LES MATRICES

Généralités sur les matrices

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ est un corps, généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; $\lambda\in\mathbb{K}$, et les entiers m, n, p et q sont strictements positifs.

L'espace vectoriel des matrices

• Une matrice A de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est représentée sous la forme d'un tableau de scalaires de $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes :

$$A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p}\end{pmatrix}$$

• Une matrice A de type (n,p) peut aussi être considérée comme une application de $\{1\cdots n\}\times\{1\cdots p\}$ dans $\mathbb{K}$; en effet toute application A de $\{1\cdots n\}\times\{1\cdots p\}$ dans $\mathbb{K}$ peut bien être définie par l'énumération des images $A(i,j)=a_{i,j}$ de tous les indices (i,j) :

$$\begin{aligned} A:\{1\cdots n\}\times\{1\cdots p\} &\longrightarrow \mathbb{K}\\ (i,j)&\longmapsto a_{i,j}\end{aligned}$$

• Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes, et si tous leurs coefficients sont égaux deux à deux.

• L'ensemble des matrices de type (n,p) sur $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et forme un espace vectoriel pour les opérations coefficient par coefficient :

$$A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}\qquad B=(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$$

$$\begin{aligned} A+B&=\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p}\\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,p}+b_{2,p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p}\end{pmatrix}\\ &=(a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}\end{aligned}$$

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,p}\\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{n,1} & \lambda a_{n,2} & \cdots & \lambda a_{n,p}\end{pmatrix}=(\lambda a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$$

• Ces calculs coordonnée par coordonnée sur les matrices est similaire aux opérations sur l'espace vectoriel produit $\mathbb{K}^{np}$, quitte à choisir une présentatation sous la forme d'un tableau de scalaires plutôt que sous la forme d'une liste de nombre.
L'addition et la multiplication des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire vérifient les propositions caractéristiques des espaces vectoriels.

• Une autre preuve de la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ consiste à considérer une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme une application de $\{1\cdots n\}\times\{1\cdots p\}$; l'addition de deux matrices correspond à la somme de deux applications de $\{1\cdots n\}\times\{1\cdots p\}$ dans $\mathbb{K}$:

$$A:\{1\cdots n\}\times\{1\cdots p\}\to\mathbb{K}\qquad B:\{1\cdots n\}\times\{1\cdots p\}\to\mathbb{K}$$
$$C=A+B:\{1\cdots n\}\times\{1\cdots p\}\to\mathbb{K}$$
$$\begin{aligned}\forall\,(i,j)\in\{1\cdots n\}\times\{1\cdots p\}\quad c_{i,j}&=C(i,j)=(A+B)(i,j)\\ &=A(i,j)+B(i,j)=a_{i,j}+b_{i,j}\end{aligned}$$

La méthode est la même pour le produit par un scalaire. Ceci prouve directement que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})=\mathbb{K}^{\{1\cdots n\}\times\{1\cdots p\}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les opérations coordonnée par coordonnée.

• Les propriétés de la matrice nulle et de l'opposée d'une matrice découlent de la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$(0)_{n,p}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\qquad -A=\begin{pmatrix}-a_{1,1}&-a_{1,2}&\cdots&-a_{1,p}\\-a_{2,1}&-a_{2,2}&\cdots&-a_{2,p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{n,1}&-a_{n,2}&\cdots&-a_{n,p}\end{pmatrix}$$

$$\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\qquad\qquad = (-1)A = (-a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$$

$$A+(0)_{n,p}=(0)_{n,p}+A=A\qquad A-A=-A+A=(0)_{n,p}$$

• La matrice $E_{r,s}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a un coefficient $1\in\mathbb{K}$ placé à l'intersection de la ligne $r\in\{1\cdots n\}$ et de la colonne $s\in\{1\cdots p\}$, et tous ses autres coefficients sont nuls :

$$E_{r,s}=(\delta_{r,i}\,\delta_{s,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}\qquad \text{avec } \delta_{x,y}=\begin{cases}1 & \text{si } x=y\\0 & \text{sinon}\end{cases}$$

• Par exemple les six matrices $E_{r,s}$ de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont les suivantes :

$$E_{1,1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad E_{1,2}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad E_{1,3}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$E_{2,1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad E_{2,2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad E_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

• La famille $(E_{r,s})_{\substack{1\le r\le n\\1\le s\le p}}$ des np matrices précédentes de type (n,p) est une base, appelée base canonique, de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))=np\qquad A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}=\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}a_{i,j}E_{i,j}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

• La combinaison linéaire des matrices obtenue par un calcul coefficient par coefficient justifie qu'une telle famille est génératrice. La décomposition suivante illustre le cas $(2,2)$:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

La matrice nulle est celle dont tous les coefficient sont nuls. La seule possibilité pour obtenir cette matrice dans la combinaison linéaire précédente est que tous les coefficients soient nuls ; ainsi la condition correspondante est $a=b=c=d=0$ dans l'espace des matrices de type $(2,2)$.

• Une matrice de type (n,n) est appelée matrice carrée d'ordre n, et l'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})=\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

• Un vecteur de $\mathbb{K}^n$ peut être considéré comme une matrice à une colonne et est appelée matrice-colonne ou vecteur-colonne : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})=\mathbb{K}^n$.
Une matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est une matrice à une seule ligne comparable à un p-uplet.
Une matrice (a) à un coefficient de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est identifiée au scalaire $a\in\mathbb{K}$.

Autres opérations sur les matrices

• La transposée d'une matrice A à n lignes et p colonnes est la matrice ${}^{\mathrm{t}}A$ à p lignes et n colonnes définie par symétrie par rapport à la diagonale principale de A :

$$A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\cdots&a_{1,p}\\a_{2,1}&a_{2,2}&\cdots&a_{2,p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n,1}&a_{n,2}&\cdots&a_{n,p}\end{pmatrix}\qquad {}^{\mathrm{t}}A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{2,1}&\cdots&a_{n,1}\\a_{1,2}&a_{2,2}&\cdots&a_{n,2}\\\vdots&\vdots&\swarrow\!\!\!\nearrow&\vdots\\a_{1,p}&a_{2,p}&\cdots&a_{n,p}\end{pmatrix}$$

$$=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\qquad =(a_{j,i})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le n}}\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

• Il est souvent judicieux de présenter les calculs sur la transposée d'une matrice $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à l'aide d'une nouvelle matrice $T={}^{\mathrm{t}}A\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$:

$$T=(t_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le n}}={}^{\mathrm{t}}A\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

$$\forall\,(i,j)\in\{1\cdots p\}\times\{1\cdots n\}\quad t_{i,j}=a_{j,i}$$

• L'application de transposition d'une matrice est linéaire et bijective de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
L'application réciproque est la transposée d'une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Ses principales propriétés sont les suivantes :

$${}^{\mathrm{t}}(A+B)={}^{\mathrm{t}}A+{}^{\mathrm{t}}B\qquad {}^{\mathrm{t}}(\lambda A)=\lambda\,{}^{\mathrm{t}}A\qquad {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A)=A$$

• Le produit matriciel de $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est la matrice $C=AB\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie ci-dessous.
Le terme en position $(i,k)\in\{1\cdots n\}\times\{1\cdots q\}$ du produit est obtenu à partir de la ligne i de la matrice A et de la colonne k de la matrice B :

$$AB = \underset{\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}} \underset{\in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})}{\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,k} & \cdots & a_{1,q} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,k} & \cdots & a_{2,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,k} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,q} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix} = C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$\forall\, (i,j) \in \{1 \cdots n\} \times \{1 \cdots q\}$

$$c_{i,k} = a_{i,1} b_{1,k} + a_{i,2} b_{2,k} + \cdots + a_{i,p} b_{p,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}$$

• Le produit d'une matrice de type $(3,2)$ par une matrice de type $(2,4)$ est une matrice de type $(3,4)$ pour laquelle il est nécessaire de calculer douze coefficients :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Une première méthode pour effectuer le produit de deux matrices de type quelconque consiste à énumérer les coefficients du produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une telle présentation doit construire effectivement une matrice ayant le nombre exact de lignes et de colonnes, et mettre en évidence la régularité des termes obtenus.

• Une seconde méthode calcule en toute généralité le coefficient $c_{i,j}$ du produit $C = AB$ et simplifie cette somme par des opérations sur

les indices. La suite du cours présente essentiellement cette méthode.

• Le produit matriciel vérifie ces propriétés dont l'associativité et la distributivité lorsque les nombres de lignes et de colonnes des matrices A, B et C permettent de définir ces opérations :

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB) \qquad (AB)C = A(BC) \qquad {}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$$
$$(A+B)C = AC + BC \qquad A(B+C) = AB + AC$$

L'associativité du produit matriciel autorise la notation ABC à la place de $(AB)C = A(BC)$.

• Les expressions matricielles $(A+B)C$ et $AC + BC$ sont licites lorsque $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le résultat est dans les deux cas de type (n,q).

Les coefficients $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ en position $(i,j) \in \{1 \cdots n\} \times \{1 \cdots q\}$ des matrices $X = (A+B)C$ et $Y = AC + BC$ sont égaux ; d'où l'égalité matricielle $(A+B)C = AC + BC$:

$$x_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} (a_{i,k} + b_{i,k}) c_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} c_{k,j} + \sum_{k=1}^{p} b_{i,k} c_{k,j} = y_{i,j}$$

• La preuve de ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$ lorsque $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est similaire. Ainsi $X = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, les matrices $Y = {}^{\mathrm{t}}(AB)$ et $Z = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$ sont de type (q,n), et les coefficients $y_{i,j}$ et $z_{i,j}$ sont égaux :

$$x_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \qquad z_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k} b_{k,i} = y_{i,j} = x_{j,i}$$

• La démonstration de l'associativité du produit combine les manipulations usuelles des sommes, dont en particulier la distributivité ; dans la suite $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $X = (AB)C$, $Y = A(BC)$ et $(i,\ell) \in \{1 \cdots m\} \times \{1 \cdots q\}$:

$$\begin{aligned}
x_{i,\ell} &= \sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k}\Big)c_{k,\ell} && \text{par définition des produits } (AB)C\\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k}c_{k,\ell} && \text{par distributivité des produits par } c_{k,\ell}\\
&= \sum_{\substack{1\le j\le n\\1\le k\le p}} a_{i,j}b_{j,k}c_{k,\ell} && \text{somme de } np \text{ termes pour des indices } (j,k)\in\{1\cdots n\}\times\{1\cdots p\}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k}c_{k,\ell} && \text{par commutativité et associativité de l'addition}\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_{j,k}c_{k,\ell}\Big) && \text{par distributivité des produits par } a_{i,j}\\
&= y_{i,\ell} && \text{par définition des produits } A(BC)
\end{aligned}$$

• Le produit de matrices n'est pas commutatif : les types des matrices A et B ne coïncident pas nécessairement pour calculer à la fois AB et BA.
Dans le cas de matrices carrées A et B de même ordre, les deux produits AB et BA sont certes bien définis mais ne sont nécessairement égaux :

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$
$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\5&3\end{pmatrix}\qquad BA=\begin{pmatrix}0&1\\2&4\end{pmatrix}\neq AB$$

• Le produit matriciel n'est pas régulier et ne permet pas de simplifier les équations matricielles de la même façon que les équations numériques :

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \text{ pour } A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$AB=AC=\begin{pmatrix}2&2\\4&4\end{pmatrix} \text{ si } A=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\neq C=\begin{pmatrix}2&4\\2&2\end{pmatrix}$$

• La matrice unité d'ordre n notée $\mathbb{1}_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice dont les n termes diagonaux sont un, et dont tous les autres sont nuls :

$$\mathbb{1}_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}=(\delta_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
$$\mathbb{1}_nA=A\mathbb{1}_p=A \quad\text{lorsque } A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

L'algèbre des matrices carrées

Ce paragraphe étudie les matrices carrées d'ordre n.

• L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et un anneau unitaire pour le produit matriciel dont l'élément unité est $\mathbb{1}_n$; il possède donc une structure d'algèbre unitaire.
Cette algèbre n'est pas commutative dès que $n\geq 2$;

• Le premier paragraphe du cours a démontré la structure d'espace vectoriel de l'espace des matrices d'un type donnée, et le paragraphe précédent a justifié les propositions vérifiée par le produit sur l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Cet exemple justifie que l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif :

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

Ces matrices d'ordre $n\geq 2$ sont définies par blocs à partir des matrices d'ordre 2 précédentes et de la matrice unité d'ordre $n-2$. Le produit suivant justifie que le produit de matrices carrés n'est pas commutatif ; il peut dépendre de l'ordre des facteurs :

$$A=\left(\begin{array}{cc|cccc}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&0&\cdots&0\\\hline 0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)\qquad B=\left(\begin{array}{cc|cccc}1&0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&0&\cdots&0\\\hline 0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)$$
$$AB=(0)_n\qquad BA=A\neq(0)_n$$

• La matrice inverse d'une matrice carrée A d'ordre n est, lorsqu'elle existe, l'unique matrice notée $A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant cette égalité :

$$A\,A^{-1}=A^{-1}\,A=\mathbb{1}_n$$

• L'unicité de la matrice inverse, si elle existe, provient des propriétés générales des anneaux. Si $\widetilde{A}$ et $\widehat{A}$ sont des inverses de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'associativité du produit prouve l'unicité de l'inverse de A :

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}\mathbb{1}_n = \widetilde{A}(A\widehat{A}) = (\widetilde{A}A)\widehat{A} = \mathbb{1}_n\widehat{A} = \widehat{A}$$

• Dans le cas particulier où la matrice carrée A est inversible, une multiplication par A^{-1} permet de simplifier ces équations :

$$\begin{aligned} AB = AC &\Longrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \\ &\Longrightarrow B = \mathbb{1}_nB = \mathbb{1}_nC = C \\ BA = CA &\Longrightarrow BAA^{-1} = CAA^{-1} \\ &\Longrightarrow B = B\mathbb{1}_n = C\mathbb{1}_n = C \end{aligned}$$

• La trace d'une matrice carrée est la somme de ses termes diagonaux :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} \qquad \text{quand } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

• La trace est une forme linéaire — c'est-à–dire une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$ — et ses principales propriétés sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A+B) &= \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B & \operatorname{tr}(\lambda A) &= \lambda \operatorname{tr} A \\ \operatorname{tr}\left({}^{\mathrm{t}}A\right) &= \operatorname{tr} A & \operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(BA) \end{aligned}$$

• La linéarité de la trace et l'identité $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}A)$ proviennent de la définition même.

• L'égalité $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ est vérifiée dès que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$; dans ce cas les produits $X = AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y = BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sont bien définis mais ne sont pas de même type :

$$x_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j} \qquad y_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,j}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} x_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,i} = \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le p}} a_{i,k}b_{k,i} \\ &= \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le p}} b_{k,i}a_{i,k} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k} = \sum_{k=1}^{p} y_{k,k} = \operatorname{tr}(BA) \end{aligned}$$

Ces manipulations de sommes reposent sur essentiellement sur l'associativité et la commutativité de l'addition.

Matrices carrées particulières

Matrices symétriques et anti-symétriques

• Une matrice carrée $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique lorsque ${}^{\mathrm{t}}S = S$:

$$S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{1,2} & s_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & s_{n-1,n} \\ s_{1,n} & \cdots & s_{n-1,n} & s_{n,n} \end{pmatrix} \quad \forall\,(i,j) \in \{1\cdots n\}^2 \quad s_{i,j} = s_{j,i}$$

$$\begin{array}{cccc} s_{1,2} = s_{2,1} & s_{2,3} = s_{3,2} & \cdots & s_{n-1,n} = s_{n,n-1} \\ s_{1,3} = s_{3,1} & \cdots & & \\ \cdots & s_{2,n} = s_{n,2} & & \\ s_{1,n} = s_{n,1} & & & \end{array}$$

• Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est anti-symétrique dans le cas où ${}^{\mathrm{t}}A = -A$:

$$\begin{array}{cccc} a_{1,2} = -a_{2,1} & a_{2,3} = -a_{3,2} & \cdots & a_{n-1,n} = -a_{n,n-1} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{1,n} = -a_{n,1} & a_{2,n} = -a_{n,2} & \forall\,(i,j) \in \{1\cdots n\}^2 & a_{i,j} = -a_{j,i} \end{array}$$

• Dans tout corps $\mathbb{K}$ tel que $2 \neq 0$, par exemple $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, les coefficients diagonaux d'une matrice anti-symétrique sont nuls :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ -a_{1,n} & \cdots & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$
$$a_{1,1} = a_{2,2} = \cdots = a_{n,n} = 0$$

En effet $a_{i,i} = -a_{i,i}$, donc $2a_{i,i} = 0$ puis $a_{i,i} = 0$ lorsque $2 \neq 0$.

• L'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices anti-symétriques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Les applications φ et ψ ci-dessous sont des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par construction $\ker\varphi = \mathcal{S}$ et $\ker\psi = \mathcal{A}$. Ainsi $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad & \psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M &\longmapsto M - {}^{\mathrm{t}}M & M &\longmapsto M + {}^{\mathrm{t}}M\end{aligned}$$

• Dans tout corps $\mathbb{K}$ tel que $2 \neq 0$ les sous-espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ des matrices symétriques et anti-symétriques sont supplémentaires : $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• La décomposition suivante d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ justifie la somme $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par deux inclusions ; tous les sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient l'inclusion $\mathcal{S} + \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$M + {}^{\mathrm{t}}M \in \mathcal{S} \qquad M - {}^{\mathrm{t}}M \in \mathcal{A} \qquad \mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$M = \frac{1}{2}(M + {}^{\mathrm{t}}M) + \frac{1}{2}(M - {}^{\mathrm{t}}M) \in \mathcal{S} + \mathcal{A} \qquad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{S} + \mathcal{A}.$$

L'intersection de deux sous-espaces de matrices contient la matrice nulle, ainsi $\{(0)_n\} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$; les implications suivantes justifient l'inclusion réciproque :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A} &\Longrightarrow M = {}^{\mathrm{t}}M = -{}^{\mathrm{t}}M \\ &\Longrightarrow m_{i,j} = m_{j,i} = -m_{i,j} \\ &\Longrightarrow 2m_{i,j} = 0 \\ &\Longrightarrow m_{i,j} = 0 \\ &\Longrightarrow M = (0)_n \qquad \mathcal{S} \cap \mathcal{A} \subset \{(0)_n\} \end{aligned}$$

En conclusion les sous-espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires.

Matrices triangulaires

• Une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure lorsque les seuls coefficients non nuls sont au-dessus ou à droite de la diagonale :

$$R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\forall (i,j) \in \{1 \cdots n\}^2 \quad i > j \Longrightarrow r_{i,j} = 0$$

• L'ensemble $\mathcal{R}$ des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est stable par produit : le produit de deux matrices triangulaires supérieures et une matrice triangulaire supérieure.

En outre les termes diagonaux du produit de deux telles matrices sont les produits des termes diagonaux.

• L'ensemble $\mathcal{R}$ est par construction un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; l'ensemble $\mathcal{R}$ contient la matrice nulle $(0)_n$ et est donc non vide.

Enfin l'ensemble $\mathcal{R}$ est stable par combinaison linéaire, en effet si R et R' sont deux matrices triangulaires supérieures alors $\lambda R + \mu R'$ est une matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{aligned} & \forall (i,j) \in \{1 \cdots n\}^2 \quad i > j \Longrightarrow r_{i,j} = 0 \\ \text{et} \quad & \forall (i,j) \in \{1 \cdots n\}^2 \quad i > j \Longrightarrow r'_{i,j} = 0 \\ \text{donc} \quad & \forall (i,j) \in \{1 \cdots n\}^2 \quad i > j \Longrightarrow \lambda r_{i,j} + \mu r'_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

Si R et R' sont deux matrices triangulaires supérieures et $i < j$ le coefficient $x_{i,j}$ du produit $X = RR'$ est nul :

$$x_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} r_{i,k} r'_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} r_{i,k} r'_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} r_{i,k} r'_{k,j} = 0 + 0 = 0$$

La première somme est nulle car $r_{i,k} = 0$ dès que $i > k$, et la seconde est aussi car $k \leq i < j$ entraine $r'_{k,i} = 0$.

Sur le même principe le terme diagonal en position i de RR' est $r_{i,i} r'_{i,i}$:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} r_{i,k} r'_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} r_{i,k} r'_{k,i} + r_{i,i} r'_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} r_{i,k} r'_{k,j} \\ &= 0 + r_{i,i} r'_{i,i} + 0 = r_{i,i} r'_{i,i} \end{aligned}$$

• Une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure est la transposée d'une matrice triangulaire supérieure :

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \ell_{n,1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & \ell_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\forall (i,j) \in \{1 \cdots n\}^2 \quad i < j \Longrightarrow \ell_{i,j} = 0$$

• L'ensemble $\mathcal{L}$ des matrices triangulaires inférieures est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par produit et les termes diagonaux du produit de deux telles matrices sont les produits des termes diagonaux.

• Une démonstration similaire à celle des matrices triangulaires supérieures est possible.
Une autre méthode consiste à remarquer qu'une matrice triangulaire inférieure est la transposée d'une triangulaire supérieure, ainsi $\mathcal{L} = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{R}$. Donc $\mathcal{L}$ est l'image par l'application linéaire transposée du sous-espace $\mathcal{R}$ et est donc un sous-espace vectoriel. De même $\mathcal{R} = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{L}$.
Si L et L' sont deux matrices triangulaires inférieures alors la transposée de LL' est triangulaire supérieure car ${}^{\mathrm{t}}L$ et ${}^{\mathrm{t}}L'$ le sont, et LL' est donc triangulaire inférieure :

$$ {}^{\mathrm{t}}(LL') = ({}^{\mathrm{t}}L')({}^{\mathrm{t}}L) \in \mathcal{R} \qquad LL' \in \mathcal{L} $$

De même le coefficient diagonal en position i de LL' est celui de ${}^{\mathrm{t}}(LL') = ({}^{\mathrm{t}}L')({}^{\mathrm{t}}L)$ qui est $\ell_{i,i}\ell'_{i,i}$.

Matrices diagonales

• Une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale si et seulement si les seuls coefficicents non nuls sont sur sa diagonale principale :

$$ D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix} $$

$$ = \mathrm{Diag}(d_{1,1}, d_{2,2}, \cdots, d_{n,n}) \qquad \mathbb{1}_n = \mathrm{Diag}(1, 1, \cdots, 1) $$

$$ \forall\, (i,j) \in \{1 \cdots n\}^2 \quad i \neq j \Longrightarrow d_{i,j} = 0 $$

• L'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonales d'ordre n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est stable par produit.

• Les sous-espaces $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{D}$ vérifient ces propriétés :

$$ \mathcal{L} + \mathcal{R} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{D} $$

$$ {}^{\mathrm{t}}\mathcal{L} = \left\{ {}^{\mathrm{t}}M \;\big/\; M \in \mathcal{L} \right\} = \mathcal{R} \qquad {}^{\mathrm{t}}\mathcal{R} = \mathcal{L} $$

Toute matrice diagonale est symétrique : $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.

• L'ensemble des matrices diagonales est l'intersection des sous-espaces des matrices triangulaires supérieures et inférieures et est donc un sous-espace vectoriel.

• Le produit de deux matrices diagonales est commutatif et les termes diagonaux d'un produit sont obtenus par produit des termes diagonaux.

Une matrice diagonale est inversible si et seulement si aucun terme diagonal est nul, dans ce cas la matrice inverse est la matrices diagonales des inverses des coefficients .

$$ \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d'_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d'_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d'_{n,n} \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} d_{1,1}d'_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{2,2}d'_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n}d'_{n,n} \end{pmatrix} $$

$$ \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{2,2}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n}^{-1} \end{pmatrix} $$

• Le produit de deux matrices triangulaires est une matrice triangulaire de même type, et donc le produit de deux matrices diagonales est une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure, donc diagonale.
Les termes diagonaux du produit de matrices diagonales, donc triangulaires, sont les produits des termes diagonaux.

Matrices et applications linéaires

Dans cette partie les espaces vectoriels E, F et G sont de dimension finie n, p et q sur un même corps $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\boldsymbol{u} \in E$, et les familles $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n \in E^n$, $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^p \in F^p$ et $\mathcal{B}_G = (\boldsymbol{w}_k)_{k=1}^q \in G^q$ sont respectivement une base de E, une de F et une de G.

Bases, coordonnées et applications linéaires

• Une fois fixée une base $\mathcal{B}_E$ de E, tout vecteur $\boldsymbol{u}$ d'un espace vectoriel E possède un unique vecteur-coordonnées $X \in \mathbb{K}^n$, et réciproquement à tout vecteur-coordonnées X est associé un et un seul vecteur $\boldsymbol{u}$ de E :

$$X\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{u}=x_1\boldsymbol{u}_1+x_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{u}_n=\sum_{k=1}^{n}x_k\boldsymbol{u}_k$$

• L'application φ définie ci-dessous est linéaire et bijective ; l'application réciproque φ^{-1} est celle qui à un vecteur $\boldsymbol{u}\in E$ associe son vecteur-coordonnées :

$$\begin{aligned}\varphi:\mathbb{K}^n&\longrightarrow E\\ X&\longmapsto \sum_{k=1}^{n}x_k\boldsymbol{u}_k\end{aligned}\qquad \varphi(X)=\mathbf{0}_E\iff X=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\varphi(\lambda X)=\lambda\,\varphi(X)\qquad \varphi(X+Y)=\varphi(X)+\varphi(Y)$$

Les coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs est donc la combinaison linéaire des coordonnées de ces vecteurs.

• Le vecteur $U\in\mathbb{K}^n$ coïncide avec son vecteur-coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}c=(E_k)_{k=1}^n$ de $\mathbb{K}^n$:

$$U\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}\qquad E_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\qquad E_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\qquad\cdots\qquad E_n\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$U=u_1E_1+u_2E_2+\cdots+u_nE_n=\sum_{k=1}^{n}u_kE_k$$

• Les coordonnées $X_k\in\mathbb{K}^n$ du vecteur $\boldsymbol{x}_k\in E$ dans la base $\mathcal{B}_E$ vérifient ces équivalences :

$$\begin{aligned}&(X_1,X_2,\cdots,X_m)\text{ est une famille libre de }\mathbb{K}^n\\ \iff&(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)\text{ est une famille libre de }E\\ &(X_1,X_2,\cdots,X_m)\text{ est une famille génératrice de }\mathbb{K}^n\\ \iff&(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)\text{ est une famille génératrice de }E\\ &(X_1,X_2,\cdots,X_n)\text{ est une base de }\mathbb{K}^n\\ \iff&(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)\text{ est une base de }E\end{aligned}$$

• Le chapitre sur les espaces vectoriel démontre ces deux propositions : « L'image d'une famille libre par un morphisme injectif est une famille libre » et « l'image d'une famille génératrice par un mor-

phisme surjectif est génératrice. »
Les équivalences énoncées consistent à appliquer les propriétés précédentes aux isomorphismes φ et φ^{-1}. Ainsi les propriétés des familles de vecteurs d'un espace E de dimension $\dim E=n$ et celles des familles des coordonnées de ces vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dans une base donnée sont les mêmes.

• L'application ψ définie ci-dessous pour une base $\mathcal{B}_E=(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ donnée de l'espace de départ E est linéaire et bijective :

$$\begin{aligned}\psi:\mathcal{L}(E,F)&\longrightarrow F^n\\ f&\longmapsto (f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^n=f(\mathcal{B}_E)=(f(\boldsymbol{u}_1),f(\boldsymbol{u}_2),\cdots,f(\boldsymbol{u}_n))\end{aligned}$$

Toute famille de n vecteurs de F est l'image par une et une seule application $f\in\mathcal{L}(E,F)$ de la base $\mathcal{B}_E$ de E.

• Connaître l'image par f des vecteurs d'une base $\mathcal{B}_E$ suffit pour construire le morphisme $f\in\mathcal{L}(E,F)$, cette recherche correspond à l'application ψ^{-1} :

$$\boldsymbol{u}=\sum_{k=1}^{n}x_k\boldsymbol{u}_k\in E\qquad f(\boldsymbol{u})=\sum_{k=1}^{n}x_k\,f(\boldsymbol{u}_k)\in F$$

Matrice d'une application linéaire

• Les n colonnes de la matrice $A=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)$ à p lignes de l'application linéaire $f\in\mathcal{L}(E,F)$ par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_F$ des images par f des n vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$:

$$\begin{aligned}A&=\left(\begin{array}{cc|cc}a_{1,1}&\cdots&a_{1,j}&\cdots&a_{1,n}\\a_{2,1}&\cdots&a_{2,j}&\cdots&a_{2,n}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{p,1}&\cdots&a_{p,j}&\cdots&a_{p,n}\end{array}\right)\\ &=\ \mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})\qquad \dim E=n\qquad \dim F=p\end{aligned}$$

$$f(\boldsymbol{u}_1)=a_{1,1}\boldsymbol{v}_1+a_{2,1}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{p,1}\boldsymbol{v}_p=\sum_{i=1}^{p}a_{i,1}\boldsymbol{v}_i$$

$$f(\boldsymbol{u}_j)=a_{1,j}\boldsymbol{v}_1+a_{2,j}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{p,j}\boldsymbol{v}_p=\sum_{i=1}^{p}a_{i,j}\boldsymbol{v}_i\quad\text{pour }1\le j\le n$$

• L'exemple ci-dessous illustre le lien entre une application linéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par des combinaisons linéaires de coordonnées, et la matrice de cette application dans la base canonique ; les coordonnées de cette matrice dans la base canonique sont les coefficients des combinaisons linéaires :

$$\begin{aligned} f:\quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ x+4y \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}c_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}c_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ & U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad f(U) = AU \end{aligned}$$

• Les coefficients de la matrice d'une application linéaire f de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ correspond aux coefficients des combinaisons des vecteurs :

$$\begin{aligned} f:\qquad \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^p \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{pmatrix} = AX \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}} = [C_1, C_2, \cdots C_n] \\ &= \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}c_{\mathbb{K}^p}, \mathcal{B}c_{\mathbb{K}^n}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \qquad f(E_j) = C_j \end{aligned}$$

La colonne $C_j \in \mathbb{K}^p$ d'ordre j de A est l'image du j-ème vecteur E_j de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ car les coordonnées vecteur $U \in \mathbb{K}^p$ dans la base canonique est ce vecteur U.

• Pour cette raison l'algèbre linéaire identifie régulièrement une matrice A avec l'application linéaire $f : X \mapsto AX$ car la matrice de f par rapport aux base canonique est la matrice A, par abus de notation le noyau et l'image de la matrice A sont en fait $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$.

• Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ il existe une et une seule application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$. Les colonnes de la matrice A définissent f par l'intermédiaire des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$.

• Une fois les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, l'application ψ^{-1} justifie qu'il existe une unique application linéaire f telle les images des vecteurs de la

base $\mathcal{B}_E$ soient des vecteurs données. Il suffit dans ce cas de choisir les vecteurs dont les vecteurs-coordonnées dans la base $\mathcal{B}_F$ sont les vecteurs-colonnes de la matrice A.
Par construction la matrice de f par rapport aux base $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est A.

• Les n colonnes $(C_j)_{j=1}^n$ de la matrice $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (C_1, C_2, \cdots, C_n) \text{ est une famille libre dans } \mathbb{K}^p &\Longleftrightarrow f \text{ est injective} \\ (C_1, C_2, \cdots, C_n) \text{ est génératrice de } \mathbb{K}^p &\Longleftrightarrow f \text{ est surjective} \\ (C_1, C_2, \cdots, C_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^p &\Longleftrightarrow f \text{ est bijective} \end{aligned}$$

• La démonstration de ce théorème repose sur ces équivalences dont la première est appliquée à la base $\mathcal{B}_E$ et la seconde à la base $\mathcal{B}_F$:

$$\begin{aligned} & f \text{ est injective} \\ \Longleftrightarrow\ & (f(\boldsymbol{u}_1), \cdots, f(\boldsymbol{u}_n)) \text{ est libre dans } F \\ \Longleftrightarrow\ & (C_1, \cdots, C_n) \text{ est libre dans } \mathbb{K}^p \end{aligned}$$

En effet l'application linéaire f est injective si et seulement si l'image par f d'une base est libre, ici la base $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$, et d'autre part la famille $(f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \cdots, f(\boldsymbol{u}_n))$ dans la base $\mathcal{B}_F$ est libre si et seulement si ses vecteurs-coordonnées $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ est libre.
La méthode est la même pour les applications surjectives :

$$\begin{aligned} & f \text{ est surjective} \\ \Longleftrightarrow\ & (f(\boldsymbol{u}_1), \cdots, f(\boldsymbol{u}_n)) \text{ est génératrice dans } F \\ \Longleftrightarrow\ & (C_1, \cdots, C_n) \text{ est génératrice de } \mathbb{K}^p \end{aligned}$$

La combinaison de ces deux équivalence justifie la dernière.

• Calculer la matrice de l'opérateur de dérivation dans l'espace vectoriel engendré par les deux fonctions trigonométriques sin et cos.

• L'application δ de dérivation est une application linéaire bien définie sur le sous-espace $E = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ des applications dérivables $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$.
La famille $\mathcal{B} = (\sin, \cos)$ est par construction une famille génératrice de E, et une famille libre de E car ces deux applications ne sont pas proportionnelles :

$$\begin{aligned} \delta : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto f' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta(\sin) &= \cos \\ \delta(\cos) &= -\sin \end{aligned} \qquad \mathrm{mat}(\delta, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul matriciel

Image d'un vecteur

• Les coordonnées de $f(\boldsymbol{u})\in F$ dans la base $\mathcal{B}_F$ sont $AX\in\mathbb{K}^p$ lorsque $X\in\mathbb{K}^n$ représente les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{u}\in E$ dans la base $\mathcal{B}_E$, et $A=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est la matrice de f par rapport à ces deux bases :

$$X\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\qquad Y\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_p\end{pmatrix}\qquad \begin{array}{l}Y=AX\\ \boldsymbol{u}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k\boldsymbol{u}_k\qquad f(\boldsymbol{u})=\sum_{k=1}^{p}y_k\boldsymbol{v}_k\end{array}$$

• La définition — et l'intérêt — du produit matriciel justifie ce résultat obtenus à partir des combinaisons linéaires ; les coordonnées de Y sont obtenues par identification et correspondent aux coordonnées du produit matriciel AX :

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{u}_j)&=\sum_{i=1}^{p}a_{i,j}\boldsymbol{v}_i && \text{par définition de } A\\
f(\boldsymbol{u})&=f\Big(\sum_{j=1}^{n}x_j\boldsymbol{u}_j\Big)=\sum_{j=1}^{n}x_j\,f(\boldsymbol{u}_j)=\sum_{j=1}^{n}\Big(x_j\sum_{i=1}^{p}a_{i,j}\boldsymbol{v}_i\Big)\\
&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p}x_ja_{i,j}\boldsymbol{v}_i=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\boldsymbol{v}_i=\sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\Big)\boldsymbol{v}_i\\
&=\sum_{k=1}^{p}y_k\boldsymbol{v}_k && \text{par définition de } Y\\
y_i&=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\text{par identification des coordonnées, } AX=Y
\end{aligned}$$

Combinaison linéaire d'applications

• Lorsque f et g sont deux morphismes de $\mathcal{L}(E,F)$ les matrices de $f+g$ et de λf par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\mathrm{mat}(f+g,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)&=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)+\mathrm{mat}(g,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)\\ \mathrm{mat}(\lambda f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)&=\lambda\,\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)\end{aligned}$$

Autrement dit la matrice d'une combinaison linéaire de morphismes est la combinaison linéaire des matrices de ces applications linéaires

par rapport aux deux mêmes bases.

• Les colonnes $C_j\in\mathbb{K}^p$ et $C'_j\in\mathbb{K}^p$ des matrices $\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)$ et $\mathrm{mat}(g,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)$ sont les coordonnées de $f(\boldsymbol{u}_j)$ et $g(\boldsymbol{u}_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.
Le vecteur-coordonnée dans la base $\mathcal{B}_F$ de $(f+g)(\boldsymbol{u}_j)=f(\boldsymbol{u}_j)+g(\boldsymbol{u}_j)$ est donc la somme $C_j+C'_j$ de ces vecteurs-coordonnées ; ainsi les colonnes de la matrice $\mathrm{mat}(f+g,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)$ sont les sommes des colonnes des matrices de f et de g. Ces égalités des n colonnes des matrices prouvent $\mathrm{mat}(f+g,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)+\mathrm{mat}(g,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)$.
La méthode est la même pour le produit par une constante λ.

• Pour des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ données, l'application mat est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, cette application est linéaire et bijective :

$$\begin{aligned}\mathrm{mat}:\mathcal{L}(E,F)&\longrightarrow\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})\\ f&\longmapsto\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)\end{aligned}$$
$$\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)=(0)_{n,p}\Longleftrightarrow f=0_{E\to F}$$

• La propriété précédente justifie la linéarité de l'application mat.
Une propriété du paragraphe des matrices énonce que pour toute matrice A il existe une application linéaire f de matrice A ; l'application mat est donc surjective.
Si une application f est dans le noyau ker mat alors, par définition du noyau, $\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)=(0)_{p,n}$, donc l'image des vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$ est le vecteur nul $\mathbf{0}_F$ de coordonnées nulles. Ainsi l'image d'un vecteur quelconque de E est donc une combinaison linéaire des images des vecteurs de la base et est le vecteur nul ; par ailleurs $0_{E\to F}\in\ker\mathrm{mat}$. En conclusion $\ker\mathrm{mat}=\{0_{E\to F}\}$, et l'application linéaire mat est injective.
Un seul de deux derniers arguments suffit pour montrer que l'application mat est un isomorphisme une fois remarqué l'égalité des dimensions :

$$\dim\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})=pn=\dim E\times\dim F=\dim(\mathcal{L}(E,F))$$

Composition d'applications linéaires

• Lorsque $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et les q colonnes de $B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont des vecteurs de $\mathbb{K}^p$ notés $(C_j)_{j=1}^q$, la colonne $k\in\{1\cdots q\}$ de AB est $AC_k\in\mathbb{K}^n$:

$B = [C_1, C_2, \cdots, C_q] \qquad AB = [AC_1, AC_2, \cdots, AC_q] \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

• La colonne C'_j d'ordre j de AB est ce vecteur qui correspond à AC_j :

$$C_j = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix} \qquad C'j = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,j} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2,k} b_{k,j} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} b_{k,j} \end{pmatrix} = AC_j$$

• La matrice d'une application composée $g \circ f$ est le produit des matrices de ces deux applications $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ par rapport aux bases correspondantes :

$$\underset{\in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})}{\mathrm{mat}(g \circ f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G)} = \underset{\in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})}{\mathrm{mat}(g, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)} \times \underset{\in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})}{\mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}$$

• La colonne C'_j d'ordre j de $\mathrm{mat}(g \circ f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G)$ est le vecteur coordonnée de $(g \circ f)(\boldsymbol{u}_j) = g(f(\boldsymbol{u}_j))$.
Les coordoonnées de $f(\boldsymbol{u}_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ est par définition la colonne C_j d'ordre j de $\mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.
Les coordoonnées C'_j de $g(f(\boldsymbol{u}_j))$ dans la base $\mathcal{B}_G$ est le produit matriciel $\mathrm{mat}(g, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) C_j$. Ces égalités résument la démonstration :

$$\begin{aligned} \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) &= [C_1, C_2, \cdots, C_n] \\ \mathrm{mat}(g, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) &= B \\ \mathrm{mat}(g \circ f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) &= [C'_1, C'_2, \cdots, C'_n] = [BC_1, BC_2, \cdots BC_n] \\ &= \mathrm{mat}(g, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \times \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \end{aligned}$$

Application réciproque et matrice inverse

• Lorsque les espaces vectoriels E et F sont de même dimension et de bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme si et seulement si la matrice $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ est inversible.
Dans ce cas la matrice de l'isomorphisme réciproque est l'inverse de la matrice de l'isomorphisme initial :

$$\big(\mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)\big)^{-1} = \mathrm{mat}(f^{-1}, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E)$$

• Ces deux égalités proviennent de l'hypothèse $\dim E = \dim F$:

$$\mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = \mathbb{1}_n \qquad \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_F, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_F) = \mathbb{1}_n$$

Si l'application f est un isomorphisme l'application f^{-1} Ces deux produits matriciels démontrent la propriété demandée :

$$\begin{aligned} &\mathrm{mat}(f^{-1}, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) \times \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \\ &= \mathrm{mat}(f^{-1} \circ f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = \mathbb{1}_n \\ &\mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \times \mathrm{mat}(f^{-1}, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) \\ &= \mathrm{mat}(f^{-1} \circ f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_F, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_F) = \mathbb{1}_n \end{aligned}$$

$$\mathrm{mat}(f^{-1}, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)^{-1}$$

Réciproquement supposons que la matrice $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ est inversible, et notons g l'unique endomorphisme dont la matrice est $A^{-1} = \mathrm{mat}(g, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E)$. Ces compositions justifient que f est un isomorphisme et que $f^{-1} = g$:

$$\mathrm{mat}(g, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) \times \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = A^{-1}A = \mathbb{1}_n \quad g \circ f = \mathrm{Id}_E$$
$$\mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) \times \mathrm{mat}(g, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) = AA^{-1} = \mathbb{1}_n \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

En conclusion l'application f est bijective, et la matrice inverse A^{-1} est celle de l'application réciproque f^{-1} par rapport aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$.

Produits matriciels

• Le produit matriciel AX où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathbb{K}^n$ peut être obtenu de trois façon différentes :

à partir de la définition du produit matriciel,

en recherchant les coordonnées de $f(\boldsymbol{u})$ lorsque A est la matrice de f et X le vecteur-coordonnées de $\boldsymbol{u}$,

à partir des combinaisons linéaire des p colonnes $(C_k)_{k=1}^{n}$ de A :

$$X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} A &= [C_1, C_2, \cdots, C_n] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ AX &= \sum_{k=1}^{p} x_k C_k \in \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

• L'algèbre linéaire fournit plusieurs méthodes pour effectuer des produits matriciels :

deux présentations sont possibles pour décrire un produit matriciel, par la manipulation des tableaux de nombres ou par le calcul d'un indice générique ;

la matrice produit correspond à la matrice de l'application linéaire composée, l'exemple ci-dessous illustre cette méthode ;

les colonnes du produit matriciel AB sont les produits des vecteurs colonnes de B :

$$B = [C_1, C_2, C_n] \qquad AB = [AC_1, AC_2, \cdots, AC_n]$$

• Le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ noté à gauche, et le produit par un vecteur-colonne $X \in \mathbb{K}^p$ à droite ne sont pas définis de la même façon et n'ont pas les mêmes propriétés :

$$\lambda A = (0)_{n,p} \iff \lambda = 0 \text{ OU } A = (0)_{n,p}$$

$$AX = 0_{\mathbb{K}^n} \iff X \in \ker f \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{K}^p &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

Dans le premier cas une multiplication par $1/\lambda$ est possible si $\lambda \neq 0$, et n'a pas d'équivalent dans le second.

• Le produit des matrices de la base canonique peut s'effectuer en considérant les applications linéaires associées.

Cette méthode s'applique efficacement pour calculer les produits des matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en effectuant les calculs dans un espace E de dimension n et de base $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$:

$$E_{s,t}E_{p,q} = \delta_{t,p}E_{s,q} \qquad \text{où } (p,q,s,t) \in \{1 \cdots n\}^4$$

$$E_{p,q} = \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \qquad f : \boldsymbol{u}_k \mapsto \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } k \neq q \\ \boldsymbol{u}_p & \text{si } k = q \end{cases}$$

$$E_{s,t} = \operatorname{mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \qquad g : \boldsymbol{u}_k \mapsto \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } k \neq t \\ \boldsymbol{u}_s & \text{si } k = t \end{cases}$$

$$g \circ f(\boldsymbol{u}_k) = \begin{cases} g(\mathbf{0}) = \mathbf{0} & \text{si } k \neq q \\ g(\boldsymbol{u}_p) & \text{si } k = q \end{cases}$$

$$= \begin{cases} g(\mathbf{0}) = \mathbf{0} & \text{si } k \neq q \\ g(\boldsymbol{u}_p) = \mathbf{0} & \text{si } k = q \text{ et } t \neq p \\ g(\boldsymbol{u}_p) = \boldsymbol{u}_s & \text{si } k = q \text{ et } t = p \end{cases}$$

En conclusion la matrice de $g \circ f$ par rapport à la base $\mathcal{B}_E$ est donc généralement $(0)_n$, ou $E_{s,q}$ si $t = p$. La formule $E_{s,t}E_{p,q} = \delta_{t,p}E_{s,q}$ rassemble tous les cas.

Étude des matrices carrées

Ce paragraphe étudie les endomorphismes sur E et les matrices carrées d'ordre $n = \dim E$. La base de référence $\mathcal{B}$ de E est considérée à la fois comme base de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée, et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

• L'application mat est un isomorphisme de l'algèbre unitaire des endomorphismes $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ dans l'algèbre unitaire des matrices carrées $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{mat} : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{mat}(f+g, \mathcal{B}, \mathcal{B}) &= \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) + \operatorname{mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \\ \operatorname{mat}(\lambda f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) &= \lambda \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \\ \operatorname{mat}(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) &= \operatorname{mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \times \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \\ \operatorname{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}) &= \mathbb{1}_n \end{aligned}$$

L'application mat est compatible avec l'addition, la multiplication par un scalaire, la multiplication interne et l'élément unité qui caractérisent les algèbres unitaires.

• La compatibilité de l'application mat avec le produit entraîne celle des puissances :

$$\operatorname{mat}(f^n, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \left(\operatorname{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})\right)^n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

• Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est bijectif si et seulement si la matrice $\operatorname{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ est inversible ; dans ce cas l'inverse de la matrice est la matrice de l'application réciproque :

$$\left(\operatorname{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})\right)^{-1} = \operatorname{mat}(f^{-1}, \mathcal{B}, \mathcal{B})$$

• L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$; ces matrices sont caractérisées par les conditions équivalentes ci-dessous :

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) &\iff \exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = BA = \mathbb{1}_n \\ &\iff \exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = \mathbb{1}_n \\ &\iff \exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad BA = \mathbb{1}_n \end{aligned}$$

Dans tous ces cas la matrice B est unique et est notée $B = A^{-1}$.

• La première équivalence correspond à la définition même d'une matrice inversible.

Supposons $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $AB=\mathbb{1}_n$. Les matrices A et B sont les matrices d'endomorphismes f et g de $\mathcal{L}(E)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$. Ainsi $f\circ g=\mathrm{Id}_E$.
L'application composée $f\circ g$ est bijective donc surjective, et ainsi l'application f est surjective.
L'application f est surjective sur l'espace vectoriel de dimension finie E, et donc $f\in\mathcal{GL}(E)$. En conclusion la matrice A est inversible et ces produits justifient que $A^{-1}=B$:

$$A^{-1}=A^{-1}\mathbb{1}_n=A^{-1}(AB)=(A^{-1}A)B=\mathbb{1}_nB=B$$

La démonstration est analogue pour montrer que $BA=\mathbb{1}_n$ entraîne que A est inversible et $A^{-1}=B$.

• Il suffit que le produit de deux matrices carrées A et B d'ordre n soit $AB=\mathbb{1}_n$ pour que ces matrices vérifient ces propriétés :

$$A\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad A^{-1}=B \qquad B\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad B^{-1}=A$$

• Ce formulaire récapitule les propriétés usuelles de matrices A et B inversibles d'ordre n :

$$\mathbb{1}_n\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad AB\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad A^{-1}\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$$
$$\mathbb{1}_n^{-1}=\mathbb{1}_n \qquad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \qquad (A^{-1})^{-1}=A$$
$$f\in\mathcal{GL}(E)\iff A\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \text{lorsque } A=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})$$
$${}^{\mathrm{t}}A\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad ({}^{\mathrm{t}}A)^{-1}={}^{\mathrm{t}}(A^{-1})$$

• Si $A\in\mathcal{GL}(E)$ alors A^{-1} existe et la transposée de ce produit détermine l'inverse de ${}^{\mathrm{t}}A$:

$$({}^{\mathrm{t}}A)({}^{\mathrm{t}}A^{-1})={}^{\mathrm{t}}(A^{-1}A)={}^{\mathrm{t}}\mathbb{1}_n=\mathbb{1}_n$$
$$({}^{\mathrm{t}}A^{-1})({}^{\mathrm{t}}A)={}^{\mathrm{t}}(AA^{-1})={}^{\mathrm{t}}\mathbb{1}_n=\mathbb{1}_n$$

Les autres propriétés ont déjà été justifiées.

• La structure $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe pour le produit matriciel.
L'application mat : $f\mapsto\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})$ est un isomorphisme du groupe linéaire $(\mathcal{GL}(E),\circ)$ dans le groupe $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\times)$.

• Le produit matriciel restreint à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est une loi de composition interne associative, d'élément neutre $\mathbb{1}_n\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Enfin l'inverse d'une matrice inversible est bien une matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. En conclusion $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe.
La restriction de l'application mat : $\mathcal{GL}(E)\to\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est bien définie car la matrice d'un automorphisme est une matrice inversible.

Cette restriction de l'application mat est injective car restriction d'une application injective.
Cette restriction de l'application mat est surjective car l'endomorphisme associé à une matrice inversible est bijectif.

• Ces conditions sur la matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ caractérisent de façon équivalente les matrices inversibles :

$A=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\iff f\in\mathcal{GL}(E)$
$\iff$ les vecteurs-colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$
$\iff$ les vecteurs-colonnes de A forment une famille libre
$\iff$ les vecteurs-colonnes de A sont une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$
$\iff {}^{\mathrm{t}}A\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$
$\iff$ les vecteurs-lignes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$
$\iff$ les vecteurs-lignes de A forment une famille libre
$\iff$ les vecteurs-lignes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$

• Cette condition est équivalente au fait que les vecteurs-lignes de A vérifient les mêmes propositions en appliquant le même argument à ${}^{\mathrm{t}}A$. La matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si les vecteurs-colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$.

• L'ensemble des matrices carrées d'ordre $n\geq 2$ forme un anneau pour lequel la multiplication n'est pas commutative.
Dès qu'un produit matriciel $AB=BA$ commute la formule du binôme détermine $(A+B)^p$.
En particulier le produit de la matrice A avec la matrice unité $\mathbb{1}_n$ commute : $A\mathbb{1}_n=\mathbb{1}_nA=A$. Il en est de même pour les matrices $\lambda\mathbb{1}_n$.

• Calculer ainsi la puissance A^p où $p\geq 3$:

$$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0&2&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad B^2=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$A=2\mathbb{1}_3+B \qquad B^3=(0)_3 \qquad B^p=(0)_3 \quad \text{pour } p\geq 3$$
$$A^p=(B+2\mathbb{1}_3)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}B^k(2\mathbb{1}_3)^{p-k}=\sum_{k=0}^{2}\binom{p}{k}B^k(2\mathbb{1}_3)^{p-k}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^p \mathbb{1}_3 + 2^{p-1} pB + 2^{p-2}\,\frac{p(p-1)}{2} B^2 \\
&= 2^p \mathbb{1}_3 + 2^{p-1} pB + 2^{p-3} p(p-1) B^2 \\
&= \begin{pmatrix} 2^p & 2^p p & 2^{p-2} p(p+3) \\ 0 & 2^p & 2^{p-1} p \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La formule du binôme s'applique car $(2\mathbb{1}_3) \times B = B \times (2\mathbb{1}_3)$.

Matrices de changement de base

Dans ce paragraphe $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$, $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{u}'_k)_{k=1}^n$ et $\mathcal{B}'' = (\boldsymbol{u}''_k)_{k=1}^n$ sont trois bases de l'espace vectoriel E.

• Les colonnes de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ sont, par définition, les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \left(\begin{array}{cc|ccc} p_{1,1} & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & \cdots & p_{2,j} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,j} & \cdots & p_{n,n} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{où } 1 \leq j \leq n$$

$$\boldsymbol{u}'_1 = p_{1,1}\boldsymbol{u}_1 + p_{2,1}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{n,1}\boldsymbol{u}_n = \sum_{i=1}^n p_{i,1}\boldsymbol{u}_i$$

$$\boldsymbol{u}'_j = p_{1,j}\boldsymbol{u}_1 + p_{2,j}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{n,j}\boldsymbol{u}_n = \sum_{i=1}^n p_{i,j}\boldsymbol{u}_i$$

• La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de l'identité Id_E dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$; les matrices de passage vérifient ces égalités, lorsque X et X' sont les coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ d'un même vecteur de E :

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = \mathbb{1}_n$$

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} X' = X \qquad P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1} \qquad P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\,P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}$$

• La définition même de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la même que celle de la matrice de l'application identitée par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Les colonnes de la matrice sont les coordonnées de $\mathrm{Id}_E(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{u}_k$ dans la base $\mathcal{B}'$: $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$. Cette matrice est inversible car Id_E est un isomorphisme.

La relation $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} X' = X$ est donc la traduction matricielle de

$\mathrm{Id}_E(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ où X et X' sont les coordonnées de $\boldsymbol{v}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

$$X = \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) X' = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} X'$$

La méthode la même pour le produit des matrices de passage.

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\,P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} &= \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})\mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}'', \mathcal{B}') \\
&= \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}'', \mathcal{B}) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}
\end{aligned}$$

La propriété de la matrice inverse $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1}$ en découlent du produit précédent et de la propriété $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathbb{1}_n$.

• Réciproquement toute matrice inversible $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ peut être considérée comme une matrice de changement de base.

Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $A = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Les colonnes de A sont les coordonnées de vecteurs de E dans la base $\mathcal{B}$ qui constituent une base $\mathcal{B}'$ de E.

• Les matrices A et A' relativement à deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ d'un même endomorphisme f vérifient ces relations :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "A", "f"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"', "P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}"] & \mathcal{B} \\
\mathcal{B}' \arrow[r, "A'", "f"'] \arrow[u, "P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}", "\mathrm{Id}_E"'] & \mathcal{B}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
A &= \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \\
A' &= \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}') \\
A &= P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\, A'\, P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1} \\
A' &= P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1}\, A\, P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}') \\
&= \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E \circ f \circ \mathrm{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}') \\
&= \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \times \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \times \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})
\end{aligned}$$

• Cette définition caractérise les matrices semblables d'ordre n :

$$\exists\, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad A' = P^{-1} A P$$

• La relation « être semblable » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• La relation « être semblable » est réflexive, symétrique et transitive sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{array}{lll} \text{réflexive :} & A = \mathbb{1}_n A \mathbb{1}_n & \text{car } \mathbb{1}_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \text{symétrique :} & A' = P^{-1}AP \Longrightarrow PA' = AP & \\ & \Longrightarrow PA'P^{-1} = A & \\ & \Longrightarrow A = (P^{-1})^{-1}A'P^{-1} & \\ \text{transitive :} & A' = P^{-1}AP \text{ ET } A'' = Q^{-1}A'Q & \\ & \Longrightarrow A'' = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A = (PQ) & \end{array}$$

Ces trois propositions reposent sur le fait que « la matrice identité est inversible », « l'inverse d'une matrice inversible est inversible », et « le produit de deux matrices inversibles est inversible ».

• Deux matrices A et A' représentant le même endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E sont semblables :

$$A' = P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\, A\, P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \qquad A = \text{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \qquad A' = \text{mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$$

• Les colonnes de la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}c$ vers une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ sont constituées des vecteurs de $\mathcal{B}$, car les coordonnées d'un vecteur U de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique $\mathcal{B}c$ de $\mathbb{K}^n$ sont ses coefficients :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{n,1} \end{pmatrix} \qquad U_2 = \begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{n,2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad U_n = \begin{pmatrix} u_{1,n} \\ u_{2,n} \\ \vdots \\ u_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}c = (E_1, E_2, \cdots, E_n) \qquad \mathcal{B} = (U_1, U_2, \cdots, U_n)$$

$$P_{\mathcal{B}c\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} \qquad U_j = \sum_{i=1}^{n} u_{i,j} E_i$$

• La matrice de passage inverse $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}c} = P^{-1}_{\mathcal{B}c\to\mathcal{B}}$ peut être calculée colonne par colonne en décomposant les vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}c = (E_k)_{k=1}^n$ sous la forme de combinaisons linéaires des vecteurs de la base $\mathcal{B} = (U_k)_{k=1}^n$.

Exemples de matrices inverses

• Différentes méthodes permettent de déterminer l'inverse d'une matrice carrée ; les matrices de passage et les matrices d'applications linéaires permettent dans certains cas de déterminer l'inverse d'une matrices, comme l'illustrent les trois exemples suivants.

Matrice inverse par matrices de passage

• Ce premier exemple a pour but de montrer que la matrice suivante A est inversible et de calculer son inverse ; en vérifiant qu'elle correspond bien à une matrice de passage. Pour cela il suffit de vérifier que ses quatre colonnes $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3, U_4)$ constituent une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ en exprimant la base canonique $\mathcal{B}c = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ de $\mathbb{R}^4$ en fonction de ces vecteurs :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} E_1 &= U_1 \\ E_2 &= U_2 - 2U_1 \\ E_3 &= U_3 - 2E_2 - E_1 = U_3 - 2U_2 + 3U_1 \\ E_4 &= U_4 - 2E_3 - E_2 \\ &= U_4 - 2U_3 + 3U_2 + 4U_1 \end{aligned}$$

La matrice A^{-1} est la matrice de passage inverse :

$$A = P_{\mathcal{B}c\to\mathcal{B}} \in \mathcal{GL}_4(\mathbb{R}) \qquad A^{-1} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}c} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette méthode s'applique essentiellement aux matrices triangulaires qui permettent de décomposer de proche en proche les vecteurs de la base canonique.

• Le deuxième exemple est proche du précédent, il a pour but de montrer que la matrice suivante B est inversible et de calculer son inverse. Les colonnes de A forment une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^5$, et la base canonique de $\mathbb{R}^5$ est $\mathcal{B}c = (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5)$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3, U_4, U_5)$$

• Remarquer la première de ces égalités permet de montrer ensuite que cette famille $\mathcal{B}$ à cinq vecteurs est génératrice de $\mathbb{R}^5$, et forme ainsi une base de $\mathbb{R}^5$; la matrice A est donc inversible :

$$2E_1 = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + U_5$$
$$E_1 = \frac{1}{2}\left(U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + U_5\right)$$
$$E_2 = U_1 - E_1 = \frac{1}{2}\left(U_1 + U_2 - U_3 + U_4 - U_5\right)$$
$$E_3 = U_2 - E_2 = \frac{1}{2}\left(-U_1 + U_2 + U_3 - U_4 + U_5\right)$$
$$E_4 = U_3 - E_3 = \frac{1}{2}\left(U_1 - U_2 + U_3 + U_4 - U_5\right)$$
$$E_5 = U_4 - E_4 = \frac{1}{2}\left(-U_1 + U_2 - U_3 + U_4 + U_5\right)$$

La décomposition de E_1 peut aussi être obtenue en resolvant le système linéaire d'équation $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 + \lambda_4 U_4 + \lambda_5 U_5 = E_1$. Le reste du calcul se fait de la même manière, sans nécessiter la résolution de quatre autres systèmes linéaires.

La matrice B est une matrice de passage $P_{\mathcal{B}c \to \mathcal{B}}$, et la matrice B^{-1} est la matrice de passage inverse obtenue à partir des coordonnées de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$:

$$B \in \mathcal{GL}_5(\mathbb{R}) \qquad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice inverse par l'application linéaire réciproque

- La matrice $C \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ est définie ainsi :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & & n \\ 0 & 0 & 1 & & n(n-1)/2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$$

$$c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \dbinom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

- La matrice C correspond à la matrice de cette application linéaire par rapport à la base canonique de $\mathcal{B}c = (1, X, X^2, \cdots, X^n)$ dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n ; l'image de X^{k-1} par f correspond à la colonne k de C ; les coefficients de la premières lignes sont les termes constants des polynômes, et ceux de la dernière ligne, d'ordre $n+1$ représentent les monômes en X^n.

Les calculs de $g \circ f$ et de $f \circ g$ justifient que l'application f est bijective d'application réciproque g ;

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \qquad g : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$$
$$P \longmapsto P(X+1) \qquad P \longmapsto P(X-1)$$
$$f(X^{p-1}) = (X+1)^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} X^k = \sum_{k=1}^{p} \binom{p-1}{k-1} X^{k-1}$$
$$(g \circ f)(P) = g(P(X+1)) = P((X-1)+1) = P(X)$$
$$(f \circ g)(P) = f(P(X-1)) = P((X+1)-1) = P(X)$$
$$g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$$

La matrice inverse de C est donc celle de g dans la base canonique :

$$C^{-1} = D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & & (-1)^{n-1} n \\ 0 & 0 & 1 & & (-1)^{n-2} n(n-1)/2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$$
$$d_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ (-1)^{i-j} \dbinom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j \end{cases}$$