APPLICATIONS DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ est un corps, et $(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}$.

Opérations élémentaires sur les matrices

Dans cette partie les colonnes de la matrice A sont notées $(C_k)_{k=1}^p$:

$$A=[C_1,C_2,\cdots,C_p]\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \qquad C_k\in\mathbb{K}^n \quad \textit{pour } k\in\{1\cdots p\}$$

Les matrices $E_{u,v}$ pour $(u,v)\in\{1\cdots p\}^2$ sont les p^2 matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont le seul coefficient non nul est celui placé à l'intersection de la ligne u et de la colonne v, de valeur $1\in\mathbb{K}$.

• Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice A qui se ramènent à un produit matriciel sont les suivantes :

multiplier la colonne k de A par une constante $\lambda\in\mathbb{K}^*$ non nulle,
permuter deux colonnes d'indices i et $j\neq i$ de la matrice A, et
ajouter à une colonne k de A une combinaison linéaire des autres.

• Multiplier la colonne $k\in\{1\cdots p\}$ de A par λ consiste à calculer le produit AP où la matrice P est construite à partir de la matrice diagonale $\mathbb{1}_n$ après avoir remplacé le coefficient 1 en position (k,k) par λ :

$$P=\mathbb{1}_n+(\lambda-1)E_{k,k}=\mathrm{Diag}(1,\cdots,1,\lambda,1,\cdots,1)$$
$$P^{-1}=\mathbb{1}_n+\frac{1-\lambda}{\lambda}E_{k,k}=\mathrm{Diag}(1,\cdots,1,\frac{1}{\lambda},1,\cdots,1)$$
$$AP=[C_1,\cdots,C_{k-1},\lambda C_k,C_{k+1},\cdots,C_p] \qquad \det P=\lambda\neq 0$$

• Lorsque $(i,j)\in\{1\cdots p\}^2$ et $i\neq j$, échanger les colonnes i et j de la matrice A revient à calculer le produit AP où la matrice P est construite à partir de la matrice diagonale $\mathbb{1}_n$ après avoir remplacé les deux coefficients 1 en position (i,i) et (j,j) par des 0, et placé deux coefficients 1 en position (i,j) et (j,i) :

$$P=\mathbb{1}_n-E_{i,i}-E_{j,j}+E_{i,j}+E_{j,i}$$
$$P^2=\mathbb{1}_p \qquad P^{-1}=P \qquad \det P=-1$$
$$A=[C_1,\cdots,C_i,\cdots,C_j,\cdots,C_p] \qquad \text{en supposant } i<j$$
$$AP=[C_1,\cdots,C_j,\cdots,C_i,\cdots,C_p] \qquad \text{échange les colonnes } i \text{ et } j$$

• Le produit AP ci-dessous ajoute à la première colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes $(C_j)_{j=2}^p$ de A :

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\ \lambda_2&1&0&&0\\ \lambda_3&0&1&\ddots&\vdots\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\ \lambda_n&0&\cdots&0&1\end{pmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\ -\lambda_2&1&0&&0\\ -\lambda_3&0&1&\ddots&\vdots\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\ -\lambda_n&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$$
$$AP=[C_1+\lambda_2C_2+\lambda_3C_3+\cdots+\lambda_pC_p,C_2,\cdots,C_p] \qquad \det P=1$$
$$=[C_1+\sum_{j=2}^{p}\lambda_jC_j,C_2,\cdots,C_p]$$
$$P=\mathbb{1}_p+\lambda_2E_{2,1}+\lambda_3E_{3,1}+\cdots+\lambda_pE_{p,1}=\mathbb{1}_p+\sum_{i=2}^{n}\lambda_iE_{i,1}$$

• Ces trois transformations de matrices sont bijectives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car elles consistent à multiplier par des matrices inversibles. Le produit par la matrice inverse correspond à la transformation réciproque.

• Plus généralement la matrice P obtenue en modifiant la colonne k de la matrice $\mathbb{1}_n$ permet d'ajouter à la colonne k de A une combinaison linéaire des autres colonnes :

$$P=\mathbb{1}_n+\sum_{\substack{1\le i\le p\\ i\neq k}}\lambda_iE_{i,k} \qquad P^{-1}=\mathbb{1}_n-\sum_{\substack{1\le i\le p\\ i\neq k}}\lambda_iE_{i,k}$$
$$AP=[C_1,\cdots,C_{k-1},C_k+\sum_{\substack{1\le i\le p\\ i\neq k}}\lambda_iC_i,C_{k+1},\cdots,C_p]$$

• Des produits ${}^{\mathrm{t}}Q\,A$ à la place de AP pour des matrices Q d'ordre n de la même forme que celles décrites ci-dessus opèrent sur les n lignes de A à la place de ses p colonnes.
Le produit suivant soustrait ainsi toutes les lignes de A à la première :

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&\cdots&-1\\ 0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ 0&&0&1&0\\ 0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}A$$

Calcul de l'inverse d'une matrice

• La principale méthode pour déterminer si une matrice carrée A est inversible consiste à tester si $\det A \neq 0$.

• L'intérêt des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice est de lier des transformations sur un tableau de nombres à un produit par une matrice inversible. Elles s'appliquent en particulier pour calculer la matrice inverse A^{-1} d'une matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

• L'équivalence de ces conditions repose sur la stabilité par produit du groupe linéaire :

$$\forall\, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff PA \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff AP \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$$

• Appliquer en parallèle les mêmes transformations élémentaires sur les lignes d'une matrice A et sur la matrice $\mathbb{1}_n$ revient en fait à multiplier ces deux matrices par la même matrice inversible construite à partir des opérations élémentaires sur les lignes de A.
Transformer la matrice A en $\mathbb{1}_n$ calcule le produit $BA = \mathbb{1}_n$; appliquer la même transformation à $\mathbb{1}_n$ détemine ainsi $B\mathbb{1}_n = B = A^{-1}$.
Cet algorithme échoue si et seulement si la matrice A n'est pas inversible.

• L'exemple ci-dessous construit ainsi l'inverse d'une matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow -L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

À chaque étape les matrices A' et B' obtenues à partir des matrices

A et $\mathbb{1}_n$ vérifient l'égalité $A'A^{-1} = B'$.

• Cet algorithme s'applique également en opérant sur les colonnes, et non sur les lignes, de matrice initiale et de la matrice identité.

• Une deuxième possibilité pour calculer l'inverse de $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ considère les colonnes de cette matrice comme une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, et A comme la matrice de passage $P_{\mathcal{B}c \to \mathcal{B}}$; la matrice de passage inverse $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}c} = P^{-1}_{\mathcal{B}c \to \mathcal{B}} = A^{-1}$ est obtenue en exprimant les vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}c$ sous la forme de combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}$.

• Il est aussi possible de calculer A^{-1} à partir de A en interprétant la matrice A comme celle d'un automorphisme f sur l'espace vectoriel E de base $\mathcal{B}$ tel que $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, puis en recherchant f^{-1} pour conclure par $A^{-1} = \mathrm{mat}(f^{-1}, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Rang d'une matrice et matrices équivalentes

Dans ce paragraphe E et F sont deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$, $\dim E = p$, $\dim F = n$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases de E et de F, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition et premières propriétés du rang d'une matrice

• Le rang d'une famille de vecteurs $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{q}$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs :

$$\mathrm{rg}\,(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{q} = \dim(\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{q}) \leq q$$

• Le rang d'une famille de vecteurs $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{q}$ de E est le même que le rang de la famille $(V_k)_{k=1}^{q}$ des vecteurs-coordonnées de ces vecteurs une fois une base $\mathcal{B}$ de E choisie :

$$\mathrm{rg}\,(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{q} = \mathrm{rg}\,(V_k)_{k=1}^{n} \qquad V_k \begin{pmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \\ \vdots \\ v_{n,k} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p} \\ \boldsymbol{v}_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} v_{i,k} \boldsymbol{u}_i \end{array}$$

• Plus généralement supposons que E et F sont des espaces vectoriels dont le premier est de dimension finie, que G est un sous-espace de E et que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injectif. Avec ces hypothèses $f(G)$ est un sous-espace de même dimension que G.

Le théorème du rang appliqué à la restriction $f_{/G}$ démontre l'égalité $\dim f(G) = \dim G$ car $\ker(f_{/G}) = \ker f \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$.
Une fois fixée une base $\mathcal{B}$ de E, l'application φ de $\mathbb{K}^n$ dans E qui associe le vecteur $\boldsymbol{v} \in E$ et son vecteur-coordonnées $V \in \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme d'espace vectoriel, donc un morphisme injectif.
L'application précédente du théorème du rang justifie donc ces égalités :

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(V_k)_{k=1}^q &= \dim(\operatorname{Vect}(V_k)_{k=1}^q) = \dim\varphi(\operatorname{Vect}(V_k)_{k=1}^q)\\ &= \dim\varphi\Big(\mathop{\Large +}_{k=1}^{q}\mathbb{K}V_k\Big) = \dim\Big(\mathop{\Large +}_{k=1}^{q}\mathbb{K}\varphi(V_k)\Big)\\ &= \dim\Big(\mathop{\Large +}_{k=1}^{q}\mathbb{K}\boldsymbol{v}_k\Big) = \dim\operatorname{Vect}(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^q = \operatorname{rg}(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^q\end{aligned}$$

• Le rang de la matrice A d'une application linéaire f dont les p colonnes sont notées $(C_k)_{k=1}^p$ est défini de façon équivalente par ces égalités :

$$f \in \mathcal{L}(E,F) \qquad A = \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = [C_1, C_2, \cdots, C_p] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg}(C_j)_{j=1}^n = \dim(\operatorname{Vect}(C_j)_{j=1}^n)\\ \leq \min(n,p)\end{aligned}$$

Autrement dit le rang d'une matrice est à la fois le rang de l'application linéaire correspondante et le rang des vecteurs-colonnes de sa matrice dans des bases quelconques.

• Cette démonstration note donc f une application de matrice A dans les bases $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ et $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^n$, par exemple une fois connue la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'application $f : X \mapsto AX$ de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ a A comme matrice par rapport aux bases canoniques.
Les vecteurs-colonnes de A sont les coordonnées écrites dans la base $\mathcal{B}_F$ des images de la base $\mathcal{B}_E$ par l'application f. La famille $(f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^p$ est donc génératrice de $\operatorname{Im} f$, et ses coordonnées sont par définition les vecteurs-colonnes de la matrice A :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= f(E) = f(\operatorname{Vect}(\mathcal{B}_E))\\ &= f(\operatorname{Vect}(f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^p) = \operatorname{Vect}(f(\boldsymbol{u}_k))_{k=1}^p)\\ \operatorname{rg} f &= \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(f(\operatorname{Vect}\mathcal{B}_E)) = \dim(\operatorname{Vect}(C_k)_{k=1}^p)\end{aligned}$$

Les deux définitions du rang d'une matrice sont donc équivalentes.

• Le rang d'une matrice vérifie ces propriétés élémentaires :

$$\operatorname{rg}(0)_{n,p} = 0 \qquad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(\lambda A) \quad \text{lorsque } \lambda \in \mathbb{K}^*$$

• Les propriétés des colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les suivantes :

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \operatorname{rg} A = n \iff \det A \neq 0$$

• Ces propriétés découlent de la définition du rang et du théorème récapitulatif sur les isomorphismes en dimension finie, où $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $A = \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ et $\dim E = \dim F = n$:

$$\begin{aligned}\operatorname{rg} A = n &\iff \operatorname{rg} f = n\\ &\iff \operatorname{Im} f = F\\ &\iff f \text{ est un isomorphisme}\\ &\iff A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\end{aligned}$$

• Le rang d'une application linéaire est invariant par composition par un automorphisme :

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(h \circ f) \qquad \text{avec } g \in \mathcal{GL}(E) \text{ et } h \in \mathcal{GL}(F)$$

• Les propriétés usuelles des noyaux et des images justifient ces égalités de sous-espaces vectoriels lorsque $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{GL}(E)$ et $h \in \mathcal{GL}(F)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(h \circ f) &= (h \circ f)(E) = h(f(E)) = h(\operatorname{Im} f)\\ \ker(f \circ g) &= g^{-1}(\ker f)\\ \boldsymbol{u} \in \ker(f \circ g) &\iff f(g(\boldsymbol{u})) = \mathbf{0}_F\\ &\iff g(\boldsymbol{u}) \in \ker f \iff \boldsymbol{u} \in g^{-1}(\ker f)\end{aligned}$$

• Les propriétés précédentes justifient ces égalités de dimension lorsque g et h sont des isomorphismes :

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(h \circ f) &= \dim h(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} f\\ \dim(\ker(f \circ g)) &= \dim(g^{-1}(\ker f)) = \dim(\ker f)\\ \operatorname{rg}(f \circ g) &= \dim E - \dim(\ker(f \circ g))\\ &= \dim E - \dim(\ker f) = \operatorname{rg} f\end{aligned}$$

Pour une application bijective g l'image directe D par l'application réciproque $g^{-1}(Y)$ d'un sous-ensemble $Y \subset F$ est l'ensemble R des antécédents de Y par l'application g ; la dernière équivalence est obtenue en appliquant l'application g^{-1} à $g(x)$:

$$x \in R \iff g(x) \in Y \iff x \in D$$

• Lorsque les matrices $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, le rang des matrices produits vérifie ces égalités :

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(AP) = \operatorname{rg}(QA)$$

Autrement dit le rang d'une matrice ne change pas après produit par une matrice inversible.

• La démonstration repose sur la propriété précédente et le lien entre le rang d'une matrice A et le rang de l'application linéaire associée.

• Les opérations élémentaires sur les colonnes et les lignes d'une matrice — qui sont bijectives — conservent le rang de celle-ci.

• La matrice A ci-dessous, appelée matrice échelonnée, est de rang r :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{r-1,r} & a_{r-1,r+1} & \cdots & a_{r-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r,r+1} & \cdots & a_{r,p} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rg} A = r$$

• Une double inclusion prouve que l'espace vectoriel engendré par les colonnes des vecteurs de E est le même que celui obtenu à partir des r premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

• Le calcul du rang d'une matrice consiste le plus souvent à transformer la matrice initiale en une matrice échelonnée par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

• Les transformations élémentaires appliquées sur les lignes de ces matrices justifient qu'elles sont toutes du même rang, 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}} \quad \underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}} \quad \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Matrices équivalentes

• Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes à cette condition :

$$\exists\, P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}) \quad \exists\, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad B = QAP$$

La relation d'être équivalente est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est semblable à elle-même car $A = \mathbb{1}_p A \mathbb{1}_n$.
Si la matrice A est semblable à la matrice B par $B = QAP$ alors la matrice B est semblable à $A = Q^{-1}BP^{-1}$.
Si la matrice A est semblable à la matrice $B = QAP$, et B semblable à $C = SBR$, alors la matrice $C = SQAPR$ est semblable à A car les produits SQ et PR de matrices inversibles sont inversibles.

• La matrice I_r est une matrice diagonale dont les r premiers termes sont 1, et les suivants nuls. Cette matrice est donc définie ainsi par bloc où $\mathbf{0}$ sont des matrices nulles de type $(r, p-r)$, $(n-r, r)$, $(n-r, p-r)$:

$$I_r = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & \mathbf{0}_{r,p-r} \\ \mathbf{0}_{n-r,r} & \mathbf{0}_{n-r,p-r} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{r} E_{k,k} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$\operatorname{rg} I_r = r \leq \min(n,p)$$

Théorème des matrices équivalentes

• Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à la matrice $I_{\operatorname{rg} A}$.

• La démonstration repose sur le théorème du rang, si f est l'application linéaire associée à la matrice A dans une base donnée, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ construites pour démontrer le théorème du rang est I_r.
Soit une base $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$ de $\operatorname{Im} f$ ayant r vecteurs.
Une famille constituée de r antécédent de la base $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$ est libre, car son image par l'application linéaire f est libre.
La base $\mathcal{B}_F$ de F considérée est obtenue par le théorème de la base incomplète appliquée à $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$.
La réunion de ces r antécédents et de $p-r$ vecteurs constitant une base de $\ker f$ est une famille libre de E, pour le montrer il suffit de calculer son image par f.
Par rapport à ces deux bases la matrice de f est I_r.

• La condition $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$ caractérise deux matrices A et B équivalentes.

• Le rang d'une matrice A est le même que celui de sa transposée :

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}({}^{\mathrm{t}}A)$$

• Si A et B sont des matrices équivalentes alors $B = QAP$ et $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} AP = \operatorname{rg} A$.
Réciproquement si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = r$ ces deux matrices sont équivalentes à I_r, et les matrices A et B sont donc équivalentes.
Si la matrice A est de rang r, donc A est de la forme $A = QI_rP$, et ${}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}P\,{}^{\mathrm{t}}I_r\,{}^{\mathrm{t}}Q = {}^{\mathrm{t}}P\,I_r\,{}^{\mathrm{t}}Q$, et ${}^{\mathrm{t}}P$ et ${}^{\mathrm{t}}Q$ sont des matrices inversibles.
En conclusion A et ${}^{\mathrm{t}}A$ sont des matrices équivalentes.

• Les propriétés de rang sur les lignes d'une matrice sont similaires à celle relatives à ses colonnes.

Déterminant et trace des endomorphismes

Dans ce paragraphe E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de E, $A = \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ et $A' = \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$.

• Le déterminant et la trace des matrices d'un endormorphisme f ne dépendent pas de la base utilisée, d'où cette définition de $\det f$ et $\operatorname{tr} f$:

$$\begin{aligned}
A &= P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} A' P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} A' P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \\
\det f &= \det A = \det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} A' P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}) \\
&= \det P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\ \det A'\ \frac{1}{\det P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}} = \det A' \\
\operatorname{tr} f &= \operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} A' P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}) = \operatorname{tr}((P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} A') P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}) \\
&= \operatorname{tr}(P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} A')) = \operatorname{tr}((P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}) A') \\
&= \operatorname{tr} A'
\end{aligned}$$

• Les propositions suivantes caractérisent les automorphismes de E et les matrices inversibles lorsque $f \in \mathcal{L}(E)$, $n = \dim E$, et $A = \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est une base de E :

$$\begin{gathered}
f \in \mathcal{GL}(E) \iff \det f \neq 0 \iff \operatorname{rg} f = \dim E \\
\iff A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0 \iff \operatorname{rg} A = n
\end{gathered}$$

• Deux matrices carrées semblables sont équivalentes :

$$B = P^{-1}AP \Longrightarrow B = QAP \quad \text{avec } Q = P^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$$

La réciproque est fausse, ces deux matrices sont équivalentes car inversibles et de même rang 2, et ne sont pas équivalentes car de trace et de déterminant différents :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$$
$$\det A = 1 \neq \det B = 4 \qquad \operatorname{tr} A = 2 \neq \operatorname{tr} B = 4$$

• La matrice A de la projection p sur le sous-espace F parallèlement au sous-espace supplémentaire G, c'est-à-dire $E = F \oplus G$ vérifie ces égalités :

$$\operatorname{tr} p = \operatorname{tr} A = \dim F = \operatorname{rg} p$$

• Si $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{u_k})_{k=1}^{r}$ est une base de F et $\mathcal{B}_G = (\boldsymbol{v_k})_{k=1}^{s}$ est une base de F, alors la concaténation de ces deux bases est une base $\mathcal{B}$ de $F \oplus G = E$, $p(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{u}_i$, $p(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{0}_E$, $\operatorname{Im} p = F$ et la matrice B de p dans cette base est la suivante :

$$\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_s)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 0 & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ 0 & & & 0 & & \\ 0 & & & & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots & 0 \end{pmatrix} = I_r \qquad \begin{aligned} \operatorname{tr} p &= \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B \\ &= \operatorname{tr} I_r = \dim F \\ &= \dim(\operatorname{Im} p) = \operatorname{rg} p \end{aligned}$$

Étude de la commatrice

• La matrice extraite $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est obtenue par suppression de la ligne i et de la colonne j de A.

• La commatrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie ainsi à partir des matrices extraites, et ses coefficients appelés cofacteurs.

$$M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \qquad m_{i,j} = (-1)^{i+j} \det \widetilde{A}_{i,j}$$
$$A\,{}^{\mathrm{t}}M = {}^{\mathrm{t}}M\,A = \det A\,\mathbb{1}_n$$

• La démonstration de ces deux égalités consiste à remarquer que les coefficients des produits $A\,{}^{\mathrm{t}}M$ et ${}^{\mathrm{t}}M\,A$ correspondent au déve-

loppement d'un déterminant.
Plus précisément le coefficient en position diagonale (i,i) du produit $A\,{}^{\mathrm{t}}M$ consiste à développer le déterminant de A en suivant la i-ème ligne.
De même le coefficient en position diagonale (i,j) du produit $A\,{}^{\mathrm{t}}M$ correspond au déterminant de la matrice B qui est obtenue à partir de A en remplaçant la ligne j par la ligne i, ce déterminant est donc nul car les lignes d'ordre i et j de B sont identiques.
La méthode est similaire par rapport les colonnes de A pour le produit ${}^{\mathrm{t}}M\,A$.

• Cette propriété ne permet généralement pas de déterminer en pratique une matrice inverse car les calculs de déterminants sont trop nombreux.
Elle peut éventuellement s'appliquer aux matrices d'ordre 2.

Étude des systèmes linéaires

• Un système de n équations linéaires à p inconnues correspond à une équation matricielle :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right. \qquad X\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$X\in\mathbb{K}^p \qquad B\in\mathbb{K}^n \qquad A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \qquad AX=B$$

• Lorsque $n=p$ et $A\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, le système carré $AX=B$ de n équations à n inconnues possède une et une seule solution $X=A^{-1}B$:

$$AX=B \iff A^{-1}AX=A^{-1}B \iff X=A^{-1}B$$

• La résolution du système de n équations à p inconnues $AX=\mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}$ se ramène au calcul du noyau de l'application linéaire $X\mapsto AX$.
La dimension du sous-espace des solutions de $AX=\mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}$ est $p-\operatorname{rg}A$.

• Dans le cas général, l'ensemble des solutions de $AX=B$ est soit l'ensemble vide, soit un ensemble de la forme $X_0+\mathcal{F}$ où X_0 est une solution vérifiant $AX_0=B$, et $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel des solutions de $AX=\mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}$.

• L'étude du noyau d'une application linéaire comme cet endomor-

phisme de $\mathbb{R}^3$ consiste à résoudre le système linéaire correspondant en éliminant le plus possible d'inconnues dans les équations :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\ker f$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+5z=0 \end{array}\right. \qquad f:\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+4z \\ 3x+4y+5z \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ -y-2z=0 \\ -2y-4z=0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-3L_1 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ -y-2z=0 \end{array}\right. \qquad L_2 \text{ et } L_3 \text{ sont proportionnelles}$$

$$\Longrightarrow (y=-2z)\ \textsf{ET}\ (x=-2y-3z=z)$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad U\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker f\subset\mathbb{R}U$$

La démonstration de l'égalité des sous-espaces $\ker f$ et $\mathbb{R}U$ peut se faire en vérifiant que $f(\lambda U)=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, et donc $\mathbb{R}U\subset\ker f$, ou bien en justifiant que les implications précédentes sont en fait des équivalences, ou bien en exploitant les propriétés du rang de la matrice correspondante.
En effet l'exemple précédent sur le rang justifie $\operatorname{rg}f=\operatorname{rg}A=2$, donc $\dim(\ker f)=\dim\mathbb{R}^3-\operatorname{rg}f=1$. Le sous-espace $\ker f$ est donc une droite vectoriel, d'où l'égalité $\ker f=\mathbb{R}U$.

• La méthode pratique de résolution d'un système donné consiste généralement à transformer successivement le système initial en $n-1$ équations à $n-1$ inconnues, puis $n-2$, etc. à l'aide des opérations élémentaires sur ces équations qui correspondent aux lignes de la matrice A.
La matrice du système finalement obtenue est triangulaire. Une fois trouvée la valeur d'une variable, des substitutions déterminent de proche en proche la valeur des autres.
Appliquer les opérations élémentaires sur les équations multiplie la matrice du système par une matrice inversible et transforme le sys-

tème initial en un système équivalent :

$$\forall\, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad AX = B \Longleftrightarrow PAX = PB$$

Méthode de Cramer

• Pour un système carré de n équations à n inconnues de matrice A inversible, la méthode de Cramer énonce les solutions X de $AX = B$ à l'aide du déterminant des matrices où la k-ème colone C_k de A est remplacée par B :

$$A = [C_1, C_2, \cdots, C_n] \qquad x_1 = \frac{\det[B, C_2, C_3, \cdots, C_n]}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det[C_1, B, C_3, \cdots, C_n]}{\det A} \qquad x_n = \frac{\det[C_1, C_2 \cdots, C_{n-1} B]}{\det A}$$

$$x_k = \frac{\det[C_1, \cdots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \cdots, C_n]}{\det A}$$

• Lorsque la matrice carrée A est inversible, le système linéaire $AX = B$ possède une et une seule solution. La démonstration repose sur cette égalité matricielle et le développement des déterminants des matrices associées à A :

$$AX = \sum_{k=1}^{n} x_k C_k$$

$$\begin{aligned} \det[B, C_2, \cdots, C_n] &= \det[\sum_{k=1}^{n} x_k C_k, C_2, \cdots, C_n] \\ &= x_1 \det A + \sum_{k=1}^{n} x_k \det[C_k, C_2, \cdots, C_n] \\ & x_1 \det A \\ & \text{car tous les autres déterminants sont nuls} \end{aligned}$$

• Cette méthode résout efficacement les systèmes linéaires d'ordre 2 ou 3.