ESPACES DE DIMENSION FINIE

Dans ce chapitre E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et m, n et p sont des entiers positifs.

Présentation des bases

• Une famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ de vecteurs de E qui est libre et génératrice est appelée base de E.

• Une fois la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ de E fixée, pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$ de E il existe une et une seule famille de coefficients $(\lambda_k)_{k=1}^p$ qui sont appelées coordonnées de $\boldsymbol{v}$ dans cette base $\mathcal{B}$:

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in E \quad \exists!\ (\lambda_k)_{k=1}^p \in \mathbb{K}^p \quad \boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \boldsymbol{u}_k.$$

• La base $\mathcal{B}c = (E_k)_{k=1}^n$ de $\mathbb{K}^n$ définie ainsi est appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$; les coordonnées d'un vecteur $U \in \mathbb{K}^n$ dans cette base $\mathcal{B}c$ correspondent à ce vecteur :

$$E_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots \quad E_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad U \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$U = u_1\, E_1 + u_2\, E_2 + \cdots + u_n\, E_n = \sum_{k=1}^{n} u_k\, E_k$$

• La décomposition précédente prouve que la famille $(E_k)_{k=1}^n$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$.
Un vecteur de $\mathbb{K}^n$ est nul si et seulement si toutes ses coordonnées sont nulles, ainsi la même combinaison linéaire justifie que la famile $(E_k)_{k=1}^n$ est libre.

• Une fois fixée la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$, l'application φ définie ci-dessous est un isomorphisme, c'est-à-dire une application linéaire bijective :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^n &\longrightarrow E \\ X &\longmapsto \boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{u}_k \end{aligned} \qquad \varphi(X) = \mathbf{0}_E \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\varphi(\lambda X) = \lambda\, \varphi(X) \qquad \varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$$

L'application réciproque φ^{-1} est celle qui à un vecteur $\boldsymbol{v} \in E$ associe son vecteur-coordonnées $X \in \mathbb{K}^n$.

• Les propriétés des combinaisons linéaires sur les vecteurs justifient que l'application φ est linéaire :

$$X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \lambda X + \mu Y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \cdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda X + \mu Y) &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + \mu y_k) \boldsymbol{u}_k \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{u}_k + \mu \sum_{k=1}^{n} y_k \boldsymbol{u}_k = \lambda\, \varphi(X) + \mu\, \varphi(Y) \end{aligned}$$

L'application φ est surjective car la famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ est génératrice, ainsi tout vecteur $\boldsymbol{v}$ de E se décompose sous la forme d'une combinaison linéaire de coefficients $X = (x_k)_{k=1}^n$ des vecteurs $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ de E, et $\varphi(X) = \boldsymbol{v}$.
Il suffit de vérifier que $\ker \varphi = \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}\}$ pour montrer que l'application linéaire φ est injective. Le noyau $\ker \varphi$ est un sous-espace vectoriel, donc $\mathbf{0}_{\mathbb{K}^n} \in \ker \varphi$ et $\{\mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}\} \subset \ker \varphi$.
Réciproquement si $X \in \ker \varphi$ alors $\varphi X = \mathbf{0}_E$, la famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ est libre et donc $X = 0_{\mathbb{K}^n}$:

$$\begin{aligned} \varphi(X) = \mathbf{0}_E &\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} x_k \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0}_E \\ &\Longrightarrow \big(\forall\, k \in \{1 \cdots n\} \quad x_k = 0\big) \\ &\Longrightarrow X = 0_{\mathbb{K}^n} \end{aligned}$$

• Les coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs est donc la combinaison linéaire des coordonnées de ces vecteurs.
Cette transformation est bijective, à chaque vecteur de E correspond un et un seul vecteur-coordonnées et réciproquement.

Toute propriété de linéarité sur E peut se traduire en une proposition comparable sur les vecteurs-coordonnées de $\mathbb{K}^n$, et réciproquement. Tous ces calculs doivent être menés dans une base donnée, sans en changer en cours de démonstration.

Théorèmes fondamentaux

Théorème des familles génératrices

• Toute famille $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{p}$ de p vecteurs de l'espace vectoriel engendré Vect $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n}$ où $p > n$ est liée.
Autrement dit toute famille d'un espace vectoriel ayant strictement plus de vecteurs qu'une famille génératrice de cet espace est liée.

• Par contraposée toute famille libre d'un espace vectoriel possède au maximum autant de vecteur qu'une famille génératrice de cet espace

• La démonstration se fait par récurrence sur n. Le début de la démonstration justifie les cas particuliers $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
La propriété est évidente pour $\underline{n = 0}$ à partir du fait que l'espace vectoriel engendré par la famille vide est le sous-epace nul $\{\mathbf{0}\}$. Dans ce cas la famille non vide $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{p}$ est uniquement composée du vecteur nul et est donc liée.
La propriété est immédiate pour $\underline{n = 1} < p$.
Si deux vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ sont proportionnels à $\boldsymbol{u}_1$ de la forme $\boldsymbol{v}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{v}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{u}_1$ alors $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ est liée, aussi bien si $\alpha_1 = 0$ et que si $\alpha_1 \neq 0$.
Dans le premier cas $\alpha_1 = 0$ la famille $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ contient le vecteur nul $\boldsymbol{v}_1 = 0 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \mathbf{0}$ et est donc liée. Dans le second cas $\boldsymbol{v}_2$ est proportionnel à $\boldsymbol{v}_1$, donc la famille $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ est liée :

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\alpha_1}\,\boldsymbol{v}_1 \qquad \boldsymbol{v}_2 = \alpha_2\,\boldsymbol{u}_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,\boldsymbol{v}_1$$

Le cas $p > 2$ se déduit immédiatement de ce cas particulier $p = 2$ car toute sur-famille d'une famille liée est liée.
La démonstration au rang $\underline{n = 2}$ illustre la méthode générale. Elle suppose $p = 3$ pour commencer.
Posons $E = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$. Par hypothèse $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ sont trois vecteurs de E ; ils sont donc des combinaisons linéaires de $\boldsymbol{u}_1$ et de $\boldsymbol{u}_2$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \alpha_{1,1}\boldsymbol{u}_1 + \alpha_{1,2}\boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{v}_2 = \alpha_{2,1}\boldsymbol{u}_1 + \alpha_{2,2}\boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{v}_3 = \alpha_{3,1}\boldsymbol{u}_1 + \alpha_{3,2}\boldsymbol{u}_2$$

Supposons d'abord $\alpha_{3,2} \neq 0$, et posons $\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{v}_k - (\alpha_{k,2}/\alpha_{3,2})\boldsymbol{v}_3$ de façon à ce que $\boldsymbol{w}_1$ et $\boldsymbol{w}_2$ soient proportionnels à $\boldsymbol{u}_1$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \boldsymbol{v}_1 - \frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_{3,2}}\,\boldsymbol{v}_3 = \alpha_{1,1}\boldsymbol{u}_1 + \alpha_{1,2}\boldsymbol{u}_2 - \frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_{3,2}}\big(\alpha_{3,1}\boldsymbol{u}_1 + \alpha_{3,2}\boldsymbol{u}_2\big)\\
&= \alpha_{1,1}\boldsymbol{u}_1 + \alpha_{1,2}\boldsymbol{u}_2 - \frac{\alpha_{1,2}\alpha_{3,1}}{\alpha_{3,2}}\,\boldsymbol{u}_1 - \frac{\alpha_{1,2}\alpha_{3,2}}{\alpha_{3,2}}\boldsymbol{u}_2\\
&= \Big(\alpha_{1,1} - \frac{\alpha_{1,2}\alpha_{3,1}}{\alpha_{3,2}}\Big)\boldsymbol{u}_1\\
\boldsymbol{w}_2 &= \Big(\alpha_{2,1} - \frac{\alpha_{2,2}\alpha_{3,2}}{\alpha_{3,2}}\Big)\boldsymbol{u}_1
\end{aligned}$$

Ainsi $\boldsymbol{w}_1$ et $\boldsymbol{w}_2$ sont des vecteurs de $\mathbb{K}\boldsymbol{u}_1$ et forment une famille liée comme démontré précédemment pour $n = 1$.
Il existe des coefficients $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$ vérifiant $\mu_1\boldsymbol{w}_1 + \mu_2\boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0}$;
Reprendre dans cette combinaison linéaire la définition des vecteurs $\boldsymbol{w}_k$ à partir des vecteurs $\boldsymbol{v}_k$ prouve que la famille $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ est liée :

$$\begin{aligned}
\mu_1\boldsymbol{w}_1 + \mu_2\boldsymbol{w}_2 &= \mu_1\Big(\boldsymbol{v}_1 - \frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_{3,2}}\boldsymbol{v}_3\Big) + \mu_2\Big(\boldsymbol{v}_2 - \frac{\alpha_{2,2}}{\alpha_{3,2}}\boldsymbol{v}_3\Big)\\
&= \mu_1\boldsymbol{v}_1 + \mu_2\boldsymbol{v}_2 - \Big(\frac{\mu_1\alpha_{1,2}}{\alpha_{3,2}} + \frac{\mu_2\alpha_{2,2}}{\alpha_{3,2}}\Big)\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Par hypothèse l'un au moins des deux premiers coefficients μ_1 ou μ_2 est non nul, donc la famille $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ est liée lorque $\alpha_{3,2} \neq 0$.
Plus généralement si l'un des coefficient $\alpha_{k,2} \neq 0$ un changement de l'ordre d'énumération des vecteurs $\boldsymbol{v}_k$ permet d'échanger les rôles des vecteurs $\boldsymbol{v}_k$ et $\boldsymbol{v}_3$ et le résultat précédent s'applique.
Si au contraire les trois coefficients $\alpha_{k,2}$ sont nuls, alors les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ sont proportionnels à $\boldsymbol{u}_1$ uniquement et la propriété au rang $n = 1$ justifie que cette famille est liée.
Le cas $p > 3$ se déduit du cas précédent $p = 3$ car toute sur-famille d'une famille liée est liée.

• La démonstration par récurrence suppose que la proposition est vraie au rang n, et la démontre au rang $n + 1$. La méthode est la même que pour $n = 2$.
Cette démonstration au rang $n + 1$ se ramène à l'hypothèse de récurrence au rang n en remplaçant la famille $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{p}$ de vecteurs de $E = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n+1}$ par la famille $(\boldsymbol{w}_k)_{k=1}^{p-1}$ de vecteurs de $F = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n}$ où $\lambda_k \in \mathbb{K}$ est choisi de façon à ce que le coefficient

de $\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{v}_k - \lambda_k \boldsymbol{v}_p$ $\boldsymbol{w}_k$ associé à $\boldsymbol{u}_{n+1}$ soit nul, ainsi $\boldsymbol{w}_k \in F$.
La première étape de la démonstration suppose $p = n+2$ et $\alpha_{p,n+1} \neq 0$:

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{k,i} \boldsymbol{u}_i \qquad \lambda_k = \frac{\alpha_{k,n+1}}{\alpha_{n+2,n+1}} \qquad \text{pour } k \in \{1 \cdots n+1\}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{v}_k - \lambda_k \boldsymbol{v}_{n+2} &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{k,i} \boldsymbol{u}_i - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\alpha_{k,n+1}\alpha_{n+2,i}}{\alpha_{n+2,n+1}} \boldsymbol{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{k,i} \boldsymbol{u}_i + \alpha_{k,n+1} \boldsymbol{u}_{n+1} \\ &\qquad - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{k,n+1}\alpha_{n+2,i}}{\alpha_{n+2,n+1}} \boldsymbol{u}_i - \frac{\alpha_{k,n+1}\alpha_{n+2,n+1}}{\alpha_{n+2,n+1}} \boldsymbol{u}_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha_{k,i} - \frac{\alpha_{k,n+1}\alpha_{n+2,i}}{\alpha_{n+2,n+1}}\Big) \boldsymbol{u}_i \in F = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{u}_k, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence justifie que la famille $(\boldsymbol{w}_k)_{k=1}^{n+1}$ est liée dans l'espace $F = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n}$ car $n < n+1$.
La famille des vecteurs $(\boldsymbol{w}_k)_{k=1}^{n+1}$ est liée et il existe une combinaison linéaire de coefficients $(\mu_k)_{k=1}^{n+1}$ non tous nul et de valeur nulle ; Exprimer cette combinaison linéaire en fonction de $\boldsymbol{v}_k$ prouve que la famille $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{n+2}$ est liée :

$$\mathbf{0} = \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k \boldsymbol{w}_k = \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k (\boldsymbol{v}_k - \lambda_k \boldsymbol{v}_{n+2}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k \boldsymbol{v}_k - \Big(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k\Big) \boldsymbol{v}_{n+2}$$

Par hypothèse l'un des coefficients au moins μ_k est non nul, et donc la famille $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{n+2}$ est liée.
Si $\alpha_{n+2,n+1} = 0$ mais que l'un des coefficients $\alpha_{k,n+1} \neq 0$ est non nul, l'échange des vecteurs $\boldsymbol{v}_k$ et $\boldsymbol{v}_{n+2}$ dans l'énumération de la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i=1}^{n+2}$ permet d'appliquer le résultat précédent et prouve que la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i=1}^{n+2}$ est liée.
Si au contraire tous les coefficients $\alpha_{k,n+1}$ sont nuls, les vecteurs $\boldsymbol{v}_k$ sont des vecteurs indépendant de $\boldsymbol{u}_{n+1}$ et sont dans F. L'hypothèse de récurrence s'applique immédiatement.
Dans tous les cas la famille $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{n+2}$ de vecteurs de $E = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n+1}$ est liée.
Le cas $p > n+2$ se déduit du cas $p = n+2$ car toute sur-famille d'une famille liée est liée.

• Par exemple les trois vecteurs E_1, E_2 et E_3 forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, donc ces quatre vecteurs $(U_k)_{k=1}^4$ constituent une famille liée sans qu'il soit nécessaire de faire de calculs :

$$E_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad E_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad E_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$U_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad U_2 \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \quad U_3 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad U_4 \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Espaces de dimension finie

• Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est de dimension finie si et seulement s'il possède une famille génératrice finie :

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\ (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n \in E^n \quad \begin{aligned} E &= \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n \\ &= \mathbb{K}\,\boldsymbol{u}_1 + \mathbb{K}\,\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \mathbb{K}\,\boldsymbol{u}_n \end{aligned}$$

Toute base de E est libre et contient donc au maximum n vecteurs.

• Un espace vectoriel E est de dimension finie si et seulement si le nombre de vecteurs des familles libres est majoré :

$$\mathcal{S} = \Big\{\mathcal{F} \;\Big/\; \mathcal{F} \text{ est une famille libre de } E\Big\}$$

$$\mathcal{N} = \Big\{\mathrm{card}\ \mathcal{F} \;\Big/\; \mathcal{F} \in \mathcal{S}\Big\} \subset \mathbb{N}$$

$$E \text{ est de dimension finie} \iff \mathcal{N} \text{ est majoré}$$

Dans ce cas $\mathcal{N}$ possède un plus grand élément $m = \max \mathcal{N}$.
Toute famille libre de m vecteurs de E est une base de E.

• La famille vide () de vecteurs est libre pour tout espace vectoriel, y compris l'espace vectoriel nul $\{\mathbf{0}\}$. Dans tous les cas $0 \in \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \neq \emptyset$.

• Le plus grand élément $m = \max \mathcal{N}$ est bien défini car $\mathcal{N}$ est un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$.
Si $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^m$ est une famille libre ayant le plus grand nombre possible de vecteurs, c'est-à-dire une famille maximale de $\mathcal{F}$, alors tout vecteur $\boldsymbol{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
En effet la famille $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{m+1}$ où $\boldsymbol{v}_{m+1} = \boldsymbol{w}$ est liée car elle comporte $m+1 > m$ vecteurs. Soit une relation de dépendance linéaire de ces vecteurs, deux cas sont possibles le coefficient λ_{m+1} de $\boldsymbol{v}_{m+1}$ est nul ou est différent de zéro.

Si $\lambda_{m+1} \neq 0$ alors tous les autres coefficicents sont nuls car la famille $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^m$ est libre par hypothèse ; ceci qui est faux ; ainsi $\lambda_{m+1} \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0}_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0}_E \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{-\lambda_k}{\lambda_{m+1}} \boldsymbol{u}_k$$

La famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^m$ est génératrice de E qui est finie, et l'espace vectoriel E est de dimension finie.

• Réciproquement si l'espace vectoriel $E = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ est de dimension finie alors toute famille de $p > n$ vecteurs est liée et $\mathcal{N}$ est majoré par n.

Théorème de la base incomplète

• Lorsque l'espace vectoriel E est de dimension finie, la famille $\mathcal{L}$ de vecteurs de E est libre, et la famille $\mathcal{G}$ est une sur-famille de $\mathcal{L}$ qui est génératrice de E, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$, et $\mathcal{B}$ possède un nombre fini de vecteurs.

• Par hypothèse la famille libre $\mathcal{L}$ possède un nombre fini de vecteurs car elle est une famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie. Ce théorème fait uniquement l'hypothèse $E = \operatorname{Vect} \mathcal{G}$ sans préciser si $\mathcal{G}$ est une famille finie ou pas.

• La démonstration est en partie similaire à la précédente, en définissant ainsi les ensembles $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{N}'$.

$$\mathcal{S}' = \left\{ \mathcal{F} \,\middle/\, \mathcal{F} \text{ est une famille libre de } E \ \mathsf{ET}\ \mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \right\}$$

$$\mathcal{N}' = \left\{ \text{card } \mathcal{F} \,\middle/\, \mathcal{F} \in \mathcal{S}' \right\} \subset \mathbb{N} \qquad m = \max \mathcal{N}'$$

L'espace E est supposé de dimension finie, donc engendré par une famille finie de n vecteurs.
Les familles de $\mathcal{S}'$ sont libres et ont donc au maximum n vecteurs.
Par ailleurs l'ensemble $\mathcal{S}'$ n'est pas vide car $\mathcal{L} in \mathcal{S}'$, donc $\mathcal{N}' \neq \emptyset$.
L'ensemble $\mathcal{N}'$ est non vide et majoré, donc possède un plus grand élément $m =_m ax\mathcal{N}'$. Notons $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_k)_{k=1 \in \mathbb{N}} m$ une famille libre maximale de cardinal m et montrons que $\mathcal{B}$ est une base de E.
Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur de la famille $\mathcal{G}$, la famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_k)_{k=1 \in \mathbb{N}} m+1$ où $\boldsymbol{v}_{m+1} = \boldsymbol{v}$ est liée car elle vérifie $\mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ et possède $m+1 > m$ vecteurs.

Soit une relation de dépendance linéaire de ces vecteurs, deux cas sont possibles le coefficient λ_{m+1} de $\boldsymbol{v}_{m+1}$ est nul ou est différent de zéro.
Comme dans la démonstration précédente si $\lambda_{m+1} \neq 0$ alors tous les autres coefficicents sont nuls car la famille $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^m$ est libre par hypothèse ; ceci qui est faux ; ainsi $\lambda_{m+1} \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0}_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0}_E \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{-\lambda_k}{\lambda_{m+1}} \boldsymbol{u}_k$$

Donc tous les vecteurs $\boldsymbol{v}$ de $\mathcal{G}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{B}$.
Enfin tous les vecteurs $\boldsymbol{w}$ de E sont par hypothèse des combinaisons linéaires des vecteurs de $\boldsymbol{v}$ de $\mathcal{G}$ qui sont eux-mêmes des combinaisons des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}_i \in \mathcal{G}$$

$$\boldsymbol{w} = \sum_{\text{finie sur } \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}} \mu \boldsymbol{v} = \sum_{\text{finie sur } \boldsymbol{v} \in \mathcal{G}} \sum_{i=1}^{n} \mu \lambda_{i,\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}_i$$

La famille $\mathcal{B}$ est ainsi génératrice de E, et libre par hypothèse. Elle forme donc une base de E.

• Tout espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base.

• Pour cela il suffit d'appliquer le théorème de la base incomplète avec $\mathcal{L} = \emptyset$ et $\mathcal{G} = E$.

Définition et propriétés de la dimension

Propriétés élémentaires

• Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie E ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E et noté $\dim E$.

• Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de l'espace E alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux familles libres donc finies car l'espace E est de dimension finie.
Par ailleurs $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ est génératrice, donc card $\mathcal{B} \leq$ card $\mathcal{B}'$.

L'argument symétrique prouve card $\mathcal{B}' \leq$ card $\mathcal{B}$; en conclusion card $\mathcal{B} =$ card $\mathcal{B}'$.

• L'espace $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie n car sa base canonique $(E_k)_{k=1}^n$ comporte n vecteurs :

$$E_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad E_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \dim \mathbb{K}^n = n$$

• L'ensemble $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de base (1) et de dimension un : tout nombre complexe z est de la forme $z = z \times 1$.
Au contraire $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $(1, \mathrm{i})$ et de dimension deux : z est de la forme $a \times 1 + b \times i$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
La notion de dimension d'un espace vectoriel fait implicitement intervenir le corps de base de cet espace.

• L'espace vectoriel nul $\{\mathbf{0}\} = \mathbb{K}^0$ est de dimension finie, de base vide $()$ et $\dim \{\mathbf{0}\} = 0$. Réciproquement un espace de dimension nulle est l'espace nul $\{\mathbf{0}\}$:

$$\dim E = 0 \Longleftrightarrow E = \{\mathbf{0}_E\}$$

• Si $\dim E = 0$ alors une base $\mathcal{B}$ de E n'a aucun vecteur et est la famille vide $\mathcal{B} = ()$. Donc $E = \mathrm{Vect}() = \{\mathbf{0}_E\}$.
Réciproquement si la famille vide est libre et est génératrice de E alors $E = \mathrm{Vect}() = \{\mathbf{0}_E\}$ car une combinaison linéaire vide est le vecteur nul.

• Un espace vectoriel n'est pas nécessairement de dimension finie ; dans ce cas il est dit de dimension infinie et possède des familles libres ayant un nombre arbitrairement grand d'éléments.

• l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes est aussi de dimension infinie parce que les familles de monômes $(X^m)_{m=0}^p$ sont libres pour toutes les valeurs de $p \in \mathbb{N}$.
En revanche l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est de dimension $n+1$ et de base canonique $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$.

• L'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites est de dimension infinie car les familles suivantes de $p+1$ suites indicées par $m \in \{0 \cdots p\}$ sont libres :

$$u_{m,n} = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \begin{aligned} (u_{0,n})_{n\in\mathbb{N}} &= (1, 0, 0, 0, \cdots) \\ (u_{1,n})_{n\in\mathbb{N}} &= (0, 1, 0, 0, \cdots) \\ (u_{2,n})_{n\in\mathbb{N}} &= (0, 0, 1, 0, \cdots) \\ &\cdots \end{aligned}$$

• L'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ est de dimension infinie car toutes les familles $(t \mapsto t^m)_{m=0}^p$ de $p+1$ applications sont libres.

Caractérisation des bases

• Dans un espace vectoriel E de dimension finie n, les propositions suivantes caractérisent les bases de E :

Les familles libres ont au maximum n éléments.

Les familles libres ayant n éléments sont des bases.

Les familles génératrices ont au minimum n éléments.

Les familles génératrices ayant n éléments sont des bases.

Ces propositions simplifient la preuve qu'une famille est une base.

• Ces propriétés découlent du paragraphe précédent, en notant $\mathcal{B}$ une base de E qui a donc n vecteurs.
La première correspond au théorème des familles génératrices appliquée avec la famille génératrice finie $\mathcal{B}$.
La base $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice de E à n éléments, et correspond à une famille libre maximale. Le théorème des espaces de dimension finie justifie qu'une famille libre à n éléments est une base.
Le théorème des familles génératrices appliquées à une famille génératrice quelconque et à la famille libre $\mathcal{B}$ justifie que toute familles génératrices a au minimum n éléments.
Si une famille génératrice $\mathcal{G}$ a n éléments le théorème de la base incomplète justifie l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de E vérifiant $\emptyset \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{G}$.
Les familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases et ont le même nombre d'éléments, donc card $\mathcal{B}' = n =$ card $\mathcal{G}$. En conclusion $\mathcal{B}' = \mathcal{G}$, et $\mathcal{G}$ est une base.

• Une fois connue la dimension de E, il suffit de vérifier qu'une famille $\mathcal{B}$ ayant $\dim E$ vecteurs est ou libre ou génératrice pour montrer qu'elle forme une base de E.
Par ailleurs la preuve qu'une famille est libre est généralement plus simple que celle vérifiant qu'une famille est génératrice.

• Cet exemple illustre la méthode précédente. La résolution de ce système linéaire justifie que ces quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ forment une famille libre et donc constitue une base de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4 :

$$U_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\qquad U_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad U_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\qquad U_4\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_3+\lambda_4=0\\ -\lambda_1+\lambda_4=0\end{cases}\Longrightarrow +\lambda_1=-\lambda_2=+\lambda_3=-\lambda_4=-\lambda_1$$

Ainsi $2\lambda_1=0$, puis $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, donc la famille (U_1,U_2,U_3,U_4) est libre.

• Lorsqu'il est nécessaire de vérifier que $\mathcal{B}$ est une base et, en plus, de calculer les coordonnées d'un vecteur quelconque dans cette base, dans ce même cas où la dimension de E est connue, le plus efficace consiste alors à vérifier que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de E et contient $\dim E$ vecteurs.

Pour prouver que cette famille $\mathcal{B}$ est génératrice, il est souvent plus efficace de décomposer les $\dim E$ vecteurs de la base canonique de E que la décomposer un vecteurs quelconque ; la résolution pouvant alors s'effectuer de proche en proche.

Il est certes possible de faire ces calculs à l'aide de systèmes linéaires sur les coordonnées, mais il vaut mieux privilégier l'exploitation des équations vectorielles.

• L'exemple suivant illustre ces méthodes pour vérifier que $\mathcal{B}$ est une base et déterminer, en plus, les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ dans cette base $\mathcal{B}$ indépendemment de la preuve précédente, après avoir remarqué la première égalité vectorielle puis tiré profit des résultats déjà trouvées pour les décompositions suivantes :

$$U_2-U_3+U_4=E_1+E_4\qquad U_1=E_1-E_4$$
$$E_1=\frac12 U_1+\frac12 U_2-\frac12 U_3+\frac12 U_4\quad\text{par demi-somme}$$
$$E_4=E_1-U_1=-\frac12 U_1+\frac12 U_2-\frac12 U_3+\frac12 U_4$$
$$E_2=U_2-E_1=-\frac12 U_1+\frac12 U_2+\frac12 U_3-\frac12 U_4$$
$$E_3=U_3-E_2=\frac12 U_1-\frac12 U_2+\frac12 U_3+\frac12 U_4$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\frac12\Big(\begin{array}{l}(x-y+z-t)\;U_1+(x+y-z+t)\,U_2\\+(-x+y+z-t)\,U_3+(x-y+z+t)\,U_4\end{array}\Big)$$

Calcul des dimensions

Espaces vectoriels produits

• Si les deux espaces vectoriels E et F sont de dimension finie sur un même corps $\mathbb{K}$ ayant respectivement pour bases $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ et $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^q$, alors $E\times F$ est un espace de dimension finie dont une base est la suivante :

$$\big((\boldsymbol{u}_1,\mathbf{0}_F),(\boldsymbol{u}_2,\mathbf{0}_F),\cdots,(\boldsymbol{u}_p,\mathbf{0}_F),(\mathbf{0}_E,\boldsymbol{v}_1),(\mathbf{0}_E,\boldsymbol{v}_2),\cdots,(\mathbf{0},\boldsymbol{v}_q)\big)$$
$$\dim(E\times F)=\dim E+\dim F$$

• Il suffit de montrer que la famille précédente est libre et génératrice de $E\times F$ pour les opérations coordonnée par coordonnée.

Montrons que la famille est libre, à partir d'une combinaison linéaire des couples de vecteurs :

$$\lambda_1(\boldsymbol{u}_1,\mathbf{0}_F)+\cdots+\lambda_p(\boldsymbol{u}_p,\mathbf{0}_F)+\mu_1(\mathbf{0}_E,\boldsymbol{v}_1)+\cdots+\mu_q(\mathbf{0}_E,\boldsymbol{v}_q)=(\mathbf{0}_E,\mathbf{0}_F)$$
$$\Longrightarrow(\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\lambda_p\boldsymbol{u}_p+\mu_1\mathbf{0}_E+\cdots\mu_q\mathbf{0}_E,\ \lambda_1\mathbf{0}_E+\cdots+\lambda_p\mathbf{0}_E+\mu_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\mu_q\boldsymbol{v}_q)=(\mathbf{0}_E,\mathbf{0}_F)$$
$$\Longrightarrow\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\lambda_p\boldsymbol{u}_p=\mathbf{0}_E\ \textsf{ET}\ \mu_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\mu_q\boldsymbol{v}_q=\mathbf{0}_F$$
$$\Longrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_p=0\ \textsf{ET}\ \mu_1=\cdots=\mu_q=0$$

La famille $\mathcal{B}$ des couples de vecteurs est donc libre dès que les familles $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont libres.

Soient $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}')$ un vecteur quelconque de l'espace produit $E\times F$.
Le vecteur $\boldsymbol{w}\in E$ est une combinaison linéaire de la famille génératrice $\mathcal{B}_E$, et $\boldsymbol{w}'\in F$ est pour la même raison une combinaison linéaire de la base $\mathcal{B}_F$ de F.

$$\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_p\boldsymbol{u}_p=\boldsymbol{w}\ \mathsf{ET}\ \mu_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\mu_q\boldsymbol{v}_q=\boldsymbol{w}'$$
$$\Longrightarrow \lambda_1(\boldsymbol{u}_1,\mathbf{0}_F)+\cdots+\lambda_p(\boldsymbol{u}_p,\mathbf{0}_F)+\mu_1(\mathbf{0}_E,\boldsymbol{v}_1)+\cdots+\mu_q(\mathbf{0}_E,\boldsymbol{v}_q)=(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}')$$

Dimension des sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

• Tout sous-espace vectoriel F d'un espace de dimension finie E est de dimension finie et vérifie ces deux propriétés :

$$\dim F\le\dim E\qquad \dim F=\dim E\Longleftrightarrow F=E$$

• Toute famille libre de vecteurs de F est une famille libre de E et donc possède au maximum $\dim E$ vecteurs. Le nombre de vecteurs des familles libres de F est donc majoré par $\dim E$, et donc le sous-espace F est de dimension finie inférieure à $\dim E$.
Supposons $\dim E=\dim F$. Soit $\mathcal{B}$ une base de F, la famille de vecteurs $\mathcal{B}$ est libre et possède $\dim F=\dim F$ vecteurs, elle forme donc une base de E. Ainsi $\operatorname{Vect}\mathcal{B}=F=E$.

• Tout sous-espace contenant un vecteur non nul $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}_E$ est de dimension strictement positive, car la famille $(\boldsymbol{u})$ est libre.

• La démonstration de l'égalité de deux sous-espaces vectoriels F et G par les deux inclusions $F\subset G$ et $G\subset F$ peut être remplacée par l'implication suivante :

$$F\subset G\ \mathsf{ET}\ \dim F=\dim G\Longrightarrow F=G$$

Le sous espace F de E étant inclus dans G est aussi un sous-espace de G et le théorème précédent s'applique à F et G.

• Si les sous-espaces F et G de E sont supplémentaires, c'est-à-dire $F\cap G=\{\mathbf{0}_E\}$, et ont pour bases $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ et $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^q$ alors une base de $F\oplus G$ est obtenue par concaténation des bases de F et de G et détermine $\dim(F\oplus G)$:

$$(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_p,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_q)\qquad \dim(F\oplus G)=\dim F+\dim G$$

• Tout sous-espace vectoriel F de E possède un sous-espace G sup-

plémentaire — $E=F\oplus G$ — dont une base est calculée à l'aide du théorème de la base incomplète appliqué à F ; les vecteurs ajoutées à la base de F forment une base de G :

$$\mathcal{B}_F=(\boldsymbol{u}_1,\cdots\boldsymbol{u}_p)=\mathcal{L}\subset\mathcal{B}_E=(\boldsymbol{u}_1,\cdots\boldsymbol{u}_p,\boldsymbol{v}_1,\cdots\boldsymbol{v}_q)$$
$$\mathcal{B}_G=(\boldsymbol{v}_1,\cdots\boldsymbol{v}_q)\qquad G=\operatorname{Vect}\mathcal{B}_G$$

• La base $\mathcal{B}_F$ de F est une famille libre $\mathcal{L}=\mathcal{B}_F$ de vecteurs de E.
Le théorème de la base incomplète justifie l'existence d'une base $\mathcal{B}_E$ de E vérifiant $\mathcal{L}\subset\mathcal{B}_E\subset E$.
La famille $\mathcal{B}_G$ des vecteurs ajoutés à $\mathcal{B}_F$ est une sous-famille de la base $\mathcal{B}_E$ et forme donc une famille libre.
La construction même de G justifie que $\mathcal{B}_G$ est une famille génératrice de G.

• Deux sous-espaces F et G d'un espace de dimension finie vérifient cette égalité, appelée *égalité des quatre dimensions* ou *formule de Grassmann* :

$$\dim(F+G)+\dim(F\cap G)=\dim F+\dim G$$

• Une démonstration possible consiste à noter $H=F\cap G$, déterminer la dimension d'un sous-espace K supplémentaire de $H\subset G$ par rapport à G, et d'exploiter les égalités $G=H\oplus K$ et $F+G=F\oplus K$.
La preuve de la seconde égalité repose sur une double inclusion et cette intersection. La première inclusion $F+K\subset F+G$ provient de $K\subset G$. Réciproquement si $\boldsymbol{u}\in F+G$ alors $\boldsymbol{u}$ est de la forme $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'$ avec $\boldsymbol{v}\in F$ et $\boldsymbol{v}'\in G=H\oplus K$; le vecteur $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}'$ où $\boldsymbol{w}\in H$ et $\boldsymbol{w}'\in K$; les propositions ci-dessous justifient l'inclusion $F+G\subset F+K$ puis $F+G=F+K$:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'\in F+G\qquad \boldsymbol{v}\in F\qquad \boldsymbol{v}'\in G$$
$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}'\qquad \boldsymbol{w}\in H=F\cap G\subset F\qquad \boldsymbol{w}'\in K$$
$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}')=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+\boldsymbol{w}'\in F+K$$
$$K\subset G\Longrightarrow F+K\subset F+G$$

La preuve de la somme directe provient de ces inclusions :

$$\{\mathbf{0}_E\}\subset F\cap K\qquad\text{par intersection des sev}$$
$$\left.\begin{array}{rl} & F\cap K\subset F\cap G=H\\ \mathsf{ET} & F\cap K\subset K\end{array}\right\}\Longrightarrow F\cap K\subset H\cap K=\{\mathbf{0}_E\}$$
$$F\cap K=\{\mathbf{0}_E\}$$

Deux arguments de dimensions terminent la démonstration :

$$\begin{aligned}\dim G &= \dim H + \dim K\\ \dim K &= \dim G - \dim H = \dim G - \dim(F\cap G)\\ \dim(F+G) &= \dim(F\oplus K) = \dim F + \dim K\\ &= \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)\end{aligned}$$

• Un calcul de dimension permet, grâce au théorème des quatre dimensions, de montrer que deux sous-espaces F et G sont supplémentaires en montrant uniquement l'une des deux égalités $F+G=E$ ou $F\cap G=\{\mathbf{0}_E\}$:

$$\begin{aligned}& E = F\oplus G\\ \Longleftrightarrow\ & F+G=E \ \textsf{ET}\ \dim F+\dim G=\dim E\\ \Longleftrightarrow\ & F\cap G=\{\mathbf{0}_E\}\ \textsf{ET}\ \dim F+\dim G=\dim E\end{aligned}$$

• Dans le cas où $E=F+G$ la dimension du sous-espace nul $\{\mathbf{0}_E\}$ prouve la première équivalence :

$$\begin{aligned}& F\cap G=\{\mathbf{0}_E\}\\ \Longleftrightarrow\ & \dim(F\cap G)=0\\ \Longleftrightarrow\ & \dim F+\dim G=\dim(F+G)+\dim(F\cap G)\\ & \qquad = \dim(F+G)=\dim E\end{aligned}$$

Dans le cas où $F\cap G=\{\mathbf{0}_E\}$ — ainsi $\dim(F\cap G)=0$ — l'équivalence entre $F+G=E$ et $\dim(F+G)=\dim E$ relative au sous-espace $F+G$ de E termine la démonstration :

$$\begin{aligned}& F+G=E\\ \Longleftrightarrow\ & \dim(F+G)=\dim E\\ \Longleftrightarrow\ & \dim F+\dim G=\dim(F+G)+\dim(F\cap G)\\ & \qquad = \dim(F+G)=\dim E\end{aligned}$$

Sous-espaces particuliers

• Un espace vectoriel de dimension un est appelé droite vectorielle. Toute droite vectorielle D est de la forme $D=\mathbb{K}\,\boldsymbol{u}$ avec $\boldsymbol{u}\in D$ et $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$.

• Un espace vectoriel de dimension deux est appelé plan vectoriel. Tout plan vectoriel P est de la forme $P=\mathbb{K}\,\boldsymbol{u}+\mathbb{K}\,\boldsymbol{v}$ où $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux vecteurs de P qui ne sont pas proportionnels.
Ces notations s'appliquent en particulier aux sous-espaces vectoriels qui ont par construction une structure d'espace vectoriel.

• Tout sous-espace vectoriel $F\subset D$ d'une droite vectorielle D est de dimension zéro ou un. Les arguments de dimension précédents justifient que soit $F=\{\mathbf{0}\}$ soit $F=D$.
De même un sous-espace d'un plan vectoriel P différent de P qui contient un vecteur non nul est une droite vectorielle. et qui

• L'appelation de $\mathbb{C}$ sous le nom de plan complexe fait référence au fait que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension deux.

• Un sous-espace de E de dimension $\dim E-1$ est appelé hyperplan vectoriel de E.

Lien avec les applications linéaires

Dans cette partie E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie sur un même corps $\mathbb{K}$, et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

Rang d'une application linéaire

• Le rang d'un morphisme f est la dimension de l'image :

$$\operatorname{rg} f=\dim(\operatorname{Im} f)$$

• Le théorème du rang énonce cette égalité vérifiée par tout morphisme :

$$\operatorname{rg} f+\dim(\ker f)=\dim E \qquad \text{où } f\in\mathcal{L}(E,F)$$

• La preuve suivante note $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ une base de $\ker f\subset E$, et $(\boldsymbol{w}_k)_{k=1}^q$ une base de $\operatorname{Im} f\subset F$.
Il existe une famille $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^q$ de E telle que $f(\boldsymbol{v}_k)=\boldsymbol{w}_k$. Cette famille $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^q$ est libre car son image $(\boldsymbol{w}_k)_{k=1}^q$ par f est libre ; cette dernière propriété est la contraposée de l'image d'une famille liée est liée.
La famille $\mathcal{B}$ est libre car une combinaison linéaire nulle de ses vecteurs entraîne que tous les coefficients sont nuls :

$$\mathcal{B}=(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_p,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_q) \qquad \sum_{k=1}^p\lambda_k\boldsymbol{u}_k+\sum_{k=1}^q\mu_k\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0}_E$$

$$f\Big(\sum_{k=1}^p\lambda_k\boldsymbol{u}_k+\sum_{k=1}^q\mu_k\boldsymbol{v}_k\Big)=\sum_{k=1}^p\lambda_k\,f(\boldsymbol{u}_k)+\sum_{k=1}^q\mu_k\,f(\boldsymbol{v}_k)$$

$$=\sum_{k=1}^q\mu_k\boldsymbol{w}_k=f(\mathbf{0}_E)=\mathbf{0}_F \qquad \text{donc } \mu_k=0 \text{ pour } k\in\{1\cdots q\}$$

puis $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0}_E$ entraine que $\lambda_k = 0$ pour $k \in \{1 \cdots p\}$

Les arguments suivants justifient que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice car tout vecteur $\boldsymbol{v}$ de E est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$f(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} f \qquad f(\boldsymbol{v}) \text{ est de la forme } \sum_{k=1}^{q} \mu_k \boldsymbol{w}_k \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \sum_{k=1}^{q} \mu_k \boldsymbol{v}_k$$

$$f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_F \qquad \boldsymbol{u} \in \ker f \qquad \boldsymbol{u} \text{ est de la forme } \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \boldsymbol{u}_k$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \sum_{k=1}^{q} \mu_k \boldsymbol{v}_k = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \boldsymbol{u}_k + \sum_{k=1}^{q} \mu_k \boldsymbol{v}_k$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de E, ce qui justifie $p + q = \dim E$ et prouve le théorème du rang.

• Ainsi $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim E$ si et seulement si f est injectif.
Ainsi $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim F$ si et seulement si f est surjectif.

• La première équivalence provient du théorème du rang :

$$\ker f = \{\mathbf{0}_E\} \qquad \dim(\ker f) = 0 \qquad \operatorname{rg} f = \dim E - 0 = \dim E$$

La seconde est directement issue de ces équivalences :

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective} &\Longrightarrow \operatorname{Im} f = F \\ &\Longrightarrow \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim F \end{aligned}$$

• Si l'application G est injetive alors $\dim G = \dim(f(G))$.
Autrement dit l'image par un morphisme injectif d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace de même dimension.

• La restriction $f_{/G}$ d'une application linéaire $f : E \to F$ à un sous-espace G de E est linéaire :

$$f : E \to F \qquad f_{/F} : G \to F \qquad \operatorname{Im}(f_{/G}) = f(G)$$

$$\ker(f_{/G}) = \left\{\boldsymbol{u} \in G \;\big/\; f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_F\right\} \ker(f_{/G}) = \ker f \cap G$$

Le théorème du rang appliqué à la restriction d'une application linéaire énonce d'autres égalités de dimension ; par exemple :

$$\dim(\ker f \cap G) = \dim G - \dim(f(G))$$

• Si l'application $f : E \to F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels alors $\dim E = \dim F$.

• Si f est surjective alors $\operatorname{Im} f = f(E) = F$ et si f est injective $\ker f = \{\mathbf{0}_E\}$:

$$\dim E = \operatorname{rg} f + \dim(\ker f) = \dim(\operatorname{Im} f) + 0 = \dim F$$

• Le rang d'une application linéaire est invariant par composition par un automorphisme :

$$h \in \mathcal{GL}(E) \qquad g \in \mathcal{GL}(F) \qquad \operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f \circ h) = \operatorname{rg} f$$

• La première égalité provient du fait que l'application f est injective et que $\ker g = \{\mathbf{0}_F\}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \in \ker f &\Longleftrightarrow f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_F = \\ &\Longleftrightarrow f(\boldsymbol{u}) \in \ker g = \{\mathbf{0}_F\} \\ &\Longleftrightarrow (g \circ f)(\boldsymbol{u})\mathbf{0}_F \\ &\Longleftrightarrow \boldsymbol{u} \in \ker(g \circ f) \qquad \ker f = \ker(g \circ f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} f &= \dim E - \dim(\ker f) \\ &= \dim E - \dim(\ker(g \circ f)) = \operatorname{rg}(g \circ f) \end{aligned}$$

La seconde proposition provient directement du fait que h est surjective :

$$\begin{aligned} h(F) = F &\Longrightarrow \operatorname{Im}(f \circ h) = (f \circ h)(F) = f(h(F)) = f(F) = \operatorname{Im} f \\ &\Longrightarrow \operatorname{rg}(f \circ h) = \operatorname{rg} f \end{aligned}$$

Propriétés des isomorphismes en dimension finie

• Si l'image par $f \in \mathcal{L}(E, F)$ d'une base $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n}$ est une base $\mathcal{B}_F = (f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^{n}$ de F alors f est bijective.
Réciproquement si l'application f est un isomorphisme de E dans F alors l'image d'une base $\mathcal{B}_E$ de E est une base $\mathcal{B}_F$ de F :

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \qquad \mathcal{B}_E = (\boldsymbol{u}_1, \cdots \boldsymbol{u}_n) \text{ base de } E$$
$$\mathcal{B}_F = (f(\boldsymbol{u}_1), \cdots f(\boldsymbol{u}_n)) \text{ base de } F \Longleftrightarrow f \text{ est bijective}$$

• Ces propriétés ont été démontrées dans le chapitre précédent.

• Dans le cas où les espaces E et F sont de même dimension finie, $\dim E = \dim F$, les propositions suivantes relatives à l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ sont équivalentes :

$$f \text{ est un isomorphisme} \Longleftrightarrow f \text{ est injective} \Longleftrightarrow \ker f = \{\mathbf{0}_E\}$$
$$\Longleftrightarrow f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = F \Longleftrightarrow \operatorname{rg} f = \dim F$$
$\Longleftrightarrow$ l'image par f de n'importe quelle base de E est une base de F
$\Longleftrightarrow$ il existe une base de E dont l'image par f est une base de F.

• Ce équivalences récapitulent de ce chapitre et du précédent.

L'avant-dernière proposition implique la dernière du fait que tout espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base, comme le justifie le théorème de la base incomplète.
La dernière proposition entraîne que l'application f est bijective, et donc que l'image par f de n'importe quelle base est une base.

• Lorsque $E = F$ est de dimension finie, ces équivalences caractérisent les automorphismes $f \in \mathcal{GL}(E)$.

• Dans un espace de dimension finie, les deux méthodes principales pour montrer qu'un endomorphisme f est un automorphisme consistent à montrer que l'image d'une certaine base, par exemple la base canonique, est une base, ou de montrer que le noyau est le sous espace nul : $\ker f = \{\mathbf{0}_E\}$.
Dès que l'application f est un isomorphisme, il est alors possible d'affirmer que l'image de n'importe quelle base est une base.

• La démonstration des équivalences entre les images d'une base et de toutes les bases, par des implications successives, provient des propriétés précédentes et du fait que tout espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base :

$$\begin{aligned} \text{il existe une base} \ldots &\Longrightarrow f \text{ est un isomorphisme} \\ &\Longrightarrow \text{pour toute une base} \ldots \\ &\Longrightarrow \text{il existe une base} \ldots \end{aligned}$$

• Ces équivalences ne se généralisent pas aux espace vectoriels qui ne sont pas de dimension finie ; l'opérateur δ de dérivation est linéaire et surjectif sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes, et il n'est pas injectif :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} \right)' = P$$

$$P' = 0 \Longleftrightarrow P \text{ est de la forme } a X^0 \qquad \ker \delta = \mathbb{R} X^0 = \mathbb{R}$$

Définition d'un morphisme par l'image d'une base

• Pour une base $\mathcal{B} = (vectgu_k)_{k=1}^n$ de E fixée, l'application suivante ψ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ dans F^n :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{L}(E,F) &\longrightarrow F^n \qquad\qquad n = \dim E \\ f &\longmapsto (f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^n = \big(f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \cdots, f(\boldsymbol{u}_n)\big) \end{aligned}$$

• En particulier si $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ est une base de E, et $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^n$ est une

famille de vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire f telle que $f(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{v}_k$ lorsque $k \in \{1 \cdots n\}$.
Autrement dit toute application linéaire est définie par l'image d'une base.

• La linéarité de ψ provient de la linéarité des applications de $\mathcal{L}(E,F)$:

$$\psi(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \psi(f) + \mu\, \psi(g) \quad (\lambda f + \mu g)(\boldsymbol{u}_k) = \lambda\, f(\boldsymbol{u}_k) + \mu\, g(\boldsymbol{u}_k)$$

L'application ψ est injective car la seule application de $\ker \psi$ est $0_{E \to F}$; d'une part $0_{E \to F} \in \ker f$ et réciproquement soit $f \in \ker \phi$ et $\boldsymbol{v} \in E$ de coordonnées $(x_k)_{k=1}^n$:

$$\begin{aligned} \psi(f) &= (\mathbf{0}_F, \mathbf{0}_F, \cdots, \mathbf{0}_F) \\ f(\boldsymbol{v}) &= f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{u}_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, f(\boldsymbol{u}_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, f(\boldsymbol{u}_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k\, \mathbf{0}_F = \mathbf{0}_F \\ f &= 0_{E \to F} \qquad \ker \psi \subset \{0_{E \to F}\} \end{aligned}$$

Notons φ l'isomorphisme relatif aux coordonnées dans la base $\mathcal{B}$; la recherche d'un antécédent f par l'application ψ d'une famille de vecteurs $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^n$ est définie à partir de l'isomorphisme d'espaces vectoriels φ^{-1} :

$$\varphi : \quad \mathbb{K}^n \longrightarrow E \qquad\qquad \varphi^{-1} : \quad E \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{u}_k \qquad\qquad \boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{u}_k \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

L'application f est définie ci-dessous par son image de $\boldsymbol{w} \in E$ à partir d'une famille de vecteurs $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^n \in F^n$:

$$\varphi^{-1}(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \varphi^{-1}(\boldsymbol{w}') = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{w} &= \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{u}_k \\ \boldsymbol{w}' &= \sum_{k=1}^{n} x'_k \boldsymbol{u}_k \end{aligned}$$

$$\alpha \boldsymbol{w} + \beta \boldsymbol{w}' = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_k + \beta x'_k) \boldsymbol{u}_k$$

$$f(\alpha\boldsymbol{w}+\beta\boldsymbol{w}') = \sum_{k=1}^{n}(\alpha x_k+\beta x'_k)\boldsymbol{v}_k$$
$$= \alpha\sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{v}_k + \beta\sum_{k=1}^{n} x'_k\boldsymbol{v}_k = \alpha\, f(\boldsymbol{w}) + \beta\, f(\boldsymbol{w}')$$

L'application f est donc bien linéaire car le calcul des coordonnées est une opération linéaire.
Par construction l'application f est bien un antécédent de la famille $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{n}$ car les coordonnées de $\boldsymbol{u}_k$ dans $\mathcal{B}$ correspondent au k-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ constitués de zéros sauf la coordonnée en position k de valeur un :

$$f(\boldsymbol{u}_k) = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{v}_i = 1\cdot\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_k$$

Ces deux arguments prouvent que l'application ψ est surjective.
En conclusion l'application ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriel.
La transformation ψ est symétrique de celle qui calcule l'image d'un vecteur $\boldsymbol{w}$ à partir de ses coordonnées $(x_k)_{k=1}^{n}$ et de l'image des vecteurs de la base $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n}$:

$$f(\boldsymbol{w}) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{u}_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, f(\boldsymbol{u}_k)$$

• Lorsque les espaces E et F sont de dimension finie alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie :

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F$$

• Deux espaces isomorphes $\mathcal{L}(E,F)$ et F^n sont de même dimension et la dimension d'un produit d'espaces vectoriels F^n est $n \times \dim F$.

• Lorsque $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n}$ et $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{p}$ sont des bases de E et de F, les np endomorphismes définis ainsi par l'image d'une base de E forment une base de $\mathcal{L}(E,F)$:

$$f_{i,j}(\boldsymbol{u}_k) = \delta_{i,k}\,\boldsymbol{v}_j = \begin{cases} \boldsymbol{v}_j & \text{si } i=k \\ \boldsymbol{0}_F & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } (i,j)\in\{1\cdots n\}\times\{1\cdots p\}$$

Montrons que cette famille de np applications est libre pour montrer qu'elle forme une base de $\mathcal{L}(E,F)$. Soit une telle combinaisons d'applications de coefficients $(\lambda_{i,j})$ égale à l'application nulle. En particulier l'image des vecteurs $\boldsymbol{u}_k$ est nulle, et par construction $f_{i,j}(\boldsymbol{v}_k)$

est de valeur $\boldsymbol{0}_F$ si $i \neq k$ et de valeur $\boldsymbol{v}_j$ sinon :

$$\sum_{i,j}\lambda_{i,j} f = 0_{E\to F} \sum_{i,j}\lambda_{i,j}\, f(\boldsymbol{u}_k) = \sum_{j=1}^{p}\lambda_{k,j}\,\boldsymbol{v}_j = 0_{E\to F}$$

La famille $(\boldsymbol{v}_j)_{j=1}^{p}$ est une base de F donc tous les coefficients $\lambda_{k,j}$ sont nuls, ceci est valable pour tout k, ainsi les np coefficients sont nuls et la famille $(f_{i,j})_{i,j}$ est une base de $\mathcal{L}(E,F)$.

Exemples récapitulatifs

• Cette partie illustre comment des arguments de dimension peuvent simplifier certaines preuves d'algèbre linéaire. La première est une propriété générale des espaces de dimension finie, et la seconde correspond à un exemple numérique.

• Deux espaces de dimension finie E et F sur le même corps $\mathbb{K}$ sont de même dimension si et seulement s'il existe un isomorphisme de E dans F :

$$f \text{ est bijective ET } f\in\mathcal{L}(E,F) \implies \dim E = \dim F \qquad \begin{matrix} \ker f = \{\boldsymbol{0}_E\} \\ \operatorname{Im} f = F \end{matrix}$$

S'il existe un isomorphisme de E dans F alors l'image d'une base de E est une base de F, libre car f est injective, et génératrice car f est surjective. Ces deux bases ont le même nombre d'éléments et les deux espaces de dimension finie sont donc de même dimension.
Réciproquement si E et F sont de même dimension et de base $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n}$ et $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{n}$ alors il existe une unique application linéaire $f\in\mathcal{L}(E,F)$ telle que $f(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{v}_k$. Par construction l'image d'une base de E par ce morphisme est une base de F, et donc f est un isomorphisme.

• Les calculs suivants déterminent les propriétés des sous-ensembles F et G de $\mathbb{R}^3$ définis ainsi :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Big/\ x+2y = x-2z = 0 \right\}$$
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Big/\ x+y-2z = 0 \right\}$$

Justifier qu'ils forment des sous-espaces vectoriels, préciser leur dimension, et montrer qu'ils sont supplémentaires par un argument de dimension.

• Les applications f et g sont obtenues à partir de combinaisons linéaires des coordonnées et sont donc linéaires. Les sous-ensembles F et G sont ainsi des sous-espaces vectoriels car ils sont les noyaux de ces deux applications linéaires :

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad\qquad g: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ x-2z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x+y-2z \qquad \begin{array}{l} F = \ker f \\ G = \ker g \end{array}$$

• Le théorème du rang détermine les dimensions de ces sous-espaces. D'une part la dimension du sous-espace $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2$ vérifie $\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$ et d'autre part $\operatorname{Im} f$ contient ces deux vecteurs-images qui ne sont pas proportionnels, et qui forment donc une famille libre, ainsi $\operatorname{rg} f \geq 2$, en conclusion $\operatorname{rg} f = 2$.
De même $\operatorname{Im} g \subset \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im} g \neq \{\mathbf{0}\}$ donc $\operatorname{rg} g = 1$. Le théorème du rang justifie ensuite les dimensions de F et G :

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\dim F = \dim(\ker f) = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rg} f = 3 - 2 = 1$$

$$\dim G = \dim(\ker g) = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rg} g = 3 - 1 = 2$$

• Le vecteur $U \in F$ est obtenue en recherchant une solution non nulle des deux équations correspondantes. Ce vecteur constitue donc une famille libre d'un espace de dimension 1 et forme ainsi une base de F.
De même les deux vecteurs V et W de G ne sont pas proportionnels ; la famille (V, W) est libre dans G de dimension 2 ; une base de G est donc cette famille (V, W) :

$$U\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad W\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \mathbb{R}U \qquad G = \mathbb{R}V + \mathbb{R}W = \operatorname{Vect}(V, W)$$

Cette démonstration est plus courte que celle consistant à vérifier les

deux inclusions $G \subset \operatorname{Vect}(V, W)$ et $\operatorname{Vect}(V, W) \subset G$.

• Pour justifier que les sous-espaces F et G sont supplémentaires il suffit de vérifier $F \cap G \subset \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ l'inclusion réciproque provient du fait que l'intersection $F \cap G$ de sous-espaces est un sous-espace et contient le vecteur nul :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ x = 2z \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x = y = z = 0 \qquad F \cap G \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Le théorème des quatre dimensions associé au calcul de dimension précédent termine la démonstration car $F + G$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 :

$$F \cap G = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\} \qquad \dim(F \cap G) = 0$$

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 1 + 2 - 0 = 3$$

$$F + G \subset \mathbb{R}^3 \text{ ET } \dim(F+G) = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Longrightarrow F + G = \mathbb{R}^3$$

$$\text{donc } F \oplus G = \mathbb{R}^3$$

• Tout couple (f, g) d'endomorphismes sur un espace de dimension finie E vérifie cet encadrement :

$$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$

• L'inégalité $\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$ provient de cette inclusion usuelle. Soit $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im}(f+g)$, il existe $\boldsymbol{u} \in E$ vérifiant ces propositions, d'ou l'inclusion recherchée et les égalités de dimension :

$$\boldsymbol{v} = (f+g)(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}) + g(\boldsymbol{u}) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$$

$$\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \qquad \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$

• La seconde inéquation repose sur l'égalité $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(-f)$ qui entraîne la propriété $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(-f)$:

$$\forall \boldsymbol{u} \in E \quad (-f)(\boldsymbol{u}) = f(-\boldsymbol{u}) \qquad \operatorname{Im}(-f) \subset \operatorname{Im} f$$

$$\forall \boldsymbol{u} \in E \quad f(\boldsymbol{u}) = (-f)(-\boldsymbol{u}) \qquad \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(-f) \qquad \operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(-f)$$

Les égalités $f = (f+g) - g$ et $g = (f+g) - f$ associée à la propriété précédente terminent la preuve :

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}((f+g)+(-g)) \leq \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(-g) = \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg} g$$
$$\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g \leq \operatorname{rg}(f+g)$$
$$\operatorname{rg} g = \operatorname{rg}((f+g)+(-f)) \leq \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(-f) = \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg} f$$
$$-(\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g) = \operatorname{rg} g - \operatorname{rg} f \leq \operatorname{rg}(f+g)$$

En conclusion $|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g|$ est de valeur $\pm(\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g)$ et vérifie l'inégalité recherchée :

$$\operatorname{rg}(f+g) \leq |\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g|$$

• Tout couple (f, g) d'endomorphismes sur un espace E de dimension finie n vérifie cet encadrement :

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n \leq \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$

• Les inclusions usuelles $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ et $\ker f \subset \ker(g \circ f)$ démontrent, par le théorème du rang, une première inégalité :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} g$$
$$\ker f \subset \ker(g \circ f) \qquad \dim(\ker f) \leq \dim(\ker(g \circ f))$$
$$\operatorname{rg}(g \circ f) = n - \dim(\ker(g \circ f) \leq n - \dim \operatorname{Im} f = n - \operatorname{rg} f$$
$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} f \qquad \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} g \qquad \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$

• Dans l'espace de dimension finie E ces propositions sont équivalentes :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \ker f = \ker f^2 \iff \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}_E\}$$
$$\iff \ker f + \operatorname{Im} f = E \iff \ker f \oplus \operatorname{Im} f = E.$$

• La première équivalence provient du théorème du rang et de ces inclusions usuelles :

$$\boldsymbol{u} \in \ker f \Longrightarrow f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E$$
$$\Longrightarrow (f \circ f)(\boldsymbol{u}) = f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_E \qquad \ker f \subset \ker(f \circ f)$$
$$\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im}(f \circ f) \Longrightarrow \big(\exists\, \boldsymbol{u} \in E \quad (f \circ f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}\big)$$
$$\Longrightarrow \big(\exists\, \boldsymbol{u} \in E \quad f(f(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{w}\big)$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f \qquad \operatorname{Im}(f \circ f) \subset \operatorname{Im} f$$

$$\dim E = \dim(\ker f) + \operatorname{rg} f = \dim(\ker(f \circ f)) + \operatorname{rg}(f \circ f)$$
$$\dim(\ker f) - \dim(\ker(f \circ f)) = \dim(\operatorname{Im}(f \circ f)) - \dim(\operatorname{Im} f)$$
$$\dim(\ker f) = \dim(\ker(f \circ f)) \iff \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Im}(f \circ f))$$

Les inclusions précédentes associées à l'égalité des dimensions démontre cette première équivalence :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \ker f = \ker f^2$$

• Supposons $\ker f = \ker f^2$ et montrons $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}_E\}$.
D'une part l'inclusion $\{\mathbf{0}_E\} \subset \ker f \cap \operatorname{Im} f$ est vérifiée par tout sous-espace vectoriel.
Réciproquement soit $\boldsymbol{v} \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, donc $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f$ est de la forme $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u})$, et par ailleurs $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E$:

$$(f \circ f)(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E \qquad \boldsymbol{u} \in \ker f^2 = \ker f \qquad \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_E$$

Ainsi $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E$ et $\ker f \cap \operatorname{Im} f \subset \{\mathbf{0}_E\}$.

• Le théorème des quatre dimensions et le théorème du rang justifient que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}_E\}$ de dimension nulle entraîne l'égalité $\ker f + \operatorname{Im} f = E$:

$$\dim(\ker f + \operatorname{Im} f) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) - \dim(\ker f \cap \operatorname{Im} f)$$
$$= \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) - 0 = \dim E$$

L'inclusion et l'égalité des dimensions prouvent l'égalité recherchée :

$$\ker f + \operatorname{Im} f \subset E \ \textsf{ET}\ \dim(\ker f + \operatorname{Im} f) = \dim E$$
$$\Longrightarrow \ker f + \operatorname{Im} f = E$$

• L'égalité $\ker f + \operatorname{Im} f = E$ entraine $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ en décomposant $\boldsymbol{u} \in E$ sur $\ker f + \operatorname{Im} f$ puis en calculant $f(\boldsymbol{u})$.
Toute application linéaire vérifie l'inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
Réciproquement soit $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f$, alors $\boldsymbol{w}$ est de la forme $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ et $\boldsymbol{v} \in E = \ker f + \operatorname{Im} f$ peut s'exprimer par $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}''$ où $\boldsymbol{v}' \in \ker f$ et $\boldsymbol{v}'' \in \operatorname{Im} f$, de même $\boldsymbol{v}''$ est de la forme $\boldsymbol{v}'' = f(\boldsymbol{u})$:

$$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}'') = f(\boldsymbol{v}') + f(\boldsymbol{v}'')$$
$$= \mathbf{0}_E + f(f(\boldsymbol{u})) = (f \circ f)(\boldsymbol{u})$$

• Les implications suivantes ont été démontrées :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \ker f = \ker f^2$$
$$\ker f = \ker f^2 \Longrightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}_E\}$$
$$\Longrightarrow \ker f + \operatorname{Im} f = E$$
$$\Longrightarrow \ker f = \ker f^2$$

Le théorème du rang démontre l'équivalence de la dernière propriété :

$$\ker f + \operatorname{Im} f = E \Longrightarrow \ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$$
$$\dim(\ker f \cap \operatorname{Im} f) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) - \dim(\ker f + \operatorname{Im} f)$$
$$= \dim E - \dim E = 0$$
$$\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}_E\}$$

L'implication réciproque est évidente.