

CARDINAUX FINIS ET DÉNOMBREMENT

Les entiers naturels et les récurrences

L'ensemble des entiers naturels

- L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ des entiers naturels vérifie ces propriétés fondamentales :

toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément

ET toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément

ET $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément

Ces trois propriétés sont caractéristiques de $\mathbb{N}$ car réciproquement tout ensemble vérifiant celles-ci est, aux notations près, identique à $\mathbb{N}$.

- En particulier le plus petit et le plus grand de deux entiers $\min(n, p)$ sont bien définis et vérifient $\min(n, p) + \max(n, p) = n + p$.
- L'application $+1$ est une bijection définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et l'application réciproque est notée -1 . Ces opérations sont compatibles avec la relation $\leq$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1) - 1 = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n-1) + 1 = n$$

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad m \leq n \implies m+1 \leq n+1$$

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \quad m \leq n \implies m-1 \leq n-1$$

- L'ensemble $\mathbb{N}$ est discret, ceci correspond à la propriété suivante :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad m < n \implies m+1 \leq n$$

Théorèmes de récurrence

Dans ce paragraphe $P(n)$ et $Q(n)$ sont des prédicats dépendant de $n \in \mathbb{N}$.

Récurrence simple

- Le théorème de récurrence énonce que si le prédicat $P(0)$ est vrai, et si $P(n)$ entraîne $P(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors le prédicat $P(n)$ est vrai pour tout entier n :

$$\left. \begin{array}{l} P(0) \\ \text{ET } (\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \implies P(n+1)) \end{array} \right\} \implies (\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n))$$

Récurrence sur tous les prédécesseurs

- Un second théorème de récurrence énonce que si le prédicat $P(0)$ est vrai, et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le fait que tous les $P(k)$ soient vrais lorsque $k \leq n$ entraîne que $P(n+1)$ est vrai, alors le prédicat $P(n)$ est vrai pour tout entier n ; ces deux énoncés du théorème sont identiques :

$$\left. \begin{array}{l} P(0) \\ \text{ET } (\forall n \in \mathbb{N} \quad P(0) \text{ ET } P(1) \text{ ET } \dots \text{ ET } P(n) \implies P(n+1)) \end{array} \right\} \implies (\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n))$$

$$\left. \begin{array}{l} P(0) \\ \text{ET } (\forall n \in \mathbb{N} \quad (\forall k \in \{0 \dots n\} \quad P(k)) \implies P(n+1)) \end{array} \right\} \implies (\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n))$$

Récurrence sur deux prédécesseurs

- Le théorème de récurrence sur deux prédécesseurs énonce que si les prédicats $P(0)$ et $P(1)$ sont vrais, et si $P(n)$ et $P(n+1)$ entraînent $P(n+2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors le prédicat $P(n)$ est vrai pour tout entier n :

$$\left. \begin{array}{l} P(0) \text{ ET } P(1) \\ \text{ET } (\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \text{ ET } P(n+1) \implies P(n+2)) \end{array} \right\} \implies (\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n))$$

Les ensembles finis

Dans ce paragraphe m et n sont des entiers positifs, et ces ensembles sont définis ainsi :

$$\llbracket m, n \rrbracket = \{k \in \mathbb{N} \mid m \leq k \leq n\}$$

$$\llbracket 1, 0 \rrbracket = \emptyset \quad \llbracket 1, n+1 \rrbracket = \llbracket 1, n \rrbracket \cup \{n+1\}$$

Définition et propriétés des cardinaux finis

- S'il existe une application injective de $\llbracket 1, m \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ alors $m \leq n$; la démonstration repose sur une récurrence sur m .
- S'il existe une bijection de $\llbracket 1, m \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ alors $m = n$.
- Un ensemble E est fini si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection f de E dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Dans ce cas n est unique, appelé cardinal de E et noté $\text{card } E = n$. Ainsi $\text{card } \emptyset = 0$ peut être vue comme une illustration de cette définition pour les applications définies sur l'ensemble vide ou comme une convention cohérente.

- L'ensemble vide $\emptyset$ est fini et peut être caractérisé par cette équivalence :

$$\text{card } E = 0 \iff E = \emptyset$$

- Un ensemble fini E possède par définition un cardinal entier. Une récurrence dépendant de $\text{card } E$ permet donc de démontrer un résultat valable pour tout ensemble fini.

Cardinaux et ensembles finis

- Si E est un ensemble fini en bijection avec l'ensemble F alors F est fini et $\text{card } E = \text{card } F$.

Si E et F sont deux ensembles finis tels que $\text{card } E = \text{card } F$ alors il existe une bijection de E dans F .

- Si E est un ensemble fini et $e \notin E$ alors $E \cup \{e\}$ est un ensemble fini et $\text{card } E \cup \{e\} = \text{card } E + 1$.
- Si F est un sous-ensemble de l'ensemble fini E alors F est un ensemble fini et $\text{card } F \leq \text{card } E$; une récurrence sur $\text{card } E$ prouve l'inégalité :

$$F \subset E \text{ ET } E \text{ est fini} \implies \text{card } F \leq \text{card } E$$

- Cette propriété permet de prouver l'égalité de deux ensembles finis :

$$F \subset E \text{ ET } E \text{ est fini ET } \text{card } E = \text{card } F \implies E = F$$

Cardinaux et applications

- Si F est un ensemble fini et s'il existe une application injective de E dans F alors E est fini et $\text{card } E \leq \text{card } F$.

- Si E est un ensemble fini et s'il existe une application surjective E dans F alors F est fini et $\text{card } E \geq \text{card } F$.
- Si E et F sont des ensembles finis tels que $\text{card } E = \text{card } F$ et si f est une application de E dans F , alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Ce théorème s'applique dès que $E = F$ est un ensemble fini.

- Ce résultat ne s'étend pas aux ensembles quelconques : les applications suivantes sont l'une injective sans être surjective, et l'autre surjective sans être injective. Ceci prouve que $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini :

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} & g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n + 1 & n \longmapsto \max(n - 1, 0) \end{array}$$

Sous-ensembles d'entiers

- Tout sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ vérifie cette équivalence :
 E est un ensemble fini $\iff E$ est majoré

- Ce théorème est une autre preuve du fait que $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini, car les propriétés caractéristiques énoncent que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Opérations sur les entiers

Dans la suite de ce chapitre E , F et G sont des ensembles finis.

- La réunion de deux ensembles finis et disjoints est fini :

$$E \cap F = \emptyset \implies \text{card } (E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F$$

- Le produit cartésien de deux ensembles finis est fini :

$$\text{card } (E \times F) = \text{card } E \times \text{card } F$$

- L'ensemble des applications sur des ensembles finis est fini :

$$\text{card } (F^E) = (\text{card } F)^{\text{card } E}$$

où F^E est l'ensemble des applications de E dans F

- Ces égalités sur les cardinaux des ensembles finis peuvent aussi bien être vues comme des propriétés sur les ensembles finis, en supposant connues les opérations sur les entiers, que comme des définitions possibles de ces opérations sur les entiers.

- Le cardinal de la réunion d'ensembles finis est fini et dépend du cardinal des intersections de ces ensembles :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F - \text{card}(E \cap F)$$

$$\begin{aligned} \text{card}(E \cup F \cup G) = & \text{card } E + \text{card } F + \text{card } G \\ & - \text{card}(E \cap F) - \text{card}(E \cap G) - \text{card}(F \cap G) \\ & + \text{card}(E \cap F \cap G) \end{aligned}$$

- Les propriétés usuelles des opérations sur les entiers sont en lien avec les propriétés similaires sur les ensembles finis et leurs cardinaux, par exemple la commutativité, l'associativité et distributivité :

$$\begin{aligned} E \cup F &= F \cup E & (E \cup F) \cup G &= E \cup (F \cup G) \\ (E \cup F) \times G &= (E \times G) \cup (F \times G) \end{aligned}$$

Méthodes de dénombrement

Dénombrement usuels

Les ensembles finis vérifient ces propriétés :

$$\begin{aligned} \text{card}(E \times F) &= \text{card } E \times \text{card } F & \text{card}(F^E) &= (\text{card } F)^{\text{card } E} \\ \text{card}(E \cup F) &= \text{card } E + \text{card } F - \text{card}(E \cap F) \end{aligned}$$

Dénombrement des applications injectives

- Le nombre d'applications d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments est n^m .
- Le nombre d'applications injectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à $n \geq m$ éléments est le suivant :

$$\begin{aligned} \text{card} \{f : E \rightarrow F \mid f \text{ est injective}\} &= \frac{n!}{(n-m)!} \\ &= n(n-1) \cdots (n-m+1) \quad \text{card } E = m \quad \text{card } F = n \geq m \end{aligned}$$

Une démonstration repose sur l'énumération des des images possibles de chaque élément de E .

- L'équivalence sur les ensembles finis entre application injective et application bijective détermine le nombre d'applications bijectives sur un ensemble fini :

$$\text{card } \mathcal{S}_E = (\text{card } E)!$$

Dénombrement des sous-ensembles

- Le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à m éléments est 2^m . L'application suivante est bijective de $\{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}^E$ dans $\mathcal{P}(E)$; ψ est son application réciproque :

$$\begin{aligned} \varphi : \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}^E &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ f &\longmapsto f^{-1}(\{\mathbf{V}\}) \end{aligned} \quad \text{card}(\mathcal{P}(E)) = \text{card}(\{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}^E) = 2^{\text{card } E}$$

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}^E \\ A &\longmapsto \begin{cases} g : E \rightarrow \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\} \\ x \mapsto g(x) = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{si } x \in A \\ \mathbf{F} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

- Le nombre de sous-ensembles à m éléments d'un ensemble fini E à $\text{card } E = n \geq m$ éléments est le coefficient binomial :

$$\text{card} \{F \subset E \mid \text{card } F = m \leq n\} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

- Ce formulaire récapitule les principales propriétés des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned} \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} &= \binom{n+1}{m+1} \quad \text{avec } m < n & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= 2^n \\ n \binom{n-1}{m} &= (n-m) \binom{n}{m} = (m+1) \binom{n}{m+1} \quad \text{avec } 0 \leq m < n \end{aligned}$$

- Les coefficients binomiaux peuvent être obtenus par le triangle de Pascal où chaque terme est la somme de celui qui est au dessus et de son voisin de gauche :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array} \quad \begin{aligned} \binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 & \binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n \\ \binom{n}{2} &= \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Autres méthodes

- Le nombre n -uplets $(a_k)_{k=1}^n \in \llbracket 0, p \rrbracket^n$ strictement croissants est le même que celui des sous-ensembles à n éléments de $\llbracket 0, p \rrbracket$.

$$\text{card} \left\{ (a_k)_{k=1}^n \in \mathbb{N}^n / 0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq p \right\} = \binom{p+1}{n}$$

En effet l'énumération dans l'ordre croissant des éléments d'un ensemble d'entiers est une transformation bijective de l'ensemble de ces sous-ensembles de $\llbracket 0, p \rrbracket$ dans l'ensemble de ces familles.

- Transformer ainsi le n -uplet $(b_k)_{k=1}^n \in \mathbb{N}^n$ croissant au sens large en en la famille $(a_k)_{k=1}^n$ strictement croissante de $\llbracket 0, n+p-1 \rrbracket$ est une application bijective, d'où le nombre de telles familles d'entiers :

$$\begin{aligned} 0 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots \leq b_n \leq p & \quad a_k = b_k + k - 1 \\ 0 \leq a_1 = b_1 < a_2 = b_2 + 1 < a_3 = b_3 + 2 < \dots & \quad b_k = a_k - k + 1 \\ \dots < a_{n-1} = b_{n-1} + n - 2 < a_n = b_n + n - 1 \leq n + p - 1 & \end{aligned}$$

$$\text{card} \left\{ (b_k)_{k=1}^n / 0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \leq p \right\} = \binom{n+p}{n} = \binom{n+p}{p}$$

- Le nombre de n -uplets $(c_k)_{k=1}^n \in \mathbb{N}^n$ de somme majorée par p est le nombre de familles croissantes $(b_k)_{k=1}^n \in \llbracket 0, p \rrbracket^n$ car cette transformation est bijective :

$$b_1 = c_1 \leq b_2 = c_1 + c_2 \leq b_3 = c_1 + c_2 + c_3 \leq \dots \leq b_n = \sum_{i=1}^n c_i \leq p$$

$$b_k = \sum_{i=1}^k a_i \quad c_k = b_k - b_{k-1} \quad b_0 = 0$$

$$\text{card} \left\{ (c_k)_{k=1}^n \in \mathbb{N}^n / \sum_{k=1}^n a_k \leq p \right\} = \binom{n+p}{n} = \binom{n+p}{p}$$

- Le nombre de n -uplets $(d_k)_{k=1}^n$ de somme égale à p est le nombre de $(n-1)$ -uplets $(c_k)_{k=1}^{n-1} \in \mathbb{N}^{n-1}$ de somme majorée par p :

$$c_k = d_k \quad \text{pour } k < n \quad d_n = p - \sum_{k=1}^{p-1} c_k \in \llbracket 0, p \rrbracket$$

$$\text{card} \left\{ (d_k)_{k=1}^n \in \mathbb{N}^n / \sum_{k=1}^n d_k = p \right\} = \binom{n+p-1}{n-1} = \binom{n+p-1}{p}$$

Formules sommatoires

Formules du binôme

- La formule du binôme énonce cette égalité pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad \text{où } x^0 = 1$$

- Les égalités suivantes sont une première application de la formule du binôme ; elles sont obtenues à partir de la demi-somme et la demi-différence de $(1 \pm 1)^n$ pour $n > 0$:

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$$

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$

$$(1-1)^n = 0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} - \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$

- Les deux formules ci-dessous sont obtenues l'une par dérivation en $x = 1$ pour $n > 0$, l'autre par intégration entre 0 et 1 :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1} \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

$$((1+x)^n)' = n(1+x)^{(n-1)} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right)' = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1+t)^n dt &= \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{2^{n+1}}{n+1} \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} t^k dt = \sum_{k=1}^n \frac{[t^{k+1}]_0^1}{k+1} \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

- Une autre preuve possible consiste à simplifier ainsi ces produits :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \quad \text{pour } 0 < k \leq n$$

$$\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$$

- Les formules suivantes sont obtenues en calculant de deux façons différentes les coefficients de x^m dans $(1+x)^n(1+x)^n$, dans $(1+(1+x))^n$, et dans $(1+x)^n(1-x)^n$:

$$\sum_{\substack{0 \leq j, k \leq n \\ j+k=m}} \binom{n}{j} \binom{n}{k} = \binom{2n}{m} \quad \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}$$

$$\sum_{\substack{0 \leq j, k \leq n \\ j+k=m}} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ est impair} \\ (-1)^m \binom{n}{m/2} & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases}$$

Sommes de puissances d'entiers

- Cette égalité est une conséquence de la structure du triangle de Pascal :

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \quad \text{lorsque } m \leq n$$

- Ces sommes se déduisent du résultat précédent pour $m \in \{1, 2, 3\}$:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- Les sommes relatives aux entiers pairs et impairs découlent de celle-ci :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = S(n)$$

$$\sum_{k=0}^m (2k)^2 = 4S(n) = \frac{2m(m+1)(2m+1)}{3} = S_a(m)$$

$$\sum_{k=0}^m (2k+1)^2 = S(2m+1) - 4S_a(n) = \frac{m(4m^2+12m+11)}{3} = S_b(m)$$

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^m m(m+1)}{2}$$

Le calcul de cette dernière somme distingue les cas m pair et m impair et fait intervenir les sommes S_a et S_b .