et $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in F + (G \cap H)$ puis $H \subset F + (G \cap H)$.
La combinaison des trois arguments précédents prouve la propriété $H = F \oplus (G \cap H)$.

Applications linéaires

Dans cette partie E, F et G sont des espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$.

Définitions et premières propriétés

- Une application f de E dans F est appelée linéaire à cette condition :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \ \forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in E^2 \quad f(\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v}) = \lambda f(\boldsymbol{u}) + \mu f(\boldsymbol{v})$$

Autrement dit, l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire des images.

- En particulier toute application linéaire est compatible avec l'addition et le produit par un scalaire qui sont des combinaisons linéaires particulières :

$$f(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda f(\boldsymbol{u}) \qquad f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$$

- Une application linéaire est aussi appelée morphisme d'espaces vectoriels. Un endomorphisme est une application définie sur le même espace au départ et à l'arrivée. Un isomorphisme est un morphisme bijectif, et un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
Une forme linéaire est une application linéaire dont l'espace d'arrivée est le corps de base $\mathbb{K}$.
- Toute application linéaire f vérifie $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$ et $f(-\boldsymbol{u}) = -f(\boldsymbol{u})$.
- Un morphisme d'espace vectoriel est en particulier un morphisme du groupe $(E, +)$.
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications linéaires alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.
Autrement dit la composée de deux applications linéaires est linéaire.
- La démonstration applique successivement le fait que f puis g sont des morphismes :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v}) &= g(f(\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v})) = g(\lambda f(\boldsymbol{u}) + \mu f(\boldsymbol{v})) \\ &= \lambda g(f(\boldsymbol{u})) + \mu g(f(\boldsymbol{v})) = \lambda (g \circ f)(\boldsymbol{u}) + \mu (g \circ f)(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

- L'application réciproque d'un isomorphisme est isomorphisme.
- Par définition un isomorphisme est une application bijective. L'application réciproque est donc bien définie et est aussi bijective.
En notant $f : E \to F$ cet isomorphisme il reste à montrer que f^{-1} est une application linéaire.
Soient $\boldsymbol{u}'$ et $\boldsymbol{v}'$ deux vecteurs de F, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Notons $\boldsymbol{u} = f^{-1}(\boldsymbol{u}')$ et $\boldsymbol{v} = f^{-1}(\boldsymbol{v}')$. Les égalités suivantes justifient que f^{-1} est une application linéaire :

$$f^{-1}(\lambda \boldsymbol{u}' + \mu \boldsymbol{v}') = f^{-1}(\lambda f(\boldsymbol{u}) + \mu f(\boldsymbol{v})) = f^{-1}(f(\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v}))$$
$$= (f^{-1} \circ f)(\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v} = \lambda f^{-1}(\boldsymbol{u}') + \mu f^{-1}(\boldsymbol{v}')$$

Exemples d'applications linéaires

• Toute application f de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ qui effectue une combinaison linéaire des coordonnées des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est une application linéaire ; elle peut être définie par une famille $(a_k)_{i=k}^n \in \mathbb{K}^n$:

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} \qquad U \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad V \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$
$$U \longmapsto \sum_{k=1}^n a_k u_k$$

$$f(\lambda U + \mu V) = \sum_{k=1}^n a_k(\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k u_k + \mu \sum_{k=1}^n a_k v_k$$
$$= \lambda\, f(U) + \mu\, f(V)$$

• Toute application f de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ qui effectue p combinaisons linéaires des coordonnées des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est une application linéaire ; elle est généralement définie par une famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le n}}$ de np scalaires de $\mathbb{K}$:

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p \qquad f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{u} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$$
$$\text{où } v_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k} u_k \text{ pour } 1 \le i \le p$$

$$f \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + \cdots + a_{1,n}u_n \\ a_{2,1}u_1 + a_{2,2}u_2 + \cdots + a_{2,n}u_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{p,1}u_1 + a_{p,2}u_2 + \cdots + a_{p,n}u_n \end{pmatrix}$$

La démonstration repose sur une application coordonnée par coordonnée de la précédente propriété.

• Les deux applications φ et δ définies ci-dessous sur des espaces vectoriels de fonctions sont linéaires, lorsque I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$; la seconde correspond à l'opérateur de dérivation :

$$\varphi : \mathbb{R}^I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \delta : \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$$
$$f \longmapsto f(a) \qquad f \longmapsto f'$$

La linéarité de la première proposition provient de ces égalités et la seconde de la linéarité de la dérivation :

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(a) = \lambda\, f(a) + \mu\, g(a) = \lambda\, \varphi(f) + \mu \varphi(g)$$
$$\delta(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda\, \delta(f) + \mu\, \delta(g)$$

L'espace vectoriel des applications linéaires

• L'ensemble des applications linéaires de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F défini sur le même corps $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
L'ensemble des endomorphismes sur l'espace vectoriel E est noté $\mathcal{L}(E)$ à la place de $\mathcal{L}(E, E)$.
L'ensemble des formes linéaires sur E est noté $E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

• Ainsi les applications φ et δ sont dans ces ensembles :

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^I, \mathbb{R}) = \left(\mathbb{R}^I\right)^* \qquad \delta \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}), \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})) = \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}))$$

• Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire :

$$\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall\, (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2 \quad \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F)$$

• Ces égalités prouvent que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F)$, en notant $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$; elles sont obtenues en appliquant successivement la définition de la somme de fonctions, la linéarité de chacune de ces applications et les propriétés usuelles des combinaisons linéaires :

$$\begin{aligned}
(\lambda f + \mu g)(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) &= \lambda\, f(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) + \mu\, g(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) \\
&= \lambda(\alpha\, f(\boldsymbol{u}) + \beta\, f(\boldsymbol{v})) + \mu(\alpha\, g(\boldsymbol{u}) + \beta\, g(\boldsymbol{v})) \\
&= \lambda\alpha\, f(\boldsymbol{u}) + \lambda\beta\, f(\boldsymbol{v}) + \mu\alpha\, g(\boldsymbol{u}) + \mu\beta\, g(\boldsymbol{v}) \\
&= \alpha\lambda\, f(\boldsymbol{u}) + \alpha\mu\, g(\boldsymbol{u}) + \beta\lambda\, f(\boldsymbol{v}) + \beta\mu\, g(\boldsymbol{v}) \\
&= \alpha(\lambda\, f(\boldsymbol{u}) + \mu\, g(\boldsymbol{u})) + \beta(\lambda\, f(\boldsymbol{v}) + \mu\, g(\boldsymbol{v})) \\
&= \alpha(\lambda\, f + \mu\, g)(\boldsymbol{u}) + \beta(\lambda\, f + \mu\, g)(\boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

• L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F^E de toutes les applications de E dans F.
$\mathcal{L}(E, F)$ a donc une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; l'application nulle $0_{\mathcal{L}(E,F)} = 0_{E \to F}$ de E dans F définie par $0_{\mathcal{L}(E,F)} : \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{0}_F$ est bien linéaire et est l'élément nul de cet espace vectoriel.

Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe $f \in \mathcal{L}(E, F)$, G est un sous-espace de E, et H est un sous-espace de F.

• L'image directe et l'image réciproque d'un sous-espace par un morphisme sont des sous-espaces :

$$f(G) = \left\{f(\boldsymbol{u}) \;/\; \boldsymbol{u}\in G\right\} \qquad \text{est un sous-espace de } F$$
$$f^{-1}(H) = \left\{\boldsymbol{u}\in F \;/\; f(\boldsymbol{u})\in H\right\} \qquad \text{est un sous-espace de } E.$$

• Montrons que l'image directe $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F par la propriété caractéristique.
Par construction $f(G)$ est inclus dans F et $\mathbf{0}_E \in G$ qui est un sous-espace vectoriel, donc $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F \in f(G)$. Ainsi $f(G) \neq \emptyset$.
Si $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v}'$ sont des vecteurs de $f(G)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors il existe $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') \in G^2$ par définition de l'image directe qui vérifient $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u})$ et $\boldsymbol{v}' = f(\boldsymbol{u}')$.
Le vecteur $\lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{v}'$ est un vecteur de $f(G)$ car le sous-espace G est stable par combinaisons linéaires des vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}'$:

$$\lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{v}' = \lambda\, f(\boldsymbol{u}) + \mu\, f(\boldsymbol{u}') = f(\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u}') \in f(G)$$

Cette troisième vérification termine la première démonstration.

• Montrons que l'image réciproque $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E par la propriété caractéristique.
Par construction $f^{-1}(H)$ est inclus dans E et $\mathbf{0}_F = f(\mathbf{0}_E) \in H$ qui est un sous-espace vectoriel, donc $\mathbf{0}_E \in f^{-1}(H)$. Ainsi $f^{-1}(H) \neq \emptyset$.
Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}'$ sont des vecteurs de $f^{-1}(H)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $f(\boldsymbol{u})$ et $f(\boldsymbol{u}')$ sont par construction des vecteurs de H qui est un sous-espace stable par combinaisons linéaires :

$$f(\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u}') = \lambda\, f(\boldsymbol{u}) + \mu\, f(\boldsymbol{u}') \in H$$
$$\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u}' \in f^{-1}(H)$$

L'image réciproque $f^{-1}(H)$ est donc un sous-espace de E.

• L'image $\operatorname{Im} f = f(E)$ du morphisme f est un sous-espace de F car image directe de l'espace E qui est un sous-espace de E.

• L'application f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Théorème du noyau

• Le noyau $\ker f$ du morphisme f est le sous-espace de E suivant :

$$\ker f = f^{-1}(\{\mathbf{0}_F\}) = \left\{\boldsymbol{u}\in E \;/\; f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_F\right\} \qquad \text{est un sev de } E$$

• Le sous-ensemble $\ker f$ de E est un sous-espace de E car il correspond à l'image réciproque du sous-espace nul $\{\mathbf{0}_F\}$ de F.

• L'application linéaire f est injective si et seulement si son noyau est le sous-espace nul : $\ker f = \{\mathbf{0}_E\}$.
Cette propriété porte le nom de théorème du noyau.

• Démontrons que $\ker f = \{\mathbf{0}_E\}$ entraîne que f est injective.
Si $f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{v})$ alors $f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_F$, et $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \ker f$ en conséquence $\ker f = \{\mathbf{0}_E\}$ entraîne $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ puis l'injectivité de f.
L'implication réciproque provient du fait que le vecteur nul $\mathbf{0}_F$ a un unique antécédent $\mathbf{0}_E$ si l'application f est injective.

• Vu que $\ker f$ est un sous-espace vectoriel qui contient donc le vecteur nul, il suffit de démontrer $\ker f \subset \{\mathbf{0}_E\}$ pour montrer que l'application linéaire f est injective.

Exemples sur les sous-espaces

Définition d'un sous-espace par un noyau

• L'ensemble suivant F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car il est le noyau $F = \ker f \subset \mathbb{R}^3$ d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par des combinaisons linéaires de coordonnées :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ \textsf{ET}\;\; x + 3z = 0 \end{array} \right. \right\} \qquad \begin{array}{rcl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ x + 3z \end{pmatrix} \end{array}$$

• L'ensemble $\mathcal{H}$ des solutions d'une équation différentielle linéaire et homogène comme $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$ où les applications a, b et c sont définies sur un intervalle I est le noyau de l'application φ, en notant $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications deux fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rl} \varphi : \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R}^I \\ f & \longmapsto t \mapsto a(t)\, f''(t) + b(t)\, f'(t) + c(t)\, f(t) \end{array}$$
$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{D}^2(I, \mathbb{R}), \mathbb{R}^I) \qquad \mathcal{H} = \ker \varphi \subset \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$$

Inclusions usuelles de sous-espaces caractéristiques

Dans la suite les applications f et g sont des endomorphismes sur l'espace vectoriel E.

• Les implications ci-dessous prouvent l'inclusion $\ker f \subset \ker(g\circ f)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}\in\ker f &\Longrightarrow f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E \\ &\Longrightarrow (g\circ f)(\boldsymbol{u}) = g(f(\boldsymbol{u})) = g(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_E \\ &\Longrightarrow \boldsymbol{u}\in\ker(g\circ f) \end{aligned}$$

• Les endomorphismes de E vérifient $\operatorname{Im}(g\circ f) \subset \operatorname{Im} g$:

$$\operatorname{Im} f = f(E) \subset E$$
$$g(\operatorname{Im} f) = g(f(E)) = (g\circ f)(E) = \operatorname{Im}(g\circ f) \subset g(E) = \operatorname{Im} g$$

• Les sommes d'applications linéaires vérifient ces inclusions :

$$\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g) \qquad \operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$$

• Soit $\boldsymbol{u}\in\ker f\cap\ker g$, ces propositions justifient $\boldsymbol{u}\in\ker(f+g)$ et la première inclusion $\ker f\cap\ker g \subset \ker(f+g)$:

$$f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E \qquad g(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E \qquad (f+g)(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}) + g(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E$$

• Soit $\boldsymbol{v}\in\operatorname{Im}(f+g)$, il existe $\boldsymbol{u}\in E$ vérifiant $(f+g)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$, d'où la seconde inclusion $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$:

$$\boldsymbol{v} = (f+g)(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}) + g(\boldsymbol{u}) \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$$

Exemples de manipulation en algèbre linéaire

Ces trois exemples exploitent les propriétés précédentes :

• Les endomorphismes f et g d'un espace vectoriel E vérifient l'équivalence suivante :

$$g\circ f = 0_{E\to E} \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \ker g$$

• Supposons l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \ker g$; soit le vecteur $\boldsymbol{u}\in E$:

$$f(\boldsymbol{u}) \in f(E) = \operatorname{Im} f \subset \ker g \qquad g(f(\boldsymbol{u})) = (g\circ f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E$$

D'où la démonstration d'une implication.
Réciproquement supposons $g\circ f = 0_{E\to E}$ et montrons $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.
Soit $\boldsymbol{v}\in\operatorname{Im} f$ alors il existe $\boldsymbol{u}\in E$ vérifiant $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u})$:

$$(g\circ f)(\boldsymbol{u}) = g(f(\boldsymbol{u})) = g(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E \qquad \boldsymbol{v}\in\ker g \qquad \operatorname{Im} f \subset \ker g$$

• Cette équivalence est vérifiée par tout couple d'endomorphismes de E :

$$\ker(g\circ f) = \ker f \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \ker g = \{\mathbf{0}_E\}$$

• Supposons $\operatorname{Im} f\cap\ker g = \{\mathbf{0}_E\}$ et montrons $\ker(g\circ f) \subset \ker f$.
Soit $\boldsymbol{u}\in\ker(g\circ f)$ ces égalités justifient que $f(\boldsymbol{u})\in\ker g$:

$$\mathbf{0}_E = (g\circ f)(\boldsymbol{u}) = g(f(\boldsymbol{u})) \qquad f(\boldsymbol{u})\in\ker g$$

Par ailleurs $f(\boldsymbol{u}) \in \operatorname{Im} f$ donc $f(\boldsymbol{u}) \in \operatorname{Im} f \cap \ker g = \{\mathbf{0}_E\}$ puis $f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E$ et en conclusion $\boldsymbol{u} \in \ker f$ d'où l'inclusion $\ker(g\circ f) \subset \ker f$.
Les endomorphismes d'espaces vectoriels vérifient l'inclusion réciproque $\ker f \subset \ker(g\circ f)$ démontrée précédemment par l'implication suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}\in\ker f &\Longrightarrow f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E \\ &\Longrightarrow (g\circ f)(\boldsymbol{u}) = g(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_E \\ &\Longrightarrow \boldsymbol{u}\in\ker(g\circ f) \end{aligned}$$

• Réciproquement supposons l'inclusion $\ker(g\circ f) \subset \ker f$ pour montrer l'égalité $\operatorname{Im} f\cap\ker g = \{\mathbf{0}_E\}$.
L'inclusion $\{\mathbf{0}_E\} \subset \operatorname{Im} f\cap\ker g$ est vérifiée par toute intersection de sous-espaces qui est un sous-espace.
Réciproquement si $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f\cap\ker g$ alors il existe $\boldsymbol{u}\in E$ vérifiant $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$:

$$(g\circ f)(\boldsymbol{u}) = g(f(\boldsymbol{u})) = g(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E \qquad \boldsymbol{u}\in\ker(g\circ f) \subset \ker f$$
$$f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\in\operatorname{Im} f\cap\ker g \qquad \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E \qquad \operatorname{Im} f\cap\ker g \subset \{\mathbf{0}_E\}$$

• Cette équivalence repose sur l'égalité suivante où $g(\boldsymbol{v})$ s'exprime sous la forme $(g\circ f)(\boldsymbol{u})$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{u}) \qquad \operatorname{Im}(g\circ f) = \operatorname{Im} g \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f + \ker g = E$$

• Supposons $\operatorname{Im} f + \ker g = E$ et montrons $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g\circ f)$.
Soit $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} g$; il existe $\boldsymbol{v}\in E$ vérifiant $g(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$. La proposition $\boldsymbol{v} \in E = \operatorname{Im} f + \ker g$ entraîne qu'il existe $\boldsymbol{v}' \in \operatorname{Im} f$ et $\boldsymbol{v}'' \in \ker g$ vérifiant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}''$. Le vecteur $\boldsymbol{v}'\in\operatorname{Im} f$ est de la forme $\boldsymbol{v}' = f(\boldsymbol{u})$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} = g(\boldsymbol{v}) &= g(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}'') = g(\boldsymbol{v}') + g(\boldsymbol{v}'') = g(\boldsymbol{v}') + \mathbf{0}_E \\ &= g(f(\boldsymbol{u})) = (g\circ f)(\boldsymbol{u}) \in \operatorname{Im}(g\circ f) \end{aligned}$$

Ces hypothèses aboutissent à l'inclusion $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g\circ f)$.
Les applications vérifient l'inclusion réciproque $\operatorname{Im}(g\circ f) \subset \operatorname{Im} g$.

• Réciproquement supposons l'inclusion $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g\circ f)$ pour montrer l'égalité $\operatorname{Im} f + \ker g = E$.
L'inclusion $\operatorname{Im} f + \ker g \subset E$ est valable pour toute somme de sous-espaces de E.
Réciproquement soit $\boldsymbol{v}\in E$, alors $g(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(g\circ f)$. Il existe donc $\boldsymbol{u}\in E$ vérifiant $g(\boldsymbol{v}) = (g\circ f)(\boldsymbol{u})$.

$$g(\boldsymbol{v}-f(\boldsymbol{u})) = g(\boldsymbol{v}) - (g\circ f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E \qquad \boldsymbol{v}-f(\boldsymbol{u}) \in \ker g$$
$$f(\boldsymbol{u}) \in \operatorname{Im} f \qquad \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}-f(\boldsymbol{u})) + f(\boldsymbol{u}) \in \ker g + \operatorname{Im} f$$

Cette seconde inclusion $E \subset \operatorname{Im} f + \ker g$ termine la preuve de l'implication réciproque.

Étude des endomorphismes

Dans cette partie toutes les applications sont des endomorphismes sur l'espace vectoriel E, $(f,g)\in\mathcal{L}(E)$.

Le groupe des automorphismes

• L'ensemble des automorphismes sur E, c'est à dire les applications linéaires bijectives sur E, est noté $\mathcal{GL}(E)$.

• Les automorphismes f et g de $\mathcal{GL}(E)$ vérifient ces propriétés :

$$\mathrm{Id}_E \in \mathcal{GL}(E) \qquad g\circ f \in \mathcal{GL}(E) \qquad f^{-1}\in\mathcal{GL}(E)$$
$$\mathrm{Id}_E^{-1} = \mathrm{Id}_E \qquad (g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1} \qquad \left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

• Ces propriétés combinent les propriétés déjà démontrées des applications bijectives et celles des applications linéaires.

• $(\mathcal{GL}(E),\circ)$ a une structure de groupe et est appelé groupe linéaire. $\mathcal{GL}(E)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{S}_E,\circ)$ de toutes les bijections sur E.

• L'ensemble $\mathcal{GL}(E)$ est un sous-ensemble du groupe $(\mathcal{S}_E,\circ)$ des bijections sur E, et n'est pas l'ensemble vide car $\mathrm{Id}_E\in\mathcal{GL}(E)$.
La propriété précédente rappelle que l'ensemble $\mathcal{GL}(E)$ est stable par composition $\circ$ et par le calcul de l'application réciproque.
En conclusion $\mathcal{GL}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_E,\circ)$.

• Les structures des ensembles $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{GL}(E)$ sont différentes.
L'espace-vectoriel $\mathcal{L}(E)$ est stable par somme, produit par une constante.
Le groupe $\mathcal{GL}(E)$ n'est pas stable par somme ni par produit par une constante. Pour tout espace E différent de $\{\mathbf{0}\}$ l'application nulle n'est pas bijective $0_{E\to E}\notin\mathcal{GL}(E)$:

$$\mathrm{Id}_E\in\mathcal{GL}(E) \qquad -\mathrm{Id}_E\in\mathcal{GL}(E)$$
$$\mathrm{Id}_E - \mathrm{Id}_E = 0\cdot\mathrm{Id}_E = 0_{E\to E}\notin\mathcal{GL}(E)$$

Les ensembles $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{GL}(E)$ sont des sous-ensembles de E^E stables par composition.
Les applications de $\mathcal{L}(E)$ ne sont pas nécessairement bijective et donc $\mathcal{L}(E)$ n'a pas une structure de groupe pour la composition.

• Le morphisme λf est inversible dès que $\lambda\in\mathbb{K}^*$ et $f\in\mathcal{GL}(E)$:

$$(\lambda f)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\, f^{-1}$$

Homothéties, projections et symétries vectorielles

• Le sous-espace vectoriel $E_\lambda(f)$ de E est défini ainsi :

$$E_\lambda(f) = \ker(f-\lambda\,\mathrm{Id}_E) = \left\{\boldsymbol{u}\in E \;/\; f(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}\right\} \subset \operatorname{Im} f$$

• Le sous-ensemble $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel car il correspond au noyau d'une combinaison linéaire d'applications linéaires qui est une application linéaire.

• Le noyau de $f\in\mathcal{L}(E)$ est $\ker f = E_0(f)$:

$$E_0(f) = \left\{\boldsymbol{u}\in E \;/\; f(\boldsymbol{u}) = 0\cdot\boldsymbol{u}\right\} = \left\{\boldsymbol{u}\in E \;/\; f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E\right\} = \ker f$$

• L'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{u}$ invariants par f est $E_1(f)$:

$$E_1(f) = \left\{\boldsymbol{u}\in E \;/\; f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\right\}$$

• Lorsque $\lambda\neq\mu$ les sous-espaces $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont en somme directe :

$$E_\lambda(f)\cap E_\mu(f) = \{\mathbf{0}_E\} \qquad \begin{aligned}\boldsymbol{u}\in E_\lambda(f)\cap E_\mu(f) &\Longrightarrow f(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u} = \mu\boldsymbol{u}\\ &\Longrightarrow (\lambda-\mu)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E\\ &\Longrightarrow \boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E\end{aligned}$$

Par ailleurs l'intersection de deux sous-espaces est un sous-espace et contient le vecteur nul $\mathbf{0}_E$, ce qui prouve la seconde inclusion.

Homothéties vectorielles

• L'homothétie vectorielle de rapport non nul $\lambda\in\mathbb{K}^*$ est l'application $\lambda\,\mathrm{Id}_E$. L'application réciproque est $(1/\lambda)\,\mathrm{Id}_E$.

Projections vectorielles

• Si les sous-espaces F et G sont supplémentaires de E alors il existe une unique application linéaire $p\in\mathcal{L}(E)$ appelée projecteur sur F parallèlement à G vérifiant ces propositions :

$$E = F \oplus G \qquad \operatorname{Im} p = F \qquad \ker p = G$$
$$\forall\, \boldsymbol{w} \in E \quad \exists!\, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in F \times G \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \qquad\qquad p(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}$$

• L'application p est bien définie du fait de l'unicité du vecteur $\boldsymbol{u}$ obtenue à partir de la décomposition de $\boldsymbol{w}$ sur $F \oplus G$.

La décomposition d'une combinaison linéaire de vecteurs sur des sous-espaces supplémentaires est la combinaison linéaire des décompositions de ces vecteurs. Soient $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w}'$ deux vecteurs de E se décomposant de la manière suivante sur $F \oplus G$. Ces égalités prouvent la linéarité de p :

$$\exists!\, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in F \times G \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \qquad p(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}$$
$$\exists!\, (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}') \in F \times G \quad \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}' \qquad p(\boldsymbol{w}') = \boldsymbol{u}'$$
$$\begin{aligned} \lambda \boldsymbol{w} + \mu \boldsymbol{w}' &= \lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \mu(\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}') \\ &= (\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{u}') + (\lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{v}') \in F \oplus G \end{aligned}$$
$$p(\lambda \boldsymbol{w} + \mu \boldsymbol{w}') = \lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{u}' = \lambda\, p(\boldsymbol{w}) + \mu\, p(\boldsymbol{w}')$$

• La démonstration des deux égalités $\operatorname{Im} p = F$ et $\ker p = G$ repose sur quatre inclusions :

$$\forall\, \boldsymbol{u} \in F \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{0}_E \in F \oplus G \qquad p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{u} \in \operatorname{Im} p$$
$$\forall\, \boldsymbol{v} \in G \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_E + \boldsymbol{v} \in F \oplus G \qquad p(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_E \qquad \boldsymbol{v} \in \ker p$$

Ces deux décompositions justifient $F \subset \operatorname{Im} p$ et $G \subset \ker p$.

La définition même de p justifie $\operatorname{Im} p \subset F$.

Enfin si $\boldsymbol{w} \in \ker p$ ces propositions justifient $\boldsymbol{w} \in G$ et $\ker p \subset G$:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \qquad \text{où } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in E \times F$$
$$p(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}_E = \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} \in G$$

• Toute application $p \in \mathcal{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$ est appelée projection vectorielle sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

• Les principales propriétés d'une projection p sont les suivantes :

$$\boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u}) \in \ker p \qquad \operatorname{Im} p = \left\{ \boldsymbol{u} \in E \;\middle/\; p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \right\} = E_1(p)$$
$$p \text{ est une projection} \iff q = \operatorname{Id}_E - p \text{ est une projection}$$
$$\ker q = \operatorname{Im} p \qquad \operatorname{Im} q = \ker p$$

• La caractérisation de p justifie les premières propriétés :

$$p(\boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u})) = p(\boldsymbol{u}) - (p \circ p)(\boldsymbol{u}) = p(\boldsymbol{u}) - p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_E$$

Par construction $E_1(p) \subset \operatorname{Im} p$ car $\boldsymbol{u} \in E_1(p)$ entraîne l'égalité $\boldsymbol{u} = p(\boldsymbol{u}) \in \operatorname{Im} p$.

Réciproquement si $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} p$ alors il existe $\boldsymbol{u} \in E$ vérifiant $p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$:

$$p(\boldsymbol{v}) = (p \circ p)(\boldsymbol{u}) = p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{v} \in E_1(p) \qquad \operatorname{Im} p \subset E_1(p)$$

• Si p est une projection et $\boldsymbol{u}$ un vecteur quelconque de E, ces égalités prouvent que $q = \operatorname{Id}_E - p$ est une projection :

$$\begin{aligned} (q \circ q)(\boldsymbol{u}) &= (\operatorname{Id}_E - p) \circ (\operatorname{Id}_E - p)(\boldsymbol{u}) = (\operatorname{Id}_E - p)((\operatorname{Id}_E - p)(\boldsymbol{u})) \\ &= (\operatorname{Id}_E - p)(\boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u})) = (\boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u})) - p(\boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u})) \\ &= \boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u}) - p(\boldsymbol{u}) + (p \circ p)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u}) - p(\boldsymbol{u}) + p(\boldsymbol{u}) \\ &= \boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u}) = q(\boldsymbol{u}) = (\operatorname{Id}_E - p) \circ (\operatorname{Id}_E - p)(\boldsymbol{u}) = q(\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

Réciproquement si $q = \operatorname{Id}_E - p$ est une projection alors l'implication précédente appliquée à q justifie que $\operatorname{Id}_E - q = \operatorname{Id}_E - (\operatorname{Id}_E - p) = p$ est une projection.

Ces équivalences démontrent les égalités $\ker q = \operatorname{Im} p$ et $\ker p = \operatorname{Im} q$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \in \ker p &\iff p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_E & \boldsymbol{u} \in \ker q &\iff q(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_E \\ &\iff \boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} & &\iff \boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_E \\ &\iff q(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} & &\iff p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \\ &\iff \boldsymbol{u} \in E_1(q) = \operatorname{Im} q & &\iff \boldsymbol{u} \in E_1(p) = \operatorname{Im} p \end{aligned}$$

L'une ou l'autre ces deux démonstrations est superflue, il suffit d'appliquer l'égalité prouvée une fois à la projection p et l'autre fois à la projection q.

• Plus généralement l'inclusion $E_\lambda(f) \subset \operatorname{Im} f$ est vérifiée pour tout endomorphisme, mais l'égalité $\operatorname{Im} p = E_1(p)$ est propre aux projections.

• Le noyau et l'image d'une projection p sont des sous-espaces supplémentaires ; cette propriété repose sur la décomposition suivante :

$$\ker p \oplus \operatorname{Im} p = E \qquad \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u})) + p(u) \in \ker p + \operatorname{Im} p$$

• La somme des sous-espaces $\ker p + \operatorname{Im} p$ est un sous-espace de E, d'où l'inclusion $\ker p + \operatorname{Im} p \subset E$.

Réciproquement l'égalité $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u})) + p(u) \in \ker p + \operatorname{Im} p$ prouve l'inclusion $E \subset \ker p + \operatorname{Im} p$.

L'intersection des sous-espaces $\ker p \cap \operatorname{Im} p$ est un sous-espace de E, d'où l'inclusion $\{\boldsymbol{0}_E\} \subset \ker p \cap \operatorname{Im} p$.

Si $\boldsymbol{u} \in \ker p \cap \operatorname{Im} p = \ker p \cap E_1(p)$ alors ces égalités prouve l'inclusion réciproque :

$$\boldsymbol{u} = p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_E \qquad \ker p \cap \operatorname{Im} p = \ker p \cap E_1(p) \subset \{\boldsymbol{0}_E\}$$

• Réciproquement si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E alors il existe une unique projection $p \in \mathcal{L}(E)$ sur F parallèlement à G :

$$E = F \oplus G \qquad \operatorname{Im} p = F \qquad \ker p = G$$
$$\forall\, \boldsymbol{w} \in E \quad \exists!\, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in F \times G \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \qquad\qquad p(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}$$

L'application p est bien définie, est linéaire et est une projection d'image $\operatorname{Im} p = F$ et de noyau $\ker p = G$.
Cette projection est l'application projecteur décrite au début de ce paragraphe. La suite du cours identifie ces deux notions privilégie le terme de *projection*.

• L'exemple suivant vérifie que les deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$, et détermine la projection p sur F de direction G :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big/ \; x - y = 0 \right\} = \mathbb{R}U \qquad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big/ \; x + y = 0 \right\} = \mathbb{R}V$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in F \cap G \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right. \qquad\qquad U \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow x = y = 0 \qquad\qquad F \cap G \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(U + V) \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(U - V)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} U + \frac{x-y}{2} V \quad \mathbb{R}^2 \subset F + G$$

$$p(U) = U \qquad p(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} p(U) + \frac{x-y}{2} p(V) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

Les inclusions $\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\} \subset F \cap G$ et $F + G \subset \mathbb{R}^2$ proviennent du fait que F et G sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$. Ces sous-espaces étant donc supplémentaires la projection p existe bien et est unique.
La décomposition d'un vecteur en fonction de U et V permet d'obtenir les coordonnées de l'image par d'un vecteur quelconque.

Symétries vectorielles

• Si les sous-espaces F et G sont supplémentaires de $E = F \oplus G$ alors il existe une unique application linéaire $s \in \mathcal{L}(E)$ appelée symétrie par rapport à F de direction G vérifiant ces propositions :

$$E = F \oplus G \qquad E_1(s) = F \qquad E_{-1}(s) = G$$
$$\forall\, \boldsymbol{w} \in E \quad \exists!\, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in F \times G \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \qquad\qquad s(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$$

• Toute symétrie s vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et est pour cette raison appelée involution. Une symétrie s est un isomorphisme d'espace vectoriel :

$$s \in \mathcal{GL}(E) \qquad s^{-1} = s$$

• L'existence et la linéarité de s se démontrent de la même manière que pour les projections, les égalités $E_1(s) = F$ et $E_{-1}(s) = G$ se prouve de façon similaire. La propriété $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ consiste à appliquer deux fois la définition de s :

$$(s \circ s)(\boldsymbol{w}) = s(s(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})) = s(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$$

• Réciproquement toute application linéaire involutive $s \in \mathcal{L}(E)$ telle que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ est une symétrie vectorielle par rapport à $E_1(s)$ de direction $E_{-1}(s)$ qui sont deux sous-espaces supplémentaires de $E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s)$:

$$E_1(s) = \left\{ \boldsymbol{u} \in E \;\big/\; s(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \right\} \qquad E_{-1}(s) = \left\{ \boldsymbol{u} \in E \;\big/\; s(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u} \right\}$$
$$\boldsymbol{u} + s(\boldsymbol{u}) \in E_1(s) \qquad\qquad \boldsymbol{u} - s(\boldsymbol{u}) \in E_{-1}(s)$$
$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u} + s(\boldsymbol{u})) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{u} - s(\boldsymbol{u})) \in E_1(s) \oplus E_{-1}(s)$$

• Dans tout corps $\mathbb{K}$ comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $2 \neq 0$ les sous-espaces $E_1(s)$ et $E_{-1}(s)$ sont en somme directe :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \in E_1(s) \cap E_{-1}(s) &\Longrightarrow s(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u} \\ &\Longrightarrow 2\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E \\ &\Longrightarrow \boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E \end{aligned}$$
$$\{\mathbf{0}_E\} \subset E_1(s) \cap E_{-1}(s) \subset \{\mathbf{0}_E\}$$

La décomposition de $\boldsymbol{u}$ repose sur ces vecteurs de $E1(s)$ et $E_{-1}(s)$:

$$s(\boldsymbol{u} + s(\boldsymbol{u})) = s(\boldsymbol{u}) + (s \circ s)(\boldsymbol{u}) = s(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{u} + s(\boldsymbol{u}) \in E_1(s)$$
$$s(\boldsymbol{u} - s(\boldsymbol{u})) = s(\boldsymbol{u}) - (s \circ s)(\boldsymbol{u}) = s(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{u} - s(\boldsymbol{u}) \in E_{-1}(s)$$

• Cette propriété justifie que la suite de ce cours identifie les notions équivalente d'involutions et de symétries.

• L'endomorphisme p est une projection si et seulement si l'application $s = 2p - \mathrm{Id}$ est une symétrie ; dans ce cas $E_1(s) = E_1(p)$ et $E_{-1}(s) = \ker p$.
La démonstration est similaire à celle reliant la propjection p à

$\mathrm{Id}_E - p$.

Algèbre

• Ces trois propriétés définissent la structure $(\mathcal{A}, +, \cdot, \star)$ d'algèbre sur $\mathbb{K}$:

$(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

$(\mathcal{A}, +, \star)$ est un anneau

$\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall\, (x, y) \in \mathcal{A}^2 \quad \lambda \cdot (x \star y) = (\lambda \cdot x) \star y = x \star (\lambda \cdot y)$

La loi $\star$ est appelée produit interne de l'algèbre, et la loi externe $\cdot$ multiplication par un scalaire.
Une algèbre est commutative si le produit interne $\star$ est commutatif.
Une algèbre est unitaire lorsque l'anneau associé $(\mathcal{A}, +, \star)$ est unitaire.

• Pour tout espace vectoriel $E \neq \{\mathbf{0}\}$ non nul, la structure $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une algèbre unitaire d'élément unité Id_E, la composition des applications $\circ$ jouant le rôle du produit interne.
L'élément nul de $\mathcal{L}(E)$ est l'application nulle $0_{E \to E} = 0_{\mathcal{L}(E)}$
L'élément unité de $\mathcal{L}(E)$ est l'application identité Id_E.

• La démonstration repose sur l'énumération des propriétés caractérisitques de ces structures, elles ont toutes été justifiées précédemment pour les applications linéaires sur E.

• La structure $\mathcal{L}(\{\mathbf{0}\})$ n'est pas un anneau unitaire car l'application nulle $0_{\{\mathbf{0}\} \to \{\mathbf{0}\}}$ et l'application identité $\mathrm{Id}_{\{\mathbf{0}\}}$ sont les mêmes.

• Prendre en compte la structure d'algèbre simplifie la preuve de certaines propriétés. Ainsi les égalités suivantes justifient à titre d'exemple que $2p - s$ est une symétrie dès que p est une projection :

$$\begin{aligned}
&(2p - \mathrm{Id}_E) \circ (2p - \mathrm{Id}_E) \\
&= (2p) \circ (2p) - \mathrm{Id}_E \circ (2p) - (2p) \circ \mathrm{Id}_E + \mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E \\
&= 4(p \circ p) - 2p - 2p + \mathrm{Id}_E = 4p - 4p + \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E
\end{aligned}$$

Ces égalités concernent $\mathcal{L}(E)$ et ne font intervenir l'image d'aucun vecteur$\boldsymbol{u}$ de E.

Familles libres et génératrices

Dans cette partie E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, p et q sont des entiers strictement positifs, $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ est une famille de p vecteurs de E et $(\lambda_k)_{k=1}^p \in \mathbb{K}^p$.
La famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^q$ est une sous-famille de $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ lorsque $q \leq p$, dans ce cas la famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ est une sur-famille de $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^q$:

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_q, \boldsymbol{u}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_p)$$

Définition et propriétés des familles libres ou liées

Définitions

• La famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont simultanément nuls :

$$\forall\ (\lambda_k)_{k=1}^p \in \mathbb{K}^p \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0}_E \Longrightarrow \big(\forall\, k \in \{1 \cdots p\} \quad \lambda_k = 0\big).$$

• L'implication réciproque est toujours vérifiée, car toute combinaison linéaire de vecteurs dont tous les coefficients sont nuls est le vecteur nul.

• Une famille liée est une famille de vecteurs qui n'est pas libre ; il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs dont tous les coefficients ne sont pas simultanément nuls qui est égale au vecteur nul :

$$\exists\ (\lambda_k)_{k=1}^p \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0, 0, \cdots, 0)\} \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_k\, \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0}_E.$$

Autrement dit une famille est liée s'il existe une combinaison linéaire de ses vecteurs égale au vecteur nul pour laquelle tous les coefficients ne sont pas simultanément nuls.
Une telle égalité est appelée relation de dépendance linéaire.

Exemples de démonstration

• La résolution du système linéaire obtenu par un calcul coordonnée par coordonnée de $\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{u}_3 = \mathbf{0}$ prouve que cette famille $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est libre :

$$\boldsymbol{u}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{u}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rrr} & \lambda_2 \ + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 \ + \lambda_2 & & = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ = \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

• Au contraire la famille suivante $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ est liée car la résolution du système linéaire $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$ n'aboutit pas à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et suggère de vérifier que $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{v}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$$

Premières propriétés

• Le fait d'être libre ne dépend pas de l'ordre d'énumération des vecteurs.

• Une famille contenant le vecteur nul est liée.
Une famille contenant deux fois le même vecteur est liée.

• Avec les notations précédentes, si $\boldsymbol{u}_n = 0$ dans le premier cas ou si $\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{u}_n$ et $m < n$ dans le deuxième, les combinaisons linéaires suivantes dont tous les coefficients ne sont pas nuls prouvent que la famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ est liée :

$$0\boldsymbol{u}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{u}_{n-1} + 1\boldsymbol{u}_n + 0\boldsymbol{u}_{n+1} + \cdots + 0\boldsymbol{u}_p = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} 0\boldsymbol{u}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{u}_{m-1} + 1\boldsymbol{u}_m + 0\boldsymbol{u}_{m+1} + \cdots + 0\boldsymbol{u}_{n-1} \\ +(-1)\boldsymbol{u}_n + 0\boldsymbol{u}_{n+1} + \cdots + 0\boldsymbol{u}_p = \mathbf{0} \end{aligned}$$

• Toute sur-famille d'une famille liée est liée, et par contraposée toute sous-famille d'une famille libre est libre.

• Pour la dernière démonstration il suffit de compléter une combinaison linéaire égale au vecteur nul et à coefficients non tous nuls de la famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ par des termes à coefficients nuls pour justifier que la sur-famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^q$ avec $q > p$ est liée :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{u}_p \qquad\qquad (\lambda_k)_{k=1}^p \neq (0, \cdots, 0) \\ &= \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{u}_p + 0\boldsymbol{u}_{p+1} + 0\boldsymbol{u}_{p+2} + \cdots + 0\boldsymbol{u}_q \end{aligned}$$

• Une famille à un seul vecteur $\boldsymbol{u}$ est libre si et seulement si $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$.
« La famille vide est libre » est une convention cohérente.

• La première proposition provient de la condition nécessaire et suffisante pour avoir $\lambda \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$: $\lambda = 0$ ou $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E$.
La seconde est due au fait que dans une combinaison linéaire vide il n'existe aucun coefficient non nul.

• Une famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs $\boldsymbol{u}_k$ où $k \in \{1 \cdots p\}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres du fait de ces égalités lorsque $\lambda_q \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{u}_q = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq q}} \alpha_k \boldsymbol{u}_k \quad \text{avec } \alpha_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_q}$$

$$\boldsymbol{u}_q = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq q}} \alpha_k \boldsymbol{u}_k \Longrightarrow \sum_{k=1}^p \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0} \quad \text{avec } \lambda_q = 1 \text{ et } \lambda_k = -\alpha_k$$

• La propriété précédente ne signifie pas que le premier vecteur est nécessairement une combinaison linéaire des autres, ainsi :

$$\boldsymbol{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0\boldsymbol{u} + 1\boldsymbol{v} + 1\boldsymbol{w} = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{u} \notin \mathbb{R}\boldsymbol{v} + \mathbb{R}\boldsymbol{w} = \mathbb{R}\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{w} = 0\boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}\boldsymbol{u} + \mathbb{R}\boldsymbol{w}$$

• Deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires signifie que $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ ou qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant $\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{u}$.

• Une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si ses deux vecteurs sont colinéaires.

• D'une part toute famille $(\mathbf{0}, \boldsymbol{v})$ est liée car elle contient le vecteur nul, d'autre part $\boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{v}$ entraîne l'égalité $1\boldsymbol{u} - \alpha \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, et la famille $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est donc liée.
Réciproquement supposons $\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ et $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Deux cas sont possibles : si $\mu \neq 0$ alors $\boldsymbol{v} = -(\lambda/\mu)\boldsymbol{u}$, et si $\mu = 0$ alors $\lambda \neq 0$ et $\lambda \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, donc $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Dans ces deux cas les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires.

Définition et propriétés des familles génératrices

• La famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}$ est génératrice de E si et seulement si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille :

$$\forall\, \boldsymbol{v}\in E \quad \exists\ (\lambda_k)_{k=1}^{p}\in\mathbb{K}^p \quad \boldsymbol{v}=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\,\boldsymbol{u}_k.$$

Ainsi, la famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}$ est génératrice signifie qu'elle engendre l'espace entier : $\text{Vect}\,(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}=E$.

• Une famille est génératrice indépendamment de l'ordre d'énumération de ses vecteurs.
Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
Toute sur-famille stricte d'une famille génératrice est liée.

• La première démonstration est similaire à celles des sur-familles des familles liées, en complètant la combinaison linéaire initiale par des termes nuls.
Si $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}$ est une famille génératrice alors $\boldsymbol{u}_{p+1}$ est une combinaison linéaire de $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}$ et la famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p+1}$ est liée, donc la sur-famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{q}$ est aussi liée dès que $q\geq p+1$.

Définition d'une base

• Une famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}$ de vecteurs de E qui est libre et génératrice est appelée base de E.

• Une fois la base $\mathcal{B}=(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}$ fixée, la famille des coefficients $(\lambda_k)_{k=1}^{p}$ intervenant dans la décomposition de n'importe quel vecteur $\boldsymbol{v}$ est unique et appelée coordonnées de $\boldsymbol{v}$ dans cette base :

$$\forall\, \boldsymbol{v}\in E \quad \exists!\ (\lambda_k)_{k=1}^{p}\in\mathbb{K}^p \quad \boldsymbol{v}=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\,\boldsymbol{u}_k.$$

• Le fait que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice entraîne l'existence des coordonnées, et l'unicité à pour cause l'hypothèse que la famille $\mathcal{B}$ est libre :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \lambda_1\boldsymbol{u}_1+\lambda_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\lambda_p\boldsymbol{u}_p\\
&= \mu_1\boldsymbol{u}_1+\mu_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\mu_p\boldsymbol{u}_p\\
\boldsymbol{0} &= (\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{u}_1+\cdots+(\lambda_p-\mu_p)\boldsymbol{u}_p
\end{aligned}$$

$$\text{donc}\qquad \lambda_1-\mu_1=\lambda_2-\mu_2=\cdots=\lambda_p-\mu_p=0$$
$$\text{et}\qquad (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p)$$

• Réciproquement à tout p-uplets de coordonnées correspond un seul vecteur obtenu par combinaison linéaire des vecteurs de la base.

• Les coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs dans une base donnée sont obtenues par combinaison linéaire des coordonnées des vecteurs initiaux :

$$\boldsymbol{v}=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\boldsymbol{u}_k \qquad \boldsymbol{w}=\sum_{k=1}^{p}\mu_k\boldsymbol{u}_k$$
$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k+\mu_k)\boldsymbol{u}_k \qquad \alpha\boldsymbol{v}=\sum_{k=1}^{p}(\alpha\lambda_k)\boldsymbol{u}_k$$

Familles d'applications

• Une base du sous-espace $E=\text{Vect}(\sin,\cos)$ des applications dérivables $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ est la famille des deux applications $(\sin,\cos)$.

• Par construction les deux applications $(\sin,\cos)$ forment une famille génératrice de E car toute application $f\in E$ est de la forme suivante :

$$t\mapsto\lambda\,\sin t+\mu\,\cos t$$

Par ailleurs la famille d'applications $(\sin,\cos)$ est libre. En effet, si la combinaison linéaire est l'application nulle, alors en particulier ses valeurs pour $t=0$ et $t=\pi/2$ justifient que $\lambda=\mu=0$.

$$\lambda\,\sin+\mu\,\cos=0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\iff\big(\forall\, t\in\mathbb{R}\quad\lambda\,\sin t+\mu\,\cos t=0\in\mathbb{R}\big)$$
$$\lambda\,\sin 0+\mu\,\cos 0=0=\mu \qquad \lambda\,\sin(\pi/2)+\mu\,\cos(\pi/2)=0=\lambda$$

En conclusion les applications $(\sin,\cos)$ forment une base de E.

• Pour $\theta\in\mathbb{R}$, fixé, la famille suivante des quatre d'applications de variable t est liée où $\sin t$ est une abbréviation pour représenter l'application $t\mapsto\sin t$:

$$(\sin t,\cos t,\sin(t+\theta),\cos(t+\theta))$$

• Les formules d'addition justifient que la troisième et la quatrième application sont des combinaisons linéaires des deux premières :

$$\begin{aligned}
\sin(t+\theta) &= \cos\theta\,\sin t+\sin\theta\,\cos t\\
\cos(t+\theta) &= \cos\theta\,\cos t-\sin\theta\,\sin t
\end{aligned}$$

• Au contraire la famille de ces quatre d'applications en t est libre :

$$(\sin t,\sin^2 t,\sin^3 t,\sin^4 t)$$

• Soit une combinaison linéaire de ces quatre applications qui est l'application nulle, sa dérivée est aussi une application nulle :

$$\lambda_1 \sin t + \lambda_2 \sin^2 t + \lambda_3 \sin^3 t + \lambda_4 \sin^4 t = 0$$
$$\lambda_1 \cos t + 2\lambda_2 \sin t \cos t + 3\lambda_3 \sin^2 t \cos t + 4\lambda_4 \sin^3 t \cos t = 0$$

En particulier la valeur $t = 0$ aboutit à la première égalité $\lambda_1 = 0$. Le produit suivant est donc l'application nulle :

$$\cos t\,(\lambda_1 + 2\lambda_2 \sin t + 3\lambda_3 \sin^2 t + 4\lambda_4 \sin^3 t) = 0$$
$$g(t) = \lambda_1 + 2\lambda_2 \sin t + 3\lambda_3 \sin^2 t + 4\lambda_4 \sin^3 t$$

L'expression $g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de valeur nulle sur $[0,\ \pi/2[$, donc $\lim_{t\to\pi/2} g(t) = g(0) = 0$, et cette application est l'application nulle :

$$2\lambda_2 \sin t + 3\lambda_3 \sin^2 t + 4\lambda_4 \sin^3 t = 0$$

Sur le même principe, une dérivation puis la valeur en $t = 0$ justifie que $\lambda_2 = 0$, et une division par $\cos t$ et un prolongement par continuité aboutit successivement à ces égalités :

$$2\lambda_2 \cos t + 6\lambda_3 \sin t \cos t + 12\lambda_4 \sin^2 t \cos t = 0$$
$$6\lambda_3 \sin t + 12\lambda_4 \sin^2 t = 0$$
$$6\lambda_3 \cos t + 24\lambda_4 \sin t \cos t = 0$$

Les valeurs de cette dernière expression termine la démonstration pour $t = 0$ et $t = \pi/2$; ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Les quatre coefficients sont nuls, donc la famille est libre.

• Les coefficients intervenant dans une combinaison linéaire de fonctions doivent être des scalaires, et ne doivent pas dépendre de la variable.

• La famille $(\sin t, \cos t, \tan t)$ est libre dans l'espace des applications $\mathcal{C}^\infty(]-\pi/2,\ \pi/2[, \mathbb{R})$ même si $\sin t = \tan t \cos t$. Cette égalité n'est pas une combinaison linéaire d'application, par un produit un scalaire — ou une constante — mais par produit de deux applications.

• Soit la combinaison linéaire suivante correspondant à l'application nulle ; les valeurs en $t = 0$, $t = \pi/6$ et $t = \pi/3$ suffisent pour démontrer que ces trois fonctions forment une famille libre :

$$\lambda \sin t + \mu \cos t + \nu \tan t = 0$$
$$\lambda \sin 0 + \mu \cos 0 + \nu \tan 0 = 0 = \mu = 0$$

$$\begin{cases} \lambda \sin(\pi/6) + \nu \tan(\pi/6) = 0 \\ \lambda \sin(\pi/3) + \nu \tan(\pi/3) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\nu}{\sqrt{3}} = 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}\lambda}{2} + \sqrt{3}\,\nu = 0 \end{cases}$$

$$\nu = -\frac{\lambda}{2} \qquad = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2\sqrt{3}} = 0 \qquad \lambda = 0 \qquad \mu = 0$$

Image d'une famille par une application linéaire

Dans ce paragraphe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$.

• L'image d'une famille liée par un morphisme est une famille liée :

$$(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p \text{ est liée} \Longrightarrow (f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^p \text{ est liée dans } F$$

• Si la famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ est liée alors il existe une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls égale au vecteur nul, et son image par f est aussi égale au vecteur nul :

$$\exists\, m \in \{1 \cdots p\} \quad \lambda_m \neq 0 \qquad \sum_{k=1}^p \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0}_E$$
$$\sum_{k=1}^p \lambda_k\, f(\boldsymbol{u}_k) = f\Big(\sum_{k=1}^p \lambda_k \boldsymbol{u}_k\Big) = f(\boldsymbol{0}_E) = \boldsymbol{0}_F$$

• Les images d'une famille de vecteurs de E vérifie ces propriétés :

$$\begin{cases} f \text{ est un morphisme injectif} \\ (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p \text{ est libre dans } E \end{cases}$$
$$\Longrightarrow (f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^p \text{ est libre dans } F$$
$$\begin{cases} f \text{ est un morphisme surjectif} \\ (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p \text{ est génératrice de } E \end{cases}$$
$$\Longrightarrow (f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^p \text{ est génératrice de } F$$
$$\begin{cases} f \text{ est un isomorphisme} \\ (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p \text{ est une base de } E \end{cases}$$
$$\Longrightarrow (f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^p \text{ est une base de } F$$

L'image d'une base par un isomorphisme est une base.

• La première proposition exploite l'hypothèse $\ker f = \{\boldsymbol{0}_E\}$:

$$\mathbf{0}_F = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, f(\boldsymbol{u}_k) = f\Big(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \boldsymbol{u}_k\Big)$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \boldsymbol{u}_k \in \ker f = \{\mathbf{0}_E\} \qquad \text{donc } \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0}_E$$

$$\Longrightarrow \forall\, k \in \{1 \cdots n\} \quad \lambda_k = 0 \qquad \text{donc } (f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^{p} \text{ est libre dans } F$$

• Si l'application f est surjective tout vecteur $\boldsymbol{w}$ de F a un antécédent par f, de la forme $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$, et $\boldsymbol{v}$ est une combinaison linéaire de $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}$:

$$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}) \text{ ET } \boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \boldsymbol{u}_k \qquad \boldsymbol{w} = f\Big(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \boldsymbol{u}_k\Big) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, f(\boldsymbol{u}_k)$$

• La dernière proposition découle des deux précédentes.

• Ces hypothèses sur les images d'une famille de vecteurs par un morphisme énoncent ces propriétés sur le morphisme :

$$(f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^{p} \text{ est génératrice de } F \Longrightarrow f \text{ est surjective}$$

$$\left.\begin{array}{r}(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p} \text{ est une base de } E\\ (f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^{p} \text{ est libre dans } F\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ est injective}$$

$$\left.\begin{array}{r}(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p} \text{ est une base de } E\\ (f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^{p} \text{ est une base de } F\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ est bijective}$$

Si l'image d'une base par un morphisme est une base alors cette application est bijective.

• Tout vecteur $\boldsymbol{w} \in F$ est de cette forme et a donc un antécédent par f :

$$\boldsymbol{w} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, f(\boldsymbol{u}_k) = f\Big(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \boldsymbol{u}_k\Big)$$

• Dans le second cas, l'écriture d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\ker f$ dans la base $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}$ prouve $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E$ car son image est une combinaison linéaire d'une famille libre qui est égale au vecteur nul :

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \boldsymbol{u}_k \qquad f(\boldsymbol{v}) = f\Big(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \boldsymbol{u}_k\Big) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, f(\boldsymbol{u}_k) = \mathbf{0}_F$$

$$\forall\, k \in \{1 \cdots p\} \quad \lambda_k = 0 \qquad \text{donc } \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E$$

Généralisation aux familles quelconques

• Une combinaison linéaire est, par définition même, constituée d'un nombre fini de termes, et ne comporte aucune notion de passage à la limite au contraire de certaines formules d'analyse :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 \quad \text{aussi noté } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

• Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect} X$ engendré par le sous-ensemble $X \subset E$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X.
Ces combinaisons linéaires sont constituées d'un nombre fini de termes même si l'ensemble $X \subset E$ n'est pas fini.

• Plus généralement l'ensemble, ou la famille, X est par définition génératrice de E si et seulement si $\operatorname{Vect} X = E$.
Cette nouvelle définition étend donc la notion précédente de famille génératrice des familles finies aux familles quelconques.

• Les deux définitions coïncident pour les familles finies et les ensembles finies :

$$\operatorname{Vect}\, (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n} = \mathop{\Large +}_{k=1}^{n} \mathbb{R}\boldsymbol{u}_k$$

Cette dernière somme doit être finie, la notation de droite ne s'étend pas directement aux familles infinies.

• Une famille infinie est dite libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.

• Ces définitions justifient que la famille infinie $\mathcal{B} = (X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des monômes forme une base de l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}[X]$.
L'espace $\operatorname{Vect} \mathcal{B}$ est constitué des sommes finies de monômes, ce qui correspond bien à la définition des polynômes.

• D'une part la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$ et $\operatorname{Vect} \mathcal{B} = \mathbb{R}[X]$.
D'autre part la famille $\mathcal{B}$ est libre car toute combinaison linéaire d'une sous-famille finie de monômes de $\mathcal{B}$ est un polynôme, et ce polynôme est nul si et seulement si tous les coefficients des monômes sont nuls.