

DÉTERMINANTS

Dans ce chapitre E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E^3$, en outre $n \in \mathbb{N}^*$ et généralement $n \geq 2$.

La théorie des déterminants fournit entre autre une méthode pour tester si une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre ou non, et si une matrice carrée est inversible ou non.

Le corps $\mathbb{K}$ doit vérifier $2 \neq 0$ pour que la solution des équations scalaires $x = -x$ et $2x = 0$ intervenant dans la théorie des déterminants soit uniquement $x = 0$; pour cette raison ce chapitre suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Groupe symétrique et signature

Groupe symétrique

- L'ensemble fini $\mathcal{S}_n$ des bijections sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ est un groupe pour la loi de composition $\circ$, appelé groupe symétrique d'ordre n , et card $\mathcal{S}_n = n!$.

Les éléments du groupe $(\mathcal{S}_n, \circ)$, c'est-à-dire les bijections sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, sont appelés permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et souvent notés σ .

- Lorsque $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et $i \neq j$ la transposition $\tau_{i,j} \in \mathcal{S}_n$ est la permutation $\tau_{i,j} : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ qui échange i et j :

$$\begin{cases} \tau_{i,j}(i) = j \\ \tau_{i,j}(j) = i \\ \tau_{i,j}(k) = k \quad \text{pour } k \neq i \text{ et } k \neq j \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{i,j} = \tau_{j,i} \\ \tau_{i,j} \circ \tau_{i,j} = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket} \\ \tau_{i,j}^{-1} = \tau_{i,j} \end{cases}$$

- Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est généralement notée ainsi; les ensembles $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$ sont donc les suivants :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad \mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Id}_{\{1,2\}} = \tau_{1,2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \right. \\ &= \text{Id}_{\{1,2,3\}} = \tau_{1,3} \circ \tau_{1,2} = \tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \tau_{1,2} \quad = \tau_{2,3} \quad = \tau_{1,3} \end{aligned}$$

- Le groupe $(\mathcal{S}_2, \circ)$ est commutatif.
- Les groupes $(\mathcal{S}_3, \circ)$ et $(\mathcal{S}_n, \circ)$ pour $n \geq 3$ ne sont pas commutatifs.
- La vérification des quatre compositions possibles sur $\mathcal{S}_2$ justifie que $\mathcal{S}_2$ est commutatif.
- Les images $(\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3})(1) = 3$ et $(\tau_{1,3} \circ \tau_{1,2})(1) = 2$ de 1 ne sont pas les mêmes, les permutations $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3}$ et $\tau_{1,3} \circ \tau_{1,2}$ sont donc différentes et les groupes $(\mathcal{S}_n, \circ)$ pour $n \geq 3$ ne sont pas commutatifs.
- La restriction à $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ vérifiant $\sigma(n) = n$ peut être considérée comme une permutation de $\mathcal{S}_{n-1}$.
- Réciproquement toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ se prolonge en une permutation $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_{n+1}$ en posant $\tilde{\sigma}(n+1) = n+1$.
- Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ vérifiant $\sigma(n) = n$; *A priori* la restriction $\sigma|_{\llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Cependant l'application σ est injective et $\sigma(n) = n$ par hypothèse, donc le seul antécédent de n est n et la restriction $\sigma|_{\llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ ne prend pas la valeur n , et est à valeurs dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. En conclusion $\text{Im } \sigma|_{\llbracket 1, n-1 \rrbracket} \subset \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
- La restriction d'une application injective est injective, donc la restriction $\sigma|_{\llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ est injective sur l'ensemble fini $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ à $n-1$ éléments.
- Ainsi $\sigma|_{\llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ est bijective sur $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $\sigma|_{\llbracket 1, n-1 \rrbracket} \in \mathcal{S}_{n-1}$.
- La démonstration de la proposition réciproque est similaire. Le prolongement $\tilde{\sigma}$ de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ par $\tilde{\sigma}(n+1) = n+1$ est une application définie sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.
- D'une part $n+1$ a un antécédent car $\tilde{\sigma}(n+1) = n+1$ et d'autre part tout les entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ont un antécédent par l'application surjective $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et donc par le prolongement $\tilde{\sigma}$.
- En conclusion l'application prolongée $\tilde{\sigma}$ est surjective sur l'ensemble fini $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et donc bijective, ainsi $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_{n+1}$.
- Toute permutation peut s'écrire sous forme de composées, aussi appelés produits, de transpositions.

- La démonstration par récurrence sur n construit un produit d'au maximum $n - 1$ transpositions.

L'ensemble $\mathcal{S}_1 = \{\text{Id}_{\{1\}}\}$ ne contient que l'élément neutre qui est par convention la composée d'aucune transposition, en suivant une convention comparable à celle notant $x^0 = e$ lorsque $x \in G$ et G est un groupe d'élément neutre e .

Les seuls éléments de $\mathcal{S}_2$ sont l'identité, l'élément neutre du groupe $(\mathcal{S}_2, \circ)$ composée d'aucune transposition, et la transposition $\tau_{1,2}$ qui est un produit réduit à un seul terme.

L'hypothèse de récurrence est ainsi vérifiée aux ordres un et deux.

Deux cas sont possibles pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$: $\sigma(n) = n$ ou $\sigma(n) \neq n$.

Dans le premier cas $\sigma(n) = n$, l'hypothèse de récurrence s'applique immédiatement à la restriction de σ à $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ qui est une permutation de $\mathcal{S}_{n-1}$ pouvant s'écrire sous la forme de produits de transpositions.

Dans le second cas $\sigma(n) \neq n$, la permutation $\sigma' = \tau \circ \sigma$ où $\tau = \tau_{n, \sigma(n)}$ vérifie $\sigma'(n) = n$; le résultat précédent s'applique à σ' qui peut donc s'écrire comme la composée de transpositions car $\tau^{-1} = \tau$:

$$\sigma' = \tau'_1 \circ \tau'_2 \circ \dots \circ \tau'_p \quad \text{avec } p < n-1$$

$$\sigma = \tau^{-1} \circ \sigma' = \tau \circ \tau'_1 \circ \tau'_2 \circ \dots \circ \tau'_p \quad \text{avec } p+1 < n$$

Dans tous les cas $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est bien la composée d'au maximum n transpositions, ce qui termine la preuve par récurrence.

Signature d'une permutation

- L'ensemble $\mathcal{P}_2$ des sous-ensembles à deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ peut être défini de deux façons équivalentes pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$:

$$\mathcal{P}_2 = \{\{i, j\} \mid 1 \leq i < j \leq n\} = \{\{\sigma(k), \sigma(\ell)\} \mid 1 \leq k < \ell \leq n\}$$

$$\text{card } \mathcal{P}_2 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Tout sous-ensemble $\{i, j\}$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ où $i < j$ est de la forme $\{\sigma(k), \sigma(\ell)\}$ avec k et ℓ de valeur $\sigma^{-1}(i)$ et $\sigma^{-1}(j) \neq \sigma^{-1}(i)$ car la permutation σ est bijective, et réciproquement $\{\sigma(k), \sigma(\ell)\}$ est de la forme $\{i, j\}$ avec $i \neq j$ dès que $k \neq \ell$ pour la même raison. La condition $k < \ell$ est alors obtenue en échangeant les rôles de k et de ℓ . Dit autrement l'application ψ_σ est bien définie et bijective sur $\mathcal{P}_2$:

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{P}_2 &\longrightarrow \mathcal{P}_2 \\ \{i, j\} &\longmapsto \{\sigma(i), \sigma(j)\} \end{aligned}$$

L'application réciproque est $\psi_{\sigma^{-1}}$.

- Lorsque φ est une bijection sur E ces produits sont égaux car ils énumèrent les mêmes éléments ; l'égalité suivante illustre ce principe pour le changement d'indices bijectif $\varphi : i \mapsto n - i$ sur $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \prod_{x \in E} f(x) &= \prod_{x \in E} f(\varphi(x)) = \prod_{x \in E} f(\varphi^{-1}(x)) \\ \prod_{i=0}^n (n-i)i^2 &= \prod_{j=0}^n j(n-j)^2 \end{aligned}$$

Une propriété similaire s'applique aux sommes.

- La signature $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est ce produit de $n(n-1)/2$ facteurs :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{P}_2} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \in \{-1, 1\} \\ &= (-1)^{\text{card } \mathcal{E}_\sigma} \quad \mathcal{E}_\sigma = \{(i, j) \mid i < j \text{ ET } \sigma(i) > \sigma(j)\} \end{aligned}$$

- Aucun des facteurs de ces produits ne dépend de l'ordre d'énumération des deux éléments i et j des ensembles appartenant à $\mathcal{P}_2$:

$$\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

Le signe de la signature $\varepsilon(\sigma)$ dépend de la parité du cardinal de $\mathcal{E}$.

- La signature d'une permutation est nécessairement ± 1 car les valeurs absolues du numérateur et du dénominateur sont les mêmes, du fait que $\psi_\sigma : \{i, j\} \mapsto \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ est une bijection sur $\mathcal{P}_2$. La valeur absolue $|i - j|$ ne dépend que de l'ensemble $\{i, j\} \in \mathcal{P}_2$ et pas de l'ordre d'énumération des deux éléments i et j . Autrement dit cette application g est bien définie et $|\varepsilon(\sigma)| = 1$:

$$\begin{aligned} g(\{i, j\}) &= |i - j| \quad g \circ \psi(\{i, j\}) = |\sigma(i) - \sigma(j)| \\ |\varepsilon(\sigma)| &= \left| \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{P}_2} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \right| = \frac{\prod_{\{i, j\} \in \mathcal{P}_2} |\sigma(i) - \sigma(j)|}{\prod_{\{i, j\} \in \mathcal{P}_2} |i - j|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2} g(\{\sigma(i), \sigma(j)\})}{\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2} i - j} = \frac{\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2} g \circ \psi(\{i, j\})}{\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2} i - j} \\
&= \frac{\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2} g(\{i, j\})}{\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2} g(\{i, j\})} = 1
\end{aligned}$$

La produit de $|\sigma(i) - \sigma(j)|$ au numérateur et le produit de $|i - j|$ sont égaux et correspondent car l'application ψ sur les indices est bijective sur $\mathcal{P}_2$.

- La signature d'une transposition τ est $\varepsilon(\tau) = -1$.
- Une preuve repose sur l'énumération du signe de tous les facteurs. Lorsque $1 \leq k < \ell \leq n$, l'ensemble $\mathcal{E}$ associé à la transposition $\tau_{k,\ell}$ contient les $2(\ell - k) + 1$ couples (k, v) où $k < v < \ell$, (u, ℓ) où $k < u < \ell$ et (k, ℓ) , car $\tau_{k,\ell}(u) = u$ et $\tau_{k,\ell}(v) = v$.
- La signature est un morphisme surjectif du groupe $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans le groupe multiplicatif $(\{-1, 1\}, \times)$; elle vérifie ces propriétés pour des permutations $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ de $\mathcal{S}_n$:

$$\varepsilon(\text{Id}_{[1,n]}) = 1 \quad \varepsilon(\sigma_2 \circ \sigma_1) = \varepsilon(\sigma_2) \times \varepsilon(\sigma_1) \quad \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$$

- Cette factorisation justifie que $\varepsilon(\sigma_2 \circ \sigma_1) = \varepsilon(\sigma_2) \times \varepsilon(\sigma_1)$ et prouve que ε est un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma_2 \circ \sigma_1) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma_2 \circ \sigma_1(j) - \sigma_2 \circ \sigma_1(i)}{j - i} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma_2(\sigma_1(j)) - \sigma_2(\sigma_1(i))}{\sigma_1(j) - \sigma_1(i)} \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma_1(j) - \sigma_1(i)}{j - i} \\
&= \prod_{1 \leq u < v \leq n} \frac{\sigma_2(v) - \sigma_2(u)}{v - u} \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma_1(j) - \sigma_1(i)}{j - i} = \varepsilon(\sigma_2) \times \varepsilon(\sigma_1)
\end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la dernière ligne consiste à modifier l'ordre d'énumération des éléments de $\mathcal{P}_2$ à l'aide de la transformation bijective $\{i, j\} \mapsto \{\sigma_2(i), \sigma_2(j)\}$ sur $\mathcal{P}_2$.

Les propriétés usuelles des morphismes multiplicatifs justifient les deux autres propriétés $\varepsilon(\text{Id}_{[1,n]}) = 1$ et $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$ car $1/u = u$ dans les deux cas $u = 1$ et $u = -1$.

- Le nombre de terme de la décomposition d'une permutation en

produit de permutation est toujours de même parité.

- Un argument sur la signature justifie qu'aucune permutation ne peut se décomposer à la fois en un produit d'un nombre pair de transpositions, et en un produit d'un nombre impair de transpositions :

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p) = \varepsilon(\tau_1) \times \varepsilon(\tau_2) \times \cdots \times \varepsilon(\tau_p) = (-1)^p$$

- La signature d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\sigma(n) = n$ est la même que celle de sa restriction à $[1, n-1]$ calculée dans $\mathcal{S}_{n-1}$.
- La raison en est que les ensembles $\mathcal{E}$ des inversions associé à $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}$ sont les mêmes car $\sigma(n) = n$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ ET } \sigma(i) > \sigma(j)\} \\
&= \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n-1 \text{ ET } \sigma(i) > \sigma(j)\}
\end{aligned}$$

- Un cycle $\gamma = (i_1, i_2, \dots, i_p) \in \mathcal{S}_n$ de longueur p , constitué de p entiers de $[1, n]$ différents deux à deux, est la permutation définie de façon circulaire :

$$\gamma : \begin{cases} \gamma(i_k) = i_{k+1} & \text{pour } 1 \leq k < p \\ \gamma(i_p) = i_1 \\ \gamma(u) = u & \text{sinon} \end{cases} \quad \gamma : i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \cdots \rightarrow i_p \rightarrow i_1$$

Cette dernière notation correspond à une autre façon de représenter un cycle.

- Une transposition est un cycle de longueur 2 :

$$\tau_{i,j} : i \rightarrow j \rightarrow i$$

- Ce produit correspond à la décomposition du cycle γ de longueur p en produits de $p-1$ transpositions :

$$\gamma = (i_1, i_2, \dots, i_p) = \tau_{i_1, i_2} \circ \tau_{i_2, i_3} \circ \cdots \circ \tau_{i_{p-2}, i_{p-1}} \circ \tau_{i_{p-1}, i_p}$$

- La signature d'un cycle γ de longueur p est $\varepsilon(\gamma) = (-1)^{p-1}$.
- L'étude des images de i_1, i_2 , etc. justifie cette égalité d'applications. L'entier $k \notin \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ est invariant par les deux applications.

La signature est un morphisme de groupe, la signature du cycle est le produit des signatures des permutations, et donc est $(-1)^{p-1}$.

- Par exemple la décomposition de ces deux cycles dans $\mathcal{S}_6$:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \tau_{1,5} \circ \tau_{5,3}$$

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \tau_{1,4} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{5,2}$$

Formes multi-linéaires

Exemples de formes bilinéaires et trilinéaires

- Une application $f : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ est dite bilinéaire si et seulement si pour tous les vecteurs $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{v}_0$ de E les applications f_1 et f_2 ci-dessous sont linéaires :

$$\begin{aligned} f_1 = f(\bullet, \mathbf{v}_0) : E &\longrightarrow \mathbb{K} & f_2 = f(\mathbf{u}_0, \bullet) : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{u} &\longmapsto f(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0) & \mathbf{v} &\longmapsto f(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Autrement dit une application est bilinéaire si toutes les applications partielles définies en fixant l'une des deux variables sont linéaires. Une forme bilinéaire est une application bilinéaire dont l'espace d'arrivée est le corps des scalaires $\mathbb{K}$.

- Une définition équivalente d'une application bilinéaire est la suivante :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E^3 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \\ f(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mu f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ \text{ET } f(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

- L'application nulle de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ est une forme bilinéaire.
- Les applications f_1 et f_2 sont bilinéaires sur $\mathbb{R}^2$, et les applications g_1 , g_2 et g_3 ne sont pas bilinéaires. Dans ce dernier cas une condition suffisante pour qu'une des applications partielles ne soit pas linéaire provient du fait que l'image du vecteur nul par l'une des applications partielles n'est pas zéro :

$$\begin{aligned} f_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right) &= xt & f_2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right) &= (x+y)(z-t) \\ g_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right) &= x+z & g_1 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= 1 \neq 0 \\ g_2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right) &= xy & g_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= 1 \neq 0 \\ g_3 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right) &= (x-z)(y+t) & g_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

L'application g_1 est linéaire sur l'espace produit $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, et non bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.

- L'ensemble $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{K})$ des formes bilinéaires sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{E \times E}$.

Ainsi $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{K})$ a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

- Le sous-ensemble $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{K})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{E \times E}$ contient l'application nulle et est stable par combinaisons linéaires, les égalités suivantes prouvent la linéarité par rapport à la première variable :

$$\begin{aligned} &(\alpha f + \beta g)(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= \alpha f(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \beta g(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= \alpha \lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \alpha \mu f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \beta \lambda g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta \mu g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= \lambda(\alpha f + \beta g)(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mu(\alpha f + \beta g)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

La preuve de la linéarité par rapport à la seconde variable est similaire.

- La définition des applications tri-linéaires est similaire. Une application f de E^3 dans $\mathbb{K}$ est tri-linéaire lorsque pour tous les vecteurs $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}_0$ et $\mathbf{w}_0$ de E les trois applications extraites f_1 , f_2 et f_3 sont linéaires :

$$\begin{aligned} f_1 = f(\bullet, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0) : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{u} &\longmapsto f_1(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 = f(\mathbf{u}_0, \bullet, \mathbf{w}_0) : E &\rightarrow \mathbb{K} & f_2(\mathbf{v}) &= f(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}, \mathbf{w}_0) \\ f_3 = f(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \bullet) : E &\rightarrow \mathbb{K} & f_3(\mathbf{w}) &= f(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

- L'ensemble $\mathcal{L}_3(\mathbb{K}^3, \mathbb{K})$ des formes tri-linéaires sur $\mathbb{K}^3$ a une structure d'espace vectoriel, et cette famille $(\varphi_{i,j,k})_{1 \leq i,j,k \leq 3}$ de 3^3 applications obtenues par produits d'une coordonnée de chaque vecteur est bien constituée de formes tri-linéaires et construisent une base de

$\mathcal{L}_3(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}) :$

$$U \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad V \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad W \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad E_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{i,j,k}(U, V, W) = u_i v_j w_k$$

- La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition des nombres réels justifie que les applications $\varphi_{i,j,k}$ sont tri-linéaires. Les valeurs de ces applications sur les vecteurs de la base canonique justifient que cette famille d'applications est libre :

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j,k}(E_u, E_v, E_w) &= \delta_{i,u} \delta_{j,v} \delta_{k,w} \\ \sum_{1 \leq i,j,k \leq 3} \lambda_{i,j,k} \varphi_{i,j,k} &= 0_{\mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}} \\ \implies \sum_{1 \leq i,j,k \leq 3} \lambda_{i,j,k} \varphi_{i,j,k}(E_u, E_v, E_w) &= 0 \\ \implies \lambda_{u,v,w} &= 0 \quad \text{valable pour tout } (u, v, w) \end{aligned}$$

La décomposition suivante montre que cette famille est génératrice :

$$\begin{aligned} f(U, V, W) &= u_1 f(E_1, V, W) + u_2 f(E_2, V, W) + u_3 f(E_3, V, W) \\ &= \sum_{i=1}^3 u_i f(E_i, V, W) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_i v_j f(E_i, E_j, W) \\ &= \sum_{1 \leq i,j,k \leq 3} u_i v_j w_k f(E_i, E_j, E_k) = \sum_{1 \leq i,j,k \leq 3} f(E_i, E_j, E_k) \varphi_{i,j,k}(U, V, W) \end{aligned}$$

- Lorsque $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel E de dimension finie n , un calcul sur les coordonnées justifie que les n^3 applications $\varphi_{i,j,k}$ indicées sur $\llbracket 1, n \rrbracket^3$ forment une base de $\mathcal{L}_3(E, \mathbb{K})$, en notant U, V et W les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$:

$$U \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad V \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad W \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad \varphi_{i,j,k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = u_i v_j w_k$$

Définitions et premières propriétés

- La définition des formes n -linéaires généralise les définitions précédentes ; une forme n -linéaire sur E est une application de E^n sur $\mathbb{K}$ telle que pour toute famille de vecteurs $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^n$ les n applications

partielles f_k sont des formes linéaires, lorsque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} f_k &= f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \bullet, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n) : E \rightarrow \mathbb{K} \\ f_k(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) &= f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n) \\ &= \lambda f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n) \\ &\quad + \mu f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n) \\ &= \lambda f_k(\mathbf{v}) + \mu f_k(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Autrement dit, toutes les applications partielles obtenues en fixant toutes les variables sauf une sont linéaires.

- L'ensemble $\mathcal{L}_n(\mathbb{K}^p, \mathbb{K})$ des formes n -linéaires sur $\mathbb{K}^p$ forme un espace vectoriel de dimension finie dont une base est constituée de p^n applications obtenues par n produits des coordonnées des vecteurs de $\mathbb{K}^p$.

L'ensemble $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ des formes n -linéaires sur un espace vectoriel E a une structure d'espace vectoriel.

Lorsque l'espace E est de dimension finie p , l'espace $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ est de dimension p^n .

Formes multi-linéaires particulières

Dans ce paragraphe l'ensemble des transpositions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est noté $\mathcal{T}_n$.

- L'application f_σ est définie à partir d'une application f de E^n et de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ en permutant l'ordre des variables de f :

$$f_\sigma(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = f(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \mathbf{u}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n)})$$

Lorsque τ est une transposition f_τ échange donc deux variables, et les autres demeurent à la même position.

- Les permutations sur les variables d'une fonction vérifient cette propriété dans le cas où σ_1 et σ_2 sont des permutations de $\mathcal{S}_n$ et f est une applications de E^n ,

$$\begin{aligned} f_{\sigma_2 \circ \sigma_1}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) &= f(\mathbf{u}_{\sigma_2(\sigma_1(1))}, \mathbf{u}_{\sigma_2(\sigma_1(2))}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma_2(\sigma_1(n))}) \\ &= f(\mathbf{v}_{\sigma_1(1)}, \mathbf{v}_{\sigma_1(2)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma_1(n)}) \\ &\quad \text{avec } \mathbf{v}_k = \mathbf{u}_{\sigma_2(k)} \text{ donc } \mathbf{v}_{\sigma_1(i)} = \mathbf{u}_{\sigma_2(\sigma_1(i))} \\ &= f_{\sigma_1}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \\ &= f_{\sigma_1}(\mathbf{u}_{\sigma_2(1)}, \mathbf{u}_{\sigma_2(2)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma_2(n)}) \end{aligned}$$

- Une forme n -linéaire f est symétrique lorsqu'elle vérifie l'une ou l'autre des deux équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \mathcal{T}_n \quad f_\tau(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) &= f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) \\ \iff \forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad f_\sigma(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) &= f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) \end{aligned}$$

La valeur de f est indépendante de l'ordre d'énumération de ses variables.

- La démonstration de l'équivalence repose sur la décomposition des permutations en produit de transpositions.

- Sur le même principe une forme n -linéaire f est anti-symétrique lorsqu'elle vérifie l'une ou l'autre des deux équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \mathcal{T}_n \quad f_\tau(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) &= -f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) \\ \iff \forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad f_\sigma(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) &= \varepsilon(\sigma) f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) \end{aligned}$$

Échanger deux variables change le signe d'une forme anti-symétrique.

- La preuve est similaire à la précédente et fait intervenir le morphisme de signature.

- De même une forme n -linéaire f alternée est caractérisée par l'une ou l'autre de ces équivalences :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{u}_k)_{k=1}^n \in E^n \quad (\mathbf{u}_k)_{k=1}^n \text{ est liée} &\implies f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = 0 \\ \iff \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall (\mathbf{u}_k)_{k=1}^n \in E^n \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i \neq j \quad \text{ET} \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j \implies f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

La première de ces propositions signifie que l'image par f d'une famille liée est nulle, et la seconde que l'application f est nulle dès que deux variables sont égales.

- La seconde proposition se déduit de la première car toute famille comportant deux fois le même vecteur est liée.

La première découle de la seconde car dans toute famille liée l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des autres ; ainsi si $\mathbf{u}_k$ est une combinaison linéaire des autres :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \lambda_i \mathbf{u}_i \\ f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_n) &= f(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{k-1}, \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \lambda_i \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n) \\ &= \sum f(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n) = 0 \end{aligned}$$

- Une forme n -linéaire est anti-symétrique si et seulement si elle est alternée.

- Toute forme anti-symétrique est alternée à cause de ces égalités lorsque $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j$, en échangeant les variables d'ordre i et d'ordre $j > i$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) &= f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n) \\ &= -f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) \\ 2f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) &= 0 \end{aligned}$$

Le développement de cette expression par linéarité des variables d'indices i et j , les autres variables d'ordre k étant de valeurs $\mathbf{u}_k$, prouve réciproquement que toute forme alternée est anti-symétrique :

$$\begin{aligned} 0 &= f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) \quad [\text{car } f \text{ est alternée}] \\ &= f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n) \\ &\quad + f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) \\ &= f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n) \quad [= 0 \text{ car } f \text{ est alternée}] \\ &\quad + f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n) \\ &\quad + f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) \\ &\quad + f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) \quad [= 0 \text{ car } f \text{ est alternée}] \\ f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) &= -f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n) \end{aligned}$$

- Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ des formes n -linéaires alternées sur E est noté $\Lambda_n(E, \mathbb{K})$.

Construction du déterminant

Ce paragraphe étudie les formes n -linéaires alternées, c'est-à-dire anti-symétriques, sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ de dimension n .

La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est notée $(E_k)_{k=1}^n$, et les vecteurs X_j pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont notés ainsi :

$$E_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} E_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots E_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} X_1 \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{n,1} \end{pmatrix} X_j \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ x_{2,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$$

- La détermination des formes n -linéaires alternées de $\mathbb{K}^n$ repose essentiellement sur ces trois arguments :

Toute application $f \in \llbracket 1, n \rrbracket^{\llbracket 1, n \rrbracket}$ est définie de façon unique par l'énu-

mération de ses n images $(f(1), f(2), \dots, f(n))$ à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Une somme indexée par l'ensemble des n -uplets à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est donc égale à la même somme indexée par l'ensemble des applications sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Si l'application f est alternée et si $\varphi : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ n'est pas injective alors $f(E_{\varphi(1)}, E_{\varphi(2)}, \dots, E_{\varphi(n)}) = 0$ car deux variables d'ordre i et $j \neq i$ sont égales : $\varphi(i) = \varphi(j)$ et $E_{\varphi(i)} = E_{\varphi(j)}$.

Une application définie sur un ensemble fini est injective si et seulement si elle est bijective.

- Toute application n -linéaire et alternée f sur $\mathbb{K}^n$ se développe ainsi :

$$\begin{aligned}
& f(X_1, X_2, \dots, X_n) \\
&= \sum_{k=1}^n x_{k,1} f(E_k, X_2, \dots, X_n) \quad \text{linéarité de la première variable} \\
&= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_{i,1} x_{j,2} f(E_i, E_j, X_3, \dots, X_n) \quad \text{linéarité par rapport à } X_2 \\
&= \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq n} x_{i_1,1} x_{i_2,2} \dots x_{i_n,n} f(E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_n}) \quad n\text{-linéarité} \\
&= \sum_{\varphi \in \llbracket 1, n \rrbracket^{\llbracket 1, n \rrbracket}} x_{\varphi(1),1} x_{\varphi(2),2} \dots x_{\varphi(n),n} f(E_{\varphi(1)}, E_{\varphi(2)}, \dots, E_{\varphi(n)}) \\
&\quad \text{somme indexée par } n^n \text{ applications à la place des } n\text{-uplets} \\
&= \sum_{\substack{\varphi \in \llbracket 1, n \rrbracket^{\llbracket 1, n \rrbracket} \\ \text{et } \varphi \text{ injective}}} x_{\varphi(1),1} x_{\varphi(2),2} \dots x_{\varphi(n),n} f(E_{\varphi(1)}, E_{\varphi(2)}, \dots, E_{\varphi(n)}) \\
&\quad \text{si } \varphi \text{ n'est pas injective } f(E_{\varphi(1)}, E_{\varphi(2)}, \dots, E_{\varphi(n)}) = 0 \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1),1} x_{\sigma(2),2} \dots x_{\sigma(n),n} f(E_{\sigma(1)}, E_{\sigma(2)}, \dots, E_{\sigma(n)}) \\
&\quad \sigma = \varphi \text{ est donc bijective} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{k=1}^n x_{\sigma(k),k} \varepsilon(\sigma) f(E_1, E_2, \dots, E_n) \\
&= \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n x_{\sigma(k),k} \right) \times f(E_1, E_2, \dots, E_n)
\end{aligned}$$

- Toute forme n -linéaire et alternée se développe de la manière précédente, et est donc proportionnelle à l'application $\det$ définie ainsi :

$$\begin{aligned}
\det(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n x_{\sigma(k),k} \\
f(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n x_{\sigma(k),k} \right) \times f(E_1, E_2, \dots, E_n) \\
&= \det(X_1, X_2, \dots, X_n) \times f(E_1, E_2, \dots, E_n)
\end{aligned}$$

- Réciproquement l'application $\det$ définie ci-dessus est n -linéaire et alternée sur $\mathbb{K}^n$.

Cette application est n -linéaire car elle s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de produits de coordonnées de chaque vecteur. Un changement d'indices bijectif prouve que ces deux produits sont égaux pour toute permutation $\varphi \in \mathcal{S}_n$:

$$\prod_{k=1}^n x_{\sigma(k),\varphi(k)} = \prod_{j=1}^n x_{\sigma(\varphi^{-1}(j)),j} \quad \text{avec } j = \varphi(k) \text{ et } k = \varphi^{-1}(j)$$

Ces sommes comportent les mêmes termes et sont égales car l'application $\Gamma : \sigma \mapsto \sigma \circ \varphi^{-1}$ associée à $\varphi \in \mathcal{S}_n$ est bijective sur $\mathcal{S}_n$. La dernière égalité provient du fait que la signature est un morphisme :

$$\begin{aligned}
\det(X_{\varphi(1)}, X_{\varphi(2)}, \dots, X_{\varphi(n)}) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n x_{\sigma(k),\varphi(k)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n x_{\sigma(\varphi^{-1}(j)),j} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma \circ \varphi^{-1} \circ \varphi) \prod_{j=1}^n x_{(\sigma \circ \varphi^{-1})(j),j} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\Gamma(\sigma) \circ \varphi) \prod_{j=1}^n x_{\Gamma(\sigma)(j),j} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\varphi) \varepsilon(\Gamma(\sigma)) \prod_{j=1}^n x_{\Gamma(\sigma)(j),j} \\
&= \varepsilon(\varphi) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n x_{\sigma(j),j} = \varepsilon(\varphi) \det(X_1, X_2, \dots, X_n)
\end{aligned}$$

- Par ailleurs $\det(E_1, E_2, \dots, E_n) = 1$ et l'application $\det$ n'est pas nulle.

Le seul produit non nul dans la somme définissant le déterminant est celui pour lequel chaque coordonnée $e_{\sigma(k),k} = 1$ des vecteurs de la base canonique est de valeur 1, ce qui correspond à $\sigma(k) = k$, et donc $\sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$ de signature $+1$:

$$\begin{aligned}
& \det(E_1, E_2, \dots, E_n) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n e_{\sigma(k),k} \\
&= \varepsilon(\text{Id}_{[1,n]}) \prod_{k=1}^n 1 = 1
\end{aligned}$$

- L'ensemble $\Lambda_n(\mathbb{K}^n)$ des formes n -linéaires et alternées sur $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{L}_n(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ des formes n -linéaires de $\mathbb{K}^n$.

$$\det(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n x_{\sigma(k),k}$$

$$\det(E_1, E_2, \dots, E_n) = 1$$

$$\Lambda_n(\mathbb{K}^n) = \text{Vect}(\det) = \mathbb{K} \det \quad \dim(\Lambda_n(\mathbb{K}^n)) = 1$$

L'espace $\Lambda_n(\mathbb{K}^n)$ est de dimension un et l'application $\det$ en est une base.

- L'application $\det$ peut aussi être définie en échangeant les indices i et j des coordonnées $x_{i,j}$ des vecteurs X_j :

$$\begin{aligned}
\det(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n x_{\sigma(k),k} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n x_{k,\sigma(k)}
\end{aligned}$$

- La démonstration est similaire à la précédente, le changement d'indices bijectif $j = \sigma(k)$ justifie l'égalité des produits, puis ces égalités de sommes sont dues au fait que la transformation $\Gamma : \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est bijective sur $\mathcal{S}_n$, et que $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\Gamma(\sigma))$:

$$\prod_{k=1}^n x_{\sigma(k),k} = \prod_{j=1}^n x_{j,\sigma^{-1}(j)}$$

$$\begin{aligned}
\det(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n x_{\sigma(k),k} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n x_{j,\sigma^{-1}(j)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\Gamma(\sigma)) \prod_{j=1}^n x_{j,\Gamma(\sigma)(j)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n x_{j,\sigma(j)}
\end{aligned}$$

- Le déterminant d'une matrice carrée A est défini à partir de ses vecteurs-colonnes :

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = [C_1, C_2, \dots, C_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\det A = \det(C_1, C_2, \dots, C_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{\sigma(k),k}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k,\sigma(k)} = \det({}^t A)$$

- Les méthodes pratiques de calcul d'un déterminant d'ordre n ne reposent pas sur ces sommes car elles comportent $n!$ termes : 120 si $n = 5$, plusieurs milliers ou millions si $n \geq 7$ ou $n \geq 10$.

L'intérêt de ce résultat est principalement théorique.

Déterminant d'un produit

Dans la suite de ce chapitre toutes les matrices considérées sont carrées et d'ordre n , et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

- L'application $f : M \mapsto \det(AM)$ est une forme n -linéaire et anti-symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc proportionnelle à l'application $\det$, en considérant la matrice M comme n vecteurs-colonnes.

- L'application f est bien n -linéaire car le produit matriciel et l'application $\det$ sont linéaires par rapport à chaque colonne de M .

La forme n -linéaire f est anti-symétrique car le produit matriciel AM respecte l'ordre des colonnes de M :

$$M = [C_1, C_2, \dots, C_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AM = [AC_1, AC_2, \dots, AC_n]$$

$$M_\sigma = [C_{\sigma(1)}, C_{\sigma(2)}, \dots, C_{\sigma(n)}]$$

$$AM_\sigma = [AC_{\sigma(1)}, AC_{\sigma(2)}, \dots, AC_{\sigma(n)}]$$

$$f(M_\sigma) = \det(AM_\sigma) = \varepsilon(\sigma) \det(AM)$$

Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel quel $f(M) = \lambda \det M$, d'où ces égalités dans le cas particulier où $M = \mathbb{I}_n$ puis le cas général :

$$\det A = \det(A\mathbb{I}_n) = f(\mathbb{I}_n) = \lambda \det \mathbb{I}_n = \lambda$$

$$\det(AM) = f(M) = \lambda \det M = \det A \det M$$

- Le déterminant vérifie ces propriétés :

$$\det \mathbb{I}_n = 1 \quad \det(AB) = \det A \times \det B$$

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0 \quad \text{dans ce cas} \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Le nullité du déterminant caractérise les matrices carrées qui ne sont pas inversibles.

- Les vecteurs-colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible forment une famille liée, et donc $\det A = 0$ car le déterminant est une forme anti-symétrique, c'est-à-dire une forme alternée.

Réciproquement toute matrice A inversible vérifie ces égalités, ainsi $\det A \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = 1/\det A$:

$$\det A \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det \mathbb{I}_n = 1 \neq 0$$

Calcul des déterminants

Déterminants d'ordre deux et trois

- Le déterminant d'ordre 2 est obtenu par un produit en croix :

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

- Le déterminant d'une matrice d'ordre 3 est le suivant :

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1} - a_{3,3}a_{1,2}a_{2,1} \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{array}$ Les deux dernières lignes recopient les deux premières de la matrice.

Le déterminant d'ordre trois est défini à partir des produits des trois termes des six diagonales.

- Le déterminant d'une matrice (a) d'ordre 1 est son coefficient :

$$\det(a) = a$$

- Ces méthodes de pratiques sur les diagonales des matrices ne se généralisent pas aux déterminants d'ordre $n \geq 4$.

Matrices triangulaires et diagonales

Les déterminants des matrices triangulaires et diagonales sont les produits des termes diagonaux :

$$\det \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & r_{n,n} \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n r_{k,k}$$

$$\det \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \ell_{n,1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & \ell_{n,n} \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n \ell_{k,k}$$

$$\det \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n d_{k,k}$$

- Tous les termes de la somme définissant le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure pour lesquels $\sigma(1) \neq 1$ sont nuls, les seuls termes intervenant dans le déterminant sont donc ceux vérifiant $\sigma(1) = 1$.

Dans ce cas $\sigma(2) \neq 1$ car $\sigma \in \mathcal{S}_n$, et les seuls termes éventuellement non nuls sont ceux tel que $\sigma(2) = 2$.

Il en est de même pour les autres colonnes et le seul terme éventuellement non nul dans le déterminant est celui correspondant à $\sigma = \text{Id}_{[1,n]}$ de signature +1.

La démonstration pour les matrices triangulaires inférieures est similaire en partant de la dernière colonne.

Propriétés du déterminant

Le déterminant est multi-linéaire

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne de la matrice, les autres étant fixées. L'égalité suivante illustre cette propriété sur la première colonne d'une matrice, il en est de même sur les autres colonnes :

$$\det[\lambda C_1 + \mu C'_1, C_2, \dots, C_n] \\ = \lambda \det[C_1, C_2, \dots, C_n] + \mu \det[C'_1, C_2, \dots, C_n]$$

- Le déterminant d'une matrice A est multiplié par λ lorsque une colonne de A est multiplié par λ .
- La multi-linéarité du déterminant a pour conséquence cette propriété :

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

- La linéarité ne correspond pas à la linéarité :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 16 = -13 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -3 - 4 = -7 \neq -13$$

Le déterminant est alterné

- Tout déterminant est nul dès que deux colonnes de la matrice sont égales.
- Plus généralement le déterminant d'une matrice dont les colonnes forment une famille liée est nul.
- Le déterminant ne change pas en ajoutant une combinaison linéaire des autres colonnes à une colonne donnée.
- La démonstration faite ici pour la première colonne est similaire pour les autres :

$$\det[C_1 + \sum_{k=2}^n \lambda_k C_k, C_2, \dots, C_n] \\ = \det[C_1, C_2, \dots, C_n] + \sum_{k=2}^n \lambda_k \det[C_k, C_2, \dots, C_n] \\ = \det[C_1, C_2, \dots, C_n]$$

Tous les déterminants de la somme sont nuls car la même colonne C_k se retrouve en première et en k -ème position.

Le déterminant est anti-symétrique

- L'échange de deux colonnes d'indice i et $j > i$ d'une matrice change le signe du déterminant :

$$\det[C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_n] \\ = -\det[C_1, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \dots, C_n]$$

- Plus généralement appliquer une permutation σ aux colonnes d'une matrice multiplie le déterminant par la signature $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$.
- La première transformation de matrice correspond à une transposition sur les deux colonnes extrêmes et change le signe du déterminant. La seconde opère un cycle de longueur n sur les colonnes et demande $n - 1$ transpositions ; l'échange des colonnes C_1 et C_2 , puis C_2 et C_3 , etc. et enfin C_{n-1} et C_n :

$$\det[C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n] = -\det[C_n, C_2, \dots, C_{n-1}, C_1]$$

$$\det[C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n] = (-1)^{n-1} \det[C_2, C_3, \dots, C_{n-1}, C_n, C_1]$$

Déterminant et transposée

- Le déterminant est invariant par transposée : $\det A = \det({}^t A)$.
- La multi-linéarité, le fait d'être alterné, et l'anti-symétrie du déterminant s'appliquent aux lignes d'une matrice carrée A , qui sont les colonnes de sa matrice transposée ${}^t A$.
- Le déterminant d'une matrice anti-symétrique A d'ordre impair est nul :

$$A = -{}^t A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$$

$$\det A = \det({}^t A) = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A$$

$$2 \det A = 0 \implies \det A = 0$$

Développement d'un déterminant

- La matrice extraite $\tilde{A}_{u,v} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est obtenue par suppression de la ligne u et la colonne v de A .
- Les déterminants de la matrice particulière A ci-dessous et celui de la matrice extraite $\tilde{A}_{n,n}$ sont égaux :

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \\ \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \qquad \qquad \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

- Les seuls termes éventuellement non nul dans la somme sur $\sigma \in \mathcal{S}_n$

caractérisant ce déterminant sont ceux pour lesquels $\sigma(n) = n$.
La somme obtenue est celle caractérisant le déterminant de la matrice extraite $\widetilde{A}_{n,n}$.

- Le développement par rapport à une colonne j_0 ou une ligne i_0 du déterminant d'une matrice A énonce ces égalités :

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{i,j_0} \det \widetilde{A}_{i,j_0} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i_0+j} a_{i_0,j} \det \widetilde{A}_{i_0,j}$$

- La démonstration se fait en trois étapes, la première consiste à développer uniquement la dernière colonne de A puis à faire circuler les lignes de la matrice pour placer celle contenant un 1 en dernière position sur la dernière grâce à $n-i$ permutations des lignes L_i et L_{i+1} , L_{i+1} et L_{i+2} , etc. et enfin L_{n-1} et L_n .

$$\begin{aligned} & \det A \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,n} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \\ & \quad \text{car} \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{i,n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,n} (-1)^{n-i} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n-1} & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n-1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,n} (-1)^{n-i} \det \widetilde{A}_{i,n} = \sum_{i=1}^n a_{i,n} (-1)^{i+n} \det \widetilde{A}_{i,n} \end{aligned}$$

Le développement par rapport à une colonne C_{j_0} est similaire, et consiste d'abord déplacer la colonne C_{j_0} en dernière position par $n-j_0$ permutations des colonnes C_{j_0} et C_{j_0+1} , etc. jusqu'à C_{n-1} et C_n , la formule précédente s'applique alors à cette nouvelle matrice. Vu comment est modifiée la colonne C_{j_0} de la matrice A , les matrices extraites intervenant sont $\widetilde{A}_{i,j_0}$ et non $\widetilde{A}_{i,n}$:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{n-j_0} \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} (-1)^{n-i} \det \widetilde{A}_{i,j_0} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} (-1)^{n-j_0+n-i} \det \widetilde{A}_{i,j_0} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} (-1)^{2n+i+j_0} \det \widetilde{A}_{i,j_0} = \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} (-1)^{i+j_0} \det \widetilde{A}_{i,j_0} \end{aligned}$$

Enfin la formule précédente appliquée à ${}^t A$ à la place de A prouve la formule sur le développement de A par rapport à la ligne i_0 , qui est la colonne i_0 de ${}^t A$.

Méthodes pratiques

Par combinaisons linéaires

- Les méthodes usuelles de calcul d'un déterminant consistent à appliquer ces transformations — développements, combinaisons linéaires ou échanges — sur les lignes ou les colonnes de la matrice initiale pour obtenir une matrice triangulaire dont le déterminant est le produit des termes diagonaux.
- Le déterminant suivant d'ordre n est calculé en transformant la matrice donnée en matrice triangulaire, pour cela le vecteur $a C_n$ est retranché à toutes les colonnes précédentes où C_n est la dernière colonne de la matrice.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & 1 & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-a & \cdots & 1-a & 1 \\ 0 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 1-a & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1-a)^{n-1}$$

- Le calcul du déterminant d'ordre n ci-dessous ci-dessous ajoute toutes les colonnes à la première pour ensuite pouvoir transformer les coefficients b en 0 grâce à la nouvelle première colonne, et obtenir enfin une matrice triangulaire :

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & & b \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & & b \\ a+(n-1)b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a+(n-1)b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

$$= (a+(n-1)b) \det \begin{pmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & & b \\ 1 & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

$$= (a+(n-1)b) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

$$= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

Par développement

- Le développement d'un déterminant est pertinent lorsque de nombreux coefficients d'une ligne ou d'une colonne sont nuls car ceci évite

de calculer les déterminants des matrices extraites correspondantes.

- Le déterminant d'ordre n ci-dessous est calculé en le développant par rapport à la première ligne ; les deux déterminants obtenus correspondent à des matrices triangulaires, l'une inférieure et l'autre supérieure :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + (-1)^{n+1}$$

- Le déterminant ci-dessous transforme la matrice initiale en soustrayant la première colonne à toutes les autres, puis en développant ensuite ce déterminant par rapport à la première ligne, qui est de la forme d'un des déterminants précédents, en remplaçant a par $b-a$, b par $-a$ et n par $n-1$:

$$\det \begin{pmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b-a & -a & \cdots & -a \\ a & -a & b-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -a \\ a & -a & \cdots & -a & b-a \end{pmatrix}$$

$$= a \det \begin{pmatrix} b-a & -a & \cdots & -a \\ -a & b-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a \\ -a & \cdots & -a & b-a \end{pmatrix}_{n-1}$$

$$= a((b-a) - (n-2)a)((b-a) + a)^{n-2} = ab^{n-2}(b - (n-1)a)$$

- Le développement des déterminants s'applique aussi quand les matrices extraites d'ordre $n - 1$ s'expriment de façon analogue à la matrice initiale d'ordre n pour aboutir à une relation de récurrence.
- Pour la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie ci-dessous, le développement par rapport à la première ligne, puis par rapport à la première colonne, dont seul le premier coefficient est éventuellement non nul, aboutissent à cette relation de récurrence pour $n \geq 3$:

$$A_n = \begin{pmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \begin{aligned} A_1 &= (a) \\ A_2 &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det A_n = a \det \begin{pmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix} - c \det \begin{pmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

$$= a \det A_{n-1} - bc \det A_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 3$$