

Géométrie du plan et de l'espace

La géométrie étudie les droites, les cercles et les courbes du plan et de l'espace. L'algèbre formalise les propriétés des droites et des plans de l'espace, ainsi que celles des cercles et des coniques. L'analyse intervient pour énoncer les propriétés des graphes des fonctions et des autres courbes, dans la description des tangentes, des points d'aspect singuliers, des asymptotes, etc.

Ce livret justifie les principaux résultats de géométrie après avoir énoncé les propriétés sous-jacentes de l'algèbre et de l'analyse.

TABLE DES CHAPITRES

Outils algébriques pour la géométrie	1
Géométrie du plan	31
Étude des coniques	43
Géométrie de l'espace	51
Courbes paramétrées et polaires	61
Propriétés métriques des courbes	75
Table des matières	87

François MALTEY

OUTILS ALGÈBRIQUES POUR LA GÉOMÉTRIE

Ce chapitre présente l'aspect algébrique de la géométrie du plan \mathbb{R}^2 et de l'espace \mathbb{R}^3 . Ces principes et ces outils sont le plus souvent décrits en toute généralité dans \mathbb{R}^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

Par convention les points sont généralement notés par des lettres majuscules comme A et B , et les vecteurs sont écrits en gras, par exemple \mathbf{u} ou \mathbf{AB} , ou surmontés d'un flèche comme \vec{u} ou \overrightarrow{AB} . Les lettres grecques $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \text{etc.}$ représentent des nombres réels qui sont appelés scalaires.

Définitions

Points et vecteurs

- Les points A et B de \mathbb{R}^n , et les vecteurs de \mathbb{R}^n comme \mathbf{u}, \mathbf{v} et le vecteur nul $\mathbf{0}$ sont notés ainsi ; le vecteur \mathbf{AB} est défini à partir des coordonnées des points A et B :

$$\mathbf{u} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{AB} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}$$

- Les opérations algébriques sur les points et les vecteurs de \mathbb{R}^n ne sont pas les mêmes, mais les uns et les autres sont définis de façon similaire par leurs coordonnées.

Espaces vectoriels

- Un espace vectoriel E sur \mathbb{R} est un ensemble sur lequel sont définies une somme et une multiplication par un nombre réel vérifiant les deux séries de propositions énumérées ci-dessous :

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E & \cdot : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longmapsto \mathbf{u} + \mathbf{v} & (\lambda, \mathbf{v}) &\longmapsto \lambda \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \end{aligned}$$

Les éléments de E sont appelés vecteurs par opposition aux nombres réels qui sont aussi nommés scalaires.

D'une part l'addition des vecteurs de E est une loi de composition

interne associative et commutative ; elle comporte un élément neutre appelé vecteur nul $\mathbf{0} \in E$, et tout vecteur $\mathbf{u} \in E$ possède un vecteur opposé noté $-\mathbf{u} \in E$:

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2 \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{u} \\ \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E^3 \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ \forall \mathbf{u} \in E \quad \mathbf{0} + \mathbf{u} &= \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \\ \forall \mathbf{u} \in E \quad \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) &= (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{aussi noté } \mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

D'autre part la multiplication par un scalaire vérifie ces propositions :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2 \quad \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} \\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in E \quad (\lambda + \mu)\mathbf{u} &= \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u} \\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in E \quad (\lambda\mu)\mathbf{u} &= \lambda(\mu\mathbf{u}) \\ \forall \mathbf{u} \in E \quad \mathbf{u} &= 1\mathbf{u} \end{aligned}$$

- L'addition des vecteurs est une loi de composition interne régulière :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E^3 \quad \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \implies \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

- La somme de l'opposé $-\mathbf{w}$ aux deux membres de l'égalité le démontre :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w} &\implies \mathbf{u} + \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{w} \\ &\implies \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{0} \\ &\implies \mathbf{u} = \mathbf{v} \end{aligned}$$

- Les opérations sur les vecteurs exploitent régulièrement ces propriétés qui correspondent aux règles usuelles du calcul vectoriel :

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{u} = \mathbf{0} &\iff \lambda = 0 \text{ OU } \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ (-\lambda)\mathbf{u} &= -(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(-\mathbf{u}) \quad -\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} \end{aligned}$$

- Ces preuves de $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ et de $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ reposent sur la définition des espaces vectoriels et la régularité de l'addition des vecteurs :

$$\begin{aligned} 0\mathbf{u} + \mathbf{0} &= 0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} \implies 0\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \lambda\mathbf{0} + \mathbf{0} &= \lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0} + \lambda\mathbf{0} \implies \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0} \\ \lambda = 0 \text{ OU } \mathbf{u} = \mathbf{0} &\implies \lambda\mathbf{u} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Réciproquement ces égalités exploitent le résultat précédent $\mu \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ et justifient que les hypothèses $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et $\lambda \neq 0$ entraînent $\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{u} = \frac{\lambda}{\lambda} \mathbf{u} = \frac{1}{\lambda} (\lambda\mathbf{u}) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Cette démonstration prouve donc la première de ces deux implications; la seconde est l'implication réciproque recherchée qui est logiquement équivalente à la première :

$$\lambda \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ ET } \lambda \neq 0 \implies \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \lambda \mathbf{u} = \mathbf{0} \implies \lambda = 0 \text{ OU } \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

- Les démonstrations sur les opposés des vecteurs sont similaires et reposent sur la régularité de la somme appliquée à ces égalités :
 $(\lambda \mathbf{u}) - (\lambda \mathbf{u}) = \mathbf{0} = 0 \mathbf{u} = (\lambda - \lambda) \mathbf{u} = (\lambda \mathbf{u}) + (-\lambda) \mathbf{u} \implies -(\lambda \mathbf{u}) = (-\lambda) \mathbf{u}$
 $= \lambda \mathbf{0} = \lambda(\mathbf{u} - \mathbf{u}) = (\lambda \mathbf{u}) + \lambda(-\mathbf{u}) \implies -(\lambda \mathbf{u}) = \lambda(-\mathbf{u})$

La dernière égalité correspond à $\lambda = -1$.

- L'ensemble \mathbb{R}^n a une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} lorsque la somme de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire sont définies par un calcul coordonnée par coordonnée :

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \quad \lambda \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix} \quad -\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$$

- Des calculs coordonnées par coordonnées justifient que \mathbb{R}^n muni des deux opérations précédentes vérifient toutes les propositions caractérisant un espace vectoriel; par exemple $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} \lambda \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) &= \lambda \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(u_1 + v_1) \\ \vdots \\ \lambda(u_n + v_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n + \lambda v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans la suite $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ est une famille de $p \in \mathbb{N}$ vecteurs d'un espace vectoriel E , et $(\lambda_k)_{k=1}^p \in \mathbb{R}^p$.

- Une combinaison linéaire de vecteurs est définie de la manière suivante :

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{u}_p$$

- Tout espace vectoriel E est stable par combinaisons linéaires, et changer l'ordre des termes et regrouper par des parenthèses certains calculs ne modifient pas la valeur d'une combinaison linéaire, par

exemple :

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E^3 \quad \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w} \in E$$

$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w} = (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) + \gamma \mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + (\beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w}) = \beta \mathbf{v} + \alpha \mathbf{u} + \gamma \mathbf{w}$$

- Les combinaisons linéaires regroupent les deux opérations des espaces vectoriels, d'où la stabilité des espaces vectoriels E par combinaisons linéaires.

La deuxième propriété est une conséquence de l'associativité et de la commutativité de l'addition des vecteurs.

- Toute combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls est le vecteur nul, car $0 \mathbf{u} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$; la valeur d'une combinaison linéaire réduite à un terme est ce terme, et la somme vide est, par convention, le vecteur nul :

$$\sum_{k=1}^p 0 \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \quad \sum_{k=1}^1 \lambda_k \mathbf{u}_k = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \quad \sum_{k=1}^0 \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

Espaces affines

- Un espace affine \mathcal{E} est un ensemble non vide de points associé à un espace vectoriel E qui vérifie les trois propositions suivantes :
 - tout couple de points (A, B) de \mathcal{E} construit un unique vecteur $\mathbf{AB} \in E$;
 - réciproquement à un point $A \in \mathcal{E}$ et un vecteur $\mathbf{u} \in E$ correspond un unique point $B \in \mathcal{E}$ parfois noté $B = A + \mathbf{u}$ tel que $\mathbf{AB} = \mathbf{u}$;
 - en outre tout triplet (A, B, C) de points vérifie la relation de Chasles :

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}$$

- Les propriétés suivantes sont à la base de la géométrie affine :
 $B = C \iff \mathbf{BC} = \mathbf{0} \iff \mathbf{AB} = \mathbf{AC} \quad \mathbf{BA} = -\mathbf{AB}$
- Ces implications circulaires justifient les équivalences précédentes :
 $B = C \implies \mathbf{AB} + \mathbf{0} = \mathbf{AB} = \mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}$
 $\implies \mathbf{BC} = \mathbf{0}$ par régularité des sommes de vecteurs
 $\mathbf{BC} = \mathbf{0} \implies \mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AB} + \mathbf{0} = \mathbf{AB}$
 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \implies B = A + \mathbf{AB} = A + \mathbf{AC} = C$
 $\implies B = C$
 par unicité du point d'extrémité du vecteur $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ issu de A .

- L'égalité $\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \mathbf{AA} = \mathbf{0}$ prouve la dernière égalité.
- L'ensemble \mathbb{R}^n considéré comme un ensemble de points est un espace affine dont l'espace vectoriel associé est \mathbb{R}^n où les coordonnées du vecteur \mathbf{AB} sont obtenues par différence des coordonnées des points A et B .
- Cette structure de \mathbb{R}^n vérifie les trois points de la définition des espaces affines, par exemple la relation de Chasles :

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ \vdots \\ c_n - b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ \vdots \\ c_n - a_n \end{pmatrix} = \mathbf{AC}$$

Familles de vecteurs

Dans ce paragraphe E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , et $p \in \mathbb{N}$.

Familles libres et familles liées

- La famille $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ de vecteurs de E est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul est celle pour laquelle tous les coefficients sont simultanément nuls :

$$\forall (\lambda_k)_{k=1}^p \in \mathbb{R}^p \quad \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

- L'implication réciproque est toujours vérifiée, car toute combinaison linéaire de vecteurs dont tous les coefficients sont nuls est le vecteur nul.
- Une famille liée est une famille de vecteurs qui n'est pas libre ; il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs dont tous les coefficients ne sont pas simultanément nuls qui est égale au vecteur nul :

$$\exists (\lambda_k)_{k=1}^p \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\} \quad \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

- La famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ de vecteurs de \mathbb{R}^3 est libre :

$$\mathbf{u}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La résolution, par différences des équations, du système linéaire obtenu par un calcul coordonnée par coordonnée de $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ prouve que cette famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ de vecteurs de \mathbb{R}^3 est libre :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array} \right\} \implies \lambda_2 = -\lambda_3 = \lambda_1 = -\lambda_2$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

- Au contraire la famille suivante $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est liée :

$$\mathbf{v}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La résolution du système linéaire $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ n'aboutit pas à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et suggère de vérifier que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{array} \right\} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Une famille « est libre » ou « est liée » indépendamment de l'ordre d'énumération de ses vecteurs.

Une famille contenant le vecteur nul est liée.

Une famille contenant deux fois le même vecteur est liée.

Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

- Avec les notations précédentes, si $\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ dans le premier cas ou si $\mathbf{u}_m = \mathbf{u}_n$ et $m < n$ dans le deuxième, les combinaisons linéaires suivantes dont tous les coefficients ne sont pas nuls prouvent que la famille $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ est liée :

$$0\mathbf{u}_1 + \dots + 0\mathbf{u}_{n-1} + 1\mathbf{u}_n + 0\mathbf{u}_{n+1} + \dots + 0\mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

$$0\mathbf{u}_1 + \dots + 0\mathbf{u}_{m-1} + 1\mathbf{u}_m + 0\mathbf{u}_{m+1} + \dots + 0\mathbf{u}_{n-1} + (-1)\mathbf{u}_n + 0\mathbf{u}_{n+1} + \dots + 0\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_m - \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

- Il suffit de compléter une combinaison linéaire égale au vecteur nul et à coefficients non tous nuls de la famille liée $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ par des termes à coefficients nuls pour justifier que la sur-famille $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^q$ avec $q > p$ est liée :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{u}_p & (\lambda_k)_{k=1}^p &\neq (0, \dots, 0) \\ &= \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{u}_p + 0\mathbf{u}_{p+1} + 0\mathbf{u}_{p+2} + \dots + 0\mathbf{u}_q \end{aligned}$$

- Une famille à un seul vecteur \mathbf{u} est libre si et seulement si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. « La famille vide est libre » est une convention cohérente.

- La première proposition provient de la condition nécessaire et suffisante pour avoir $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

La seconde est due au fait qu'une combinaison linéaire vide ne contient aucun coefficient non nul.

- Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des autres.

- Un des vecteurs d'une famille liée $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ est une combinaison linéaire des autres; soit $\lambda_q \neq 0$ un coefficient non nul de la relation de dépendance linéaire :

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \implies \mathbf{u}_q = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq q}} \alpha_k \mathbf{u}_k \quad \text{avec } \alpha_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_q}$$

Réciproquement si \mathbf{u}_q est une combinaison linéaire cette famille est liée :

$$\mathbf{u}_q = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq q}} \alpha_k \mathbf{u}_k \implies \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \quad \text{avec } \lambda_q = 1 \text{ et } \lambda_k = -\alpha_k$$

- La propriété précédente ne signifie pas que le premier vecteur est nécessairement une combinaison linéaire des autres, ainsi :

$$\mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} 0\mathbf{u} + 1\mathbf{v} + 1\mathbf{w} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &\notin \mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w} = \mathbb{R}\mathbf{v} \\ \mathbf{v} &= -\mathbf{w} = 0\mathbf{u} + (-1)\mathbf{w} \in \mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{w} \end{aligned}$$

- Deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont colinéaires signifie que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ OU } (\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \mathbf{v} = \alpha \mathbf{u})$$

- Une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si ses deux vecteurs sont colinéaires.

- Si les deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont colinéaires deux cas sont possibles. D'une part toute famille $(\mathbf{0}, \mathbf{v})$ est liée car elle contient le vecteur nul, d'autre part $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$ entraîne l'égalité $1\mathbf{u} - \alpha \mathbf{v} = \mathbf{0}$, et la famille (\mathbf{u}, \mathbf{v})

est donc liée.

Réciproquement supposons la famille (\mathbf{u}, \mathbf{v}) liée et $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} = \mathbf{0}$ où $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Deux cas sont possibles : si $\mu \neq 0$ alors $\mathbf{v} = -(\lambda/\mu)\mathbf{u}$, et si $\mu = 0$ alors $\lambda \neq 0$ et $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{0}$, donc $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Dans ces deux cas les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont colinéaires.

Familles génératrices

- La famille $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ de vecteurs de E est génératrice de E si et seulement si tout vecteur $\mathbf{v} \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille :

$$\forall \mathbf{v} \in E \quad \exists (\lambda_k)_{k=1}^p \in \mathbb{R}^p \quad \mathbf{v} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k$$

- Une famille est génératrice indépendamment de l'ordre d'énumération de ses vecteurs.

Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

- La démonstration est similaire à celles des sur-familles des familles liées, en complétant la combinaison linéaire initiale par des termes nuls. Soient $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ une famille génératrice et $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^q$ où $q > p$ une sur-famille :

$$\forall \mathbf{v} \in E \quad \exists (\lambda_k)_{k=1}^p \in \mathbb{R}^p \quad \mathbf{v} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k + \sum_{k=p+1}^q 0 \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^q \alpha_k \mathbf{u}_k \quad \text{où } \begin{cases} \alpha_k = \lambda_k & \text{si } k \leq p \\ \alpha_k = 0 & \text{si } k > p \end{cases}$$

- Toute sur-famille stricte d'une famille génératrice est liée.

- Si $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ est une famille génératrice alors \mathbf{u}_{p+1} est une combinaison linéaire de $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ et la famille $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^{p+1}$ est liée, donc la sur-famille $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^q$ est aussi liée dès que $q \geq p + 1$.

Bases

- Une base de l'espace vectoriel E est une famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice de E .

- Une fois la base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ fixée, les coefficients $(\lambda_k)_{k=1}^p$ intervenant dans la décomposition de n'importe quel vecteur \mathbf{v} sont uniques et appelées coordonnées de \mathbf{v} dans cette base :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^p \quad \exists! (\lambda_k)_{k=1}^p \in \mathbb{R}^p \quad \mathbf{v} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k$$

• L'existence du p -uplets de coordonnées provient de la définition même d'une famille génératrice.

Le fait que la famille soit libre entraîne, par différence, l'unicité des coefficients :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{u}_p \\ &= \mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \mu_p \mathbf{u}_p \\ \mathbf{0} &= (\lambda_1 - \mu_1) \mathbf{u}_1 + \dots + (\lambda_p - \mu_p) \mathbf{u}_p \\ \text{donc} \quad \lambda_1 - \mu_1 &= \lambda_2 - \mu_2 = \dots = \lambda_p - \mu_p = 0 \\ \text{et} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) &= (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \end{aligned}$$

• Réciproquement à tout p -uplets $(\lambda_k)_{k=1}^p \in \mathbb{R}^p$ de coordonnées correspond un seul vecteur \mathbf{v} obtenu par combinaison linéaire des vecteurs de la base $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k \quad \text{de coordonnées } (\lambda_k)_{k=1}^p \text{ dans la base } \mathcal{B} = (\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$$

• Les coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs dans une base donnée sont obtenues par combinaison linéaire des coordonnées des vecteurs initiaux :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k & \mathbf{w} &= \sum_{k=1}^p \mu_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{v} + \mathbf{w} &= \sum_{k=1}^p (\lambda_k + \mu_k) \mathbf{u}_k & \alpha \mathbf{v} &= \sum_{k=1}^p (\alpha \lambda_k) \mathbf{u}_k \end{aligned}$$

• La base canonique $\mathcal{B}_c = (\mathbf{e}_k)_{k=1}^n$ de \mathbb{R}^n est définie ainsi et la décomposition d'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ dans cette base \mathcal{B}_c fait directement intervenir ses coordonnées :

$$\mathbf{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n v_k \mathbf{e}_k$$

• La famille de ces vecteurs est génératrice pour cette raison :

$$\mathbf{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n v_k \mathbf{e}_k$$

Si cette combinaison linéaire est le vecteur nul alors, les coefficients sont égaux terme à terme ; la famille $(\mathbf{e}_k)_{k=1}^n$ est donc libre :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

• Les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3 sont notées (\mathbf{i}, \mathbf{j}) et $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
 • Une fois une base \mathcal{B} à $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E fixée, une famille de vecteurs de E est libre, génératrice ou une base de E si et seulement si la famille de ses coordonnées dans \mathbb{R}^p est respectivement libre, génératrice ou une base de \mathbb{R}^p .

• Ces propriétés sont démontrées dans le cours d'algèbre linéaire. Ces propriétés sont une conséquence du fait que les coordonnées de combinaisons linéaires de vecteurs sont les combinaisons linéaires des vecteurs-coordonnées, et que le passage des vecteurs aux coordonnées est bijective.

• Le fait qu'une famille de vecteurs soit une base est indépendant de l'ordre d'énumération de ses vecteurs ; en revanche les coordonnées d'un vecteur dépendent de cet ordre : ainsi $\mathcal{B}_c = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et $\mathcal{B} = (\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i})$ sont deux bases de \mathbb{R}^3 et les coordonnées de $\mathbf{i} - \mathbf{k}$ sont $(1, 0, -1)$ dans \mathcal{B}_c et $(0, -1, 1)$ dans \mathcal{B} .

• La décomposition des vecteurs de la base canonique peut être une étape intermédiaire pour montrer qu'une famille de vecteur est génératrice.

• Cette famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ de vecteurs de \mathbb{R}^3 est génératrice de \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{u}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• La résolution du premier système linéaire se fait par différence des

équations, les décompositions de \mathbf{j} et \mathbf{k} en découlent :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_2 = 1 - \lambda_3 = \lambda_3 \\ \lambda_3 = \lambda_2 = -\lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{i} = -\frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{j} = \mathbf{u}_3 - \mathbf{i} \\ \mathbf{k} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{j} \end{cases} \begin{cases} \mathbf{i} = -\frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{j} = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{k} = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_3 \end{cases}$$

• Un calcul précédent a montré que cette famille $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ de \mathbb{R}^3 est libre. La famille \mathcal{B} est donc une base de \mathbb{R}^3 .

• Préciser les coordonnées dans la base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ d'un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 .

• La décomposition des vecteurs \mathbf{i} , \mathbf{j} et \mathbf{k} aboutit directement aux coordonnées d'un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \frac{-x+y+z}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{x-y+z}{2}\mathbf{u}_2 + \frac{x+y-z}{2}\mathbf{u}_3$$

Sous-espaces vectoriels

Définitions

• Un sous-espace vectoriel F de l'espace vectoriel E est un sous-ensemble non vide de E qui est stable par combinaisons linéaires :

$$F \subset E \quad F \neq \emptyset \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in F^2 \quad \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in F$$

• En particulier tout sous-espace vectoriel F de E contient le vecteur nul : $\mathbf{0} \in F$, en appliquant cette définition avec des coefficients nuls.

• Par associativité une combinaison linéaire de n vecteurs est constitué de $n-1$ combinaisons linéaires de 2 vecteurs, ainsi pour 3 vecteurs :

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = 1(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) + \gamma\mathbf{w}$$

• Tout sous-espace vectoriel F de E a une structure d'espace vectoriel, et vérifie la définition et les propriétés des espaces vectoriels.

• Ainsi une base de F est une famille de vecteurs de F qui est libre et génératrice de F .

• Le sous-espace nul $\{\mathbf{0}\}$ et \mathbb{R}^n sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .

L'ensemble vide \emptyset n'est pas un sous-espace vectoriel.

• Le sous-ensemble F de \mathbb{R}^3 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x + y + z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

• Le sous-ensemble F de \mathbb{R}^3 vérifie les trois propriétés caractéristiques des sous-espaces vectoriels, F est inclus dans \mathbb{R}^3 , F n'est pas vide et est stable par combinaisons linéaires :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F \quad \begin{matrix} (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in F^2 \\ F \neq \emptyset \end{matrix} \quad \mathbf{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} u_x + u_y + u_z = 0 \\ v_x + v_y + v_z = 0 \\ \mathbf{w} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \end{matrix} \quad \mathbf{w} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_x + \mu v_x \\ \lambda u_y + \mu v_y \\ \lambda u_z + \mu v_z \end{pmatrix}$$

$$w_x + w_y + w_z = (\lambda u_x + \mu v_x) + (\lambda u_y + \mu v_y) + (\lambda u_z + \mu v_z) = \lambda(u_x + u_y + u_z) + \mu(v_x + v_y + v_z) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 \quad \mathbf{w} \in F$$

• Ces sous-ensembles D et P sont des sous-espaces vectoriels appelés droite vectorielle D et plan vectoriel P lorsque $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ et la famille (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est libre :

$$D = \{\lambda\mathbf{u} / \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\mathbf{u} \quad P = \{\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v}$$

• Plus généralement le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ de vecteurs du même espace vectoriel E est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs :

$$\text{Vect}(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p = \left\{ \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k / (\lambda_k)_{k=1}^p \in \mathbb{R}^p \right\} \subset E$$

$$\text{Vect}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{Vect}(\mathbf{u}) = \mathbb{R}\mathbf{u} \quad \text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v}$$

La convention $\text{Vect}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$ est cohérente avec cette définition.

• Par construction l'ensemble $\text{Vect}(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ est inclus dans E , et le vecteur nul est dans tout les sous-ensembles $\text{Vect}(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$.

Ces égalités prouvent que l'ensemble $\text{Vect}(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ est stable par combinaisons linéaires :

$$\alpha \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k + \beta \sum_{k=1}^q \lambda'_k \mathbf{u}'_k = \sum_{k=1}^{p+q} \mu_k \mathbf{v}_k$$

où $\mu_k = \begin{cases} \alpha \lambda_k & \text{si } k \leq p \\ \beta \lambda_{k-p} & \text{si } k > p \end{cases}$ et $\mathbf{v}_k = \begin{cases} \mathbf{u}_k & \text{si } k \leq p \\ \mathbf{u}'_{k-p} & \text{si } k > p \end{cases}$

- La famille de vecteurs $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ est génératrice de E si et seulement si $\text{Vect}(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p = E$.
- La famille (\mathbf{u}, \mathbf{v}) obtenue à partir d'un vecteur quelconque \mathbf{w} du sous-espace vectoriel F précédent est une base de F :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x + y + z = 0 \right\} \quad \mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- La démonstration commence par cette décomposition :

$$\mathbf{w} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$$

Les quatre arguments suivants sont ensuite nécessaires :

- une vérification sur les coordonnées montre que $\mathbf{u} \in F$ et $\mathbf{v} \in F$;
- (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est une famille libre car ses vecteurs ne sont pas colinéaires ;
- $\mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v} \subset F$ car le sous-espace F est stable par combinaison linéaire ;
- $\mathbf{w} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$ provient de $z = -x - y$ et prouve $F \subset \mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v}$.

En conclusion $F = \mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v} = \text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, et la famille (\mathbf{u}, \mathbf{v}) de deux vecteurs de F est libre et génératrice de F , et forme donc une base de F .

Somme et intersection de sous-espaces vectoriels

- L'intersection $F \cap G$ et la somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels sont des sous-espaces vectoriels de E :

$$F \cap G = \{\mathbf{v} / \mathbf{v} \in F \text{ ET } \mathbf{v} \in G\} \quad F + G = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} / \mathbf{v} \in F \text{ ET } \mathbf{w} \in G\}$$

- Le sous-ensemble $F \cap G$ contient le vecteur nul $\mathbf{0}$ et est stable par combinaisons linéaires.
- Le sous-ensemble $F + G$ de E contient le vecteur nul $\mathbf{0}$ et est stable

par combinaisons linéaires.

- Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires de E lorsqu'ils vérifient ces conditions équivalentes, ils sont notés $F \oplus G = E$:

$$F \oplus G = E \iff (\forall \mathbf{u} \in E \quad \exists! (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in F \times G \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{u} \in E \quad \exists (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in F \times G \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \\ \text{ET} \quad \forall (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in F \times G \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0} \implies \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

- Ces deux propositions expriment l'existence de la décomposition des vecteurs de E sur $F + G$. La première de ces propositions énonce l'unicité de la décomposition de tous les vecteurs de E , la seconde uniquement l'unicité de la décomposition du vecteur $\mathbf{0} \in E$, de la forme $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in F + G$.

La démonstration suivante justifie l'unicité de la décomposition d'un vecteur $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}'$ sur $F + G$ à partir de l'unicité de la décomposition du vecteur nul $\mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}' \\ \implies (\mathbf{v} - \mathbf{v}', \mathbf{w} - \mathbf{w}') \in F \times G \text{ ET } (\mathbf{v} - \mathbf{v}') + (\mathbf{w} - \mathbf{w}') = \mathbf{0} \\ \implies \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w}' - \mathbf{w} = \mathbf{0} \\ \implies \mathbf{v} = \mathbf{v}' \text{ ET } \mathbf{w} = \mathbf{w}' \end{aligned}$$

Les deux propositions sont donc équivalentes.

- La condition suivante caractérise deux sous-espaces supplémentaires :

$$F \oplus G = E \iff F + G = E \text{ ET } F \cap G = \{\mathbf{0}\}$$

- Cette condition énonce l'existence de la décomposition des vecteurs de E par $E = F + G$, et l'unicité de la décomposition provient de l'hypothèse $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}' \implies \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w}' - \mathbf{w} \in F \cap G \\ \implies \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w}' - \mathbf{w} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Réciproquement si $E = F \oplus G$ alors les deux arguments ci-dessus justifient $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

D'une part $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel et contient le vecteur nul $\mathbf{0}$, et d'autre part si $\mathbf{u} \in F \cap G$ alors \mathbf{u} peut se décomposer sous ces deux formes $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$ dans $F + G$. L'unicité de sa décomposition aboutit à $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

- Quatre inclusions dont deux proviennent de la structure des espaces vectoriels permettent de démontrer que deux sous-espaces F et G de E sont supplémentaires :

$$F \cap G \subset \{\mathbf{0}\} \quad \{\mathbf{0}\} \subset F \cap G \quad F + G \subset E \quad E \subset F + G$$

- L'exemple ci-dessous illustre cette méthode pour prouver que F et G sont supplémentaires :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x + y + z = 0 \right\} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad G = \mathbb{R}\mathbf{w}$$

Les deux inclusions $\{\mathbf{0}\} \subset F \cap G$ et $F + G \subset \mathbb{R}^3$ proviennent des propriétés des sommes et des intersections de sous-espaces vectoriels. Si $\mathbf{u} \in F \cap G$ ces équations prouvent $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et $F \cap G \subset \{\mathbf{0}\}$:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad x + y + z = 0 \quad \text{ET} \quad \left(\exists \lambda \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{donc } x + y + z = 0 = 3\lambda = 0 \text{ puis } \lambda = 0$$

Enfin la résolution de ce système justifie que tout vecteur \mathbf{u} de \mathbb{R}^3 est la somme d'un vecteur de F et d'un de G ; la somme des trois dernières équations aboutit à la valeur de λ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \lambda = x \\ \beta + \lambda = y \\ \gamma + \lambda = z \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{x + y + z}{3} \\ \alpha = x - \lambda \\ \beta = y - \lambda \\ \gamma = z - \lambda \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x - y - z}{3} \\ \frac{2y - z - x}{3} \\ \frac{2z - x - y}{3} \end{pmatrix} + \frac{x + y + z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels est dite directe et est notée $F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

Projections vectorielles

- Lorsque les sous-espaces F et G sont supplémentaires, la projection vectorielle sur F parallèlement à G est l'application p suivante :

$$\forall \mathbf{u} \in E \quad \exists!(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in F \times G \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \quad p(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$$

- La projection p sur F parallèlement à G est une application linéaire :

$$p(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = p(\mathbf{u}) + p(\mathbf{v}) \quad p(\lambda \mathbf{u}) = \lambda p(\mathbf{u})$$

- Les autres propriétés de cette projection p sont les suivantes :
 $\mathbf{u} \in F \iff p(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \quad \mathbf{u} \in G \iff p(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad p \circ p = p \quad \mathbf{u} - p(\mathbf{u}) \in G$
- Lorsque p est la projection sur F parallèlement à G alors $q = \text{Id} - p$ est la projection sur G parallèlement à F . Dans certains cas il peut être plus facile de déterminer p à partir de q que de calculer directement p .
- L'image par une projection d'un vecteur découle de la décomposition de ce vecteur sur les sous-espaces supplémentaires associés à p .
- L'exemple ci-dessous reprend les sous-espaces F et G précédents pour calculer la la projection p sur F parallèlement à G , et la projection q sur G parallèlement à F :

$$p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x - y - z}{3} \\ \frac{2y - x - z}{3} \\ \frac{2z - x - y}{3} \end{pmatrix} \quad q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x + y + z}{3} \\ \frac{x + y + z}{3} \\ \frac{x + y + z}{3} \end{pmatrix}$$

Théorie de la dimension

Ce paragraphe récapitule sans preuve les principaux résultats de la théorie de la dimension des espaces vectoriels. Ces arguments permettent de justifier ou de simplifier un certain nombre de démonstrations en géométrie.

- Si un espace vectoriel E possède une base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_k)_{k=1}^n$ de n vecteurs, alors l'espace vectoriel E est dit de dimension finie $n = \dim E$ et toutes les bases de E comportent $\dim E$ vecteurs. Ainsi $\dim \mathbb{R}^n = n$ car la base canonique de \mathbb{R}^n contient n vecteurs.
- Si l'espace vectoriel E est de dimension n , alors :
 - toute famille libre de E a au maximum n vecteurs ;
 - une famille libre de E ayant n vecteurs est une base ;
 - toute famille génératrice de E a au minimum n vecteurs ;
 - une famille génératrice de E ayant n vecteurs est une base.

- Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie inférieure.

En outre l'égalité des dimensions entraîne l'égalité des espaces :
 $F \subset E \implies \dim F \leq \dim E$ $F \subset E$ ET $\dim F = \dim E \implies E = F$

Théorème des quatre dimensions

- Deux sous-espaces vectoriels F et G de l'espace vectoriel E de dimension finie vérifient cette égalité :

$$\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)$$

- Un sous-espace de dimension 1 est donc de la forme $D = \mathbb{R}\mathbf{u}$ où une base de D est la famille (\mathbf{u}) à un seul vecteur supposé non nul. Un sous-espace de dimension 2 est donc de la forme $P = \mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v}$ où une base de P est la famille (\mathbf{u}, \mathbf{v}) supposée libre.

Géométrie affine

Dans cette partie \mathcal{E} est un espace affine d'espace vectoriel associé E .

Droites et plans affines

- Une droite affine \mathcal{D} est un ensemble de points défini ainsi à partir d'un point A et d'un vecteur directeur $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$; le sous-espace vectoriel $D = \mathbb{R}\mathbf{u}$ est appelé droite vectorielle associée à \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\mathbf{u} = \{M / \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \mathbf{AM} = \lambda\mathbf{u}\} \quad D = \{\mathbf{AM} / M \in \mathcal{D}\}$$

- De même un plan affine \mathcal{P} passant par A et dirigé par deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} non colinéaires est l'ensemble de points ci-dessous ; le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v}$ est appelé plan vectoriel associé à \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} = A + (\mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v}) = \{M / \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{AM} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}\}$$

$$P = \{\mathbf{AM} / M \in \mathcal{P}\}$$

- Plus généralement un sous-ensemble \mathcal{V} de points de l'espace affine \mathcal{E} est un sous-espace affine passant par $A \in \mathcal{V}$ de direction V si et seulement si le sous-ensemble V est un sous-espace vectoriel :

$$V = \{\mathbf{AM} / M \in \mathcal{V}\}$$

- Ce sous-espace V est indépendant du point de référence $B \in \mathcal{V}$:

$$\forall B \in \mathcal{V} \quad V = \{\mathbf{BM} / M \in \mathcal{V}\}$$

- Cette démonstration note V_A et V_B ces sous-ensembles de vecteurs

issus de $A \in \mathcal{V}$ et de $B \in \mathcal{V}$, et justifie $V_A = V_B$:

$$V_A = \{\mathbf{AM} / M \in \mathcal{V}\} \quad V_B = \{\mathbf{BM} / M \in \mathcal{V}\}$$

Soit $M \in \mathcal{V}$, les vecteurs \mathbf{AM} et \mathbf{AB} sont des vecteurs du sous-espace V_A qui est par hypothèse un sous-espace stable par combinaisons linéaires de vecteurs, donc $\mathbf{BM} = \mathbf{AM} - \mathbf{AB} \in V_A$, et $V_B \subset V_A$.

Réciproquement si $M \in \mathcal{V}$ alors $\mathbf{AM} \in V_A$ et $\mathbf{AM} + \mathbf{AB} \in V_A$ pour la même raison ; il existe donc par définition un point $N \in \mathcal{V}$ vérifiant $\mathbf{AN} = \mathbf{AM} + \mathbf{AB}$; ainsi $\mathbf{BN} = \mathbf{BA} + \mathbf{AN} = \mathbf{AM}$. Cette égalité termine la preuve de $V_A \subset V_B$.

- Ainsi un sous-ensemble de points obtenu à partir d'un point de référence A et des combinaisons linéaires de vecteurs $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ est un sous-espace affine d'espace vectoriel associé V :

$$\mathcal{V} = \left\{ A + \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k \right) / (\lambda_k)_{k=1}^p \in \mathbb{R}^p \right\} \quad V = \text{Vect}(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$$

- Un sous-espace affine est aussi appelé variété affine.

Une droite affine et un plan affine sont des sous-espaces affines dont l'espace vectoriel associé est une droite vectoriel ou un plan vectoriel.

- L'ensemble \mathcal{F} est une variété affine car l'ensemble F associé est un sous-espace vectoriel.

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x + y + z = 3 \right\} \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x + y + z = 0 \right\}$$

$$M \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{F} \quad \begin{array}{l} M \in \mathcal{F} \\ \iff m_x + m_y + m_z = 3 \\ \iff (m_x - 1) + (m_y - 1) + (m_z - 1) = 0 \\ \iff \mathbf{AM} \in F \end{array}$$

La variété affine \mathcal{F} est un plan affine car le sous-espace vectoriel associé F est de base (\mathbf{u}, \mathbf{v}) et de dimension deux. déjà calculée.

- De façon générale le passage d'une variété affine au sous-espace vectoriel associé consiste à supprimer les termes constants ; ici le nombre 3 est remplacé par 0.

- Deux variétés affines sont parallèles si et seulement si leurs sous-espaces vectoriels associés sont les mêmes.

Barycentre

- Le barycentre $G = \text{Bar}(A_k, \alpha_k)_{k=1}^p$ d'une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ points $(A_k)_{k=1}^p$ associés aux coefficients $(\alpha_k)_{k=1}^p \in \mathbb{R}^p$ dont la somme est non nulle est l'unique point G défini de façon équivalente par l'une ou l'autre de ces égalités valables pour tout point Ω :

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{GA}_k = \mathbf{0} \quad \Omega \mathbf{G} = \frac{1}{\sum_{k=1}^p \alpha_k} \left(\sum_{k=1}^p \alpha_k \Omega \mathbf{A}_k \right) \quad \text{pour } \sum_{k=1}^p \alpha_k \neq 0$$

- Cette définition de G ne dépend pas du choix du point Ω ; si le point G' est obtenu à partir de Ω' alors $G = G'$ car $\mathbf{GG}' = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{GG}' &= \mathbf{G}\Omega + \Omega\Omega' + \Omega'\mathbf{G}' \\ &= -\frac{1}{\sum_{k=1}^p \alpha_k} \left(\sum_{k=1}^p \alpha_k \Omega \mathbf{A}_k \right) + \Omega\Omega' + \frac{1}{\sum_{k=1}^p \alpha_k} \left(\sum_{k=1}^p \alpha_k \Omega' \mathbf{A}_k \right) \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^p \alpha_k} \left(\sum_{k=1}^p \alpha_k (\mathbf{A}_k \Omega + \Omega\Omega' + \Omega' \mathbf{A}_k) \right) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

La première égalité correspond à cette définition avec $\Omega = G$.

- Le barycentre ne dépend pas de l'ordre d'énumération des points, il est homogène et associatif, et vérifie ces propriétés une fois supposé $\lambda \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$ et $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$:

$$\text{Bar}(A_k, \lambda \alpha_k)_{k=1}^p = \text{Bar}(A_k, \alpha_k)_{k=1}^p$$

$$\text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta)) = \text{Bar}((B, \beta), (A, \alpha))$$

$$\text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)) = \text{Bar}((\text{Bar}(A, \alpha), (B, \beta)), \alpha + \beta), (C, \gamma))$$

- La propriété d'homogénéité des barycentres permet de restreindre l'étude de ceux-ci aux cas où la somme des coefficients est 1 :

$$\text{Bar}(A_k, \alpha_k)_{k=1}^p = \text{Bar}\left(A_k, \frac{\alpha_k}{\sum_{j=1}^p \alpha_j}\right)_{k=1}^p$$

- Le milieu I de deux points A et B est $\text{Bar}((A, 1), (B, 1))$:

$$\mathbf{AI} = \frac{1}{2}(\mathbf{AA} + \mathbf{AB}) = \frac{1}{2}\mathbf{AB} \quad \mathbf{IB} = \mathbf{IA} + \mathbf{AB} = \frac{1}{2}\mathbf{AB} = \mathbf{AI}$$

- Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points compris entre A et B :

$$\begin{aligned} [AB] &= \left\{ \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta)) / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ ET } (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \right\} \\ &= \left\{ \text{Bar}((A, \alpha), (B, 1 - \alpha)) / \alpha \in [0, 1] \right\} \end{aligned}$$

Repères affines

- Un repère affine $\mathcal{R} = (A, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ est défini à partir d'un point A et d'une base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ de l'espace vectoriel associé à l'espace affine.

- Les coordonnées $(\mu_k)_{k=1}^n$ d'un point M dans le repère affine \mathcal{R} sont les coordonnées du vecteur \mathbf{AM} dans la base \mathcal{B} :

$$M \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad \mathbf{AM} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \mathbf{AM} = \sum_{k=1}^n \mu_k \mathbf{u}_k$$

- Les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}' = (B, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ sont définies à partir de celles de B et de M dans le repère \mathcal{R} :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad M \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad \mathbf{AM} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad B \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad \mathbf{AB} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{BM} = \mathbf{AM} - \mathbf{AB} = \sum_{k=1}^n (\mu_k - \beta_k) \mathbf{u}_k \quad M \begin{pmatrix} \mu_1 - \beta_1 \\ \vdots \\ \mu_n - \beta_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}' } \end{aligned}$$

- Une famille de $n + 1$ points (A_0, A_1, \dots, A_n) est un repère affine de \mathcal{E} si et seulement si la famille des n vecteurs $(\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_k)_{k=1}^n$ forme une base de l'espace vectoriel associé E .

Les coordonnées du point M sont définies de façon similaire à partir des coordonnées du vecteur $\mathbf{A}_0 \mathbf{M}$.

- Le fait que $(A_k)_{k=0}^n$ soit un repère affine ne dépend pas de l'ordre d'énumération des points, mais les coordonnées dépendent de cet ordre.

- Une partie de la preuve consiste à montrer par exemple cette implication qui permute les deux premiers points du repère :

$$(\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_n) \text{ est une base}$$

$$\implies (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_n) \text{ est libre et génératrice}$$

La suite de la démonstration note $\mathbf{u}_k = \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_k$ et $\mathbf{v}_k = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_k$, et

repose sur $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_0\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_k$:

$$\mathbf{v}_0 = -\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_1$$

La preuve que la famille $(\mathbf{v}_k)_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq 1}}$ est libre repose sur l'hypothèse

que la famille $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^n$ est libre :

$$\lambda_0\mathbf{v}_0 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

$$\implies -\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \lambda_3(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1) + \cdots + \lambda_n(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_1) = \mathbf{0}$$

$$\implies -\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \cdots + \lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

$$\implies \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$$

$$\implies \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Prouver que la famille $(\mathbf{v}_k)_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq 1}}$ est génératrice à partir de l'hypo-

thèse que la famille $(\mathbf{u}_k)_{1 \leq k \leq n}$ est génératrice est similaire.

La démonstration de l'implication réciproque est comparable.

Échanger les deux premiers points d'un repère affine conserve la caractéristique de repère affine à cette famille de points. Il en est de même pour l'échange du premier point avec un point quelconque.

L'échange de deux points autres que le point de tête conserve les mêmes familles de vecteurs, énumérées dans un autre ordre, qui restent des bases.

La combinaison de ces propriétés associées à la permutation de deux points quelconques de la famille justifie que le fait d'être un repère affine est indépendant de l'ordre d'énumération de ces points.

• Les coordonnées $(\mu_k)_{k=1}^n$ du point M dans le repère $\mathcal{R} = (A_k)_{k=0}^n$ permet de considérer M comme un barycentre $M = \text{Bar}(A_k, \lambda_k)_{k=0}^n$:

$$M \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad \mathbf{A}_0\mathbf{M} = \sum_{k=1}^n \mu_k \mathbf{A}_0\mathbf{A}_k \quad \mathbf{A}_0\mathbf{M} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \lambda_k} \left(\sum_{k=0}^n \lambda_k \mathbf{A}_0\mathbf{A}_k \right)$$

$$\text{où } \lambda_0 = 1 - \sum_{k=1}^n \mu_k, \lambda_k = \mu_k \text{ lorsque } k \in \{1 \cdots n\}, \text{ et } \sum_{k=0}^n \lambda_k = 1 \neq 0$$

Projections affines

• Lorsque \mathcal{F} est un sous-espace affine de direction F contenant A , et G est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F , la projection affine p sur \mathcal{F} de direction G est définie à partir de la projection vectorielle \vec{p} sur F parallèlement à G :

$$A \in \mathcal{F} \quad N = p(M) \quad \mathbf{AN} = \vec{p}(\mathbf{AM}) \in F \quad \mathbf{MN} \in G$$

Cette construction consiste à décomposer le vecteur \mathbf{AM} sur les sous-espaces supplémentaires $F \oplus G = E$.

Cette décomposition unique permet bien de définir l'application p .

Cette définition est indépendante du point $A \in \mathcal{F}$ choisi.

• Si A' est un point de \mathcal{F} et N' est la projection de N à partir de A' alors le vecteur \mathbf{NN}' est nul, et $N = N'$:

$$\exists! (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in F \times G \quad \mathbf{AM} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad \mathbf{AN} = \mathbf{u}$$

$$\exists! (\mathbf{u}', \mathbf{v}') \in F \times G \quad \mathbf{A'M} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}' \quad \mathbf{A'N'} = \mathbf{u}' \quad \mathbf{AA'} \in F$$

$$\mathbf{AA'} = \mathbf{AM} - \mathbf{A'M} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}') + (\mathbf{v} - \mathbf{v}') \in F$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{AA'} - \mathbf{u} + \mathbf{u}' \in F \cap G = \{\mathbf{0}\} \quad \mathbf{AA'} = \mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{NN'} = \mathbf{NA} + \mathbf{AA'} + \mathbf{A'N'} = -\mathbf{u} + \mathbf{AA'} + \mathbf{u}' = \mathbf{0}$$

• L'expression d'une projection affine découle directement de la projection vectorielle associée, obtenue par exemple à partir de la décomposition des vecteurs sur les sous-espaces vectoriels.

• La projection affine p sur \mathcal{F} de direction G se déduit de la projection vectorielle \vec{p} sur F de direction G déjà calculée :

$$M \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x + y + z = 3 \right\}$$

$$AM \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \quad AN = \tilde{p}(AM) = \begin{pmatrix} \frac{2(x-1) - (y-1) - (z-1)}{3} \\ \frac{2(y-1) - (x-1) - (z-1)}{3} \\ \frac{2(z-1) - (x-1) - (y-1)}{3} \end{pmatrix}$$

$$ON = OA + AN \quad N = p(M) = \begin{pmatrix} \frac{2x - y - z + 3}{3} \\ \frac{2y - x - z + 3}{3} \\ \frac{2z - x - y + 3}{3} \end{pmatrix}$$

Espaces euclidiens

Produit scalaire

- Le produit scalaire canonique de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} de \mathbb{R}^n est défini ainsi :

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^n u_k v_k = \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \in \mathbb{R}$$

- Le produit scalaire est bilinéaire et symétrique :

$$\langle \mathbf{u} + \mathbf{u}' | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}' | \mathbf{v} \rangle \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} + \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v}' \rangle$$

$$\langle \lambda \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \lambda \mathbf{v} \rangle$$

- Les propriétés suivantes sont des conséquences des précédentes :

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0} | \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \langle -\mathbf{u} | -\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle + 2 \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle \quad \langle \lambda \mathbf{u} | \lambda \mathbf{u} \rangle = \lambda^2 \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle$$

Norme euclidienne

- La norme euclidienne $\|\mathbf{u}\|$ d'un vecteur \mathbf{u} est définie à partir du produit scalaire :

$$0 \leq \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n u_k^2}$$

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz est la suivante :

$$|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

- L'étude du signe de cette expression aboutit à l'inégalité de Cauchy :

$$0 \leq \langle \lambda \mathbf{u} + \mathbf{v} | \lambda \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \lambda^2 \|\mathbf{u}\|^2 + 2\lambda \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$$

$$\Delta = 4(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2) \leq 0$$

Une vérification directe justifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz lorsque $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

- La norme euclidienne vérifie ces quatre propriétés caractéristiques :

$$\|\mathbf{u}\| \geq 0 \quad \|\mathbf{u}\| = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$$

- La démonstration de l'inégalité triangulaire, obtenue à partir du carré des normes, repose sur celle de Cauchy-Schwarz :

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2 \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$$

$$\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$$

Les autres propriétés découlent des règles usuelles du calcul algébrique.

- L'inégalité triangulaire précédente a pour conséquence ces autres inégalités triangulaires :

$$\left| \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \right| \leq \|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|$$

- La démonstration consiste, comme pour les modules des complexes, à appliquer l'inégalité triangulaire initiale à $(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) \mp \mathbf{u}$ et à $(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) \mp \mathbf{v}$.

- Le produit scalaire de deux vecteurs peut être calculé à partir de la norme euclidienne :

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2) = \frac{1}{2} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2)$$

- L'égalité suivante propre aux normes euclidiennes est appelée égalité du parallélogramme :

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$$

- Ces preuves reposent sur le développement des produits scalaires :

$$\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} \pm \mathbf{v} | \mathbf{u} \pm \mathbf{v} \rangle^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \pm 2 \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$$

- L'égalité de Pythagore des triangles rectangle s'en déduit lorsque les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont orthogonaux :

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0 \implies \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

- La distance entre les points A et B est définie ainsi :

$$AB = d(A, B) = \|\mathbf{AB}\|$$

Orthogonalité

- Deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont orthogonaux si et seulement si $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0$.

- Les ensembles de vecteurs orthogonaux vérifient les propriétés suivantes lorsque $\lambda \neq 0$ et X est un sous-ensemble de vecteurs :

$$\mathbf{u}^\perp = \{\mathbf{w} / \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle = 0\} \quad \lambda \mathbf{u}^\perp = (\lambda \mathbf{u})^\perp \quad \mathbf{0}^\perp = \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n{}^\perp = \{\mathbf{0}\}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})^\perp = \{\mathbf{w} / \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = 0\} = \mathbf{u}^\perp \cap \mathbf{v}^\perp$$

$$X^\perp = \{\mathbf{w} / \forall \mathbf{u} \in X \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle = 0\} \quad \text{est un sous-espace vectoriel}$$

- Si F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n alors F^\perp est un sous-espace supplémentaire vérifiant ces propositions :

$$F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^n \quad \dim(F^\perp) = n - \dim F \quad (F^\perp)^\perp = F$$

- Ce cours admet ces propriétés dues à la théorie des espaces euclidiens.

Bases orthonormées

- Cette condition définit que la famille $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ est orthonormée :

$$\forall (i, j) \in \{1 \cdots p\}^2 \quad \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Ces vecteurs sont orthogonaux, de norme un et donc non nuls.

- Toute famille orthonormée est libre.
- La preuve ci-dessous montre $\lambda_q = 0$ pour tout $q \in \{1 \cdots p\}$, et donc la famille orthonormée $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^p$ est libre :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0} &\implies 0 = \langle \mathbf{u}_q | \mathbf{0} \rangle = \left\langle \mathbf{u}_q \left| \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{u}_k \right. \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^p \lambda_k \langle \mathbf{u}_q | \mathbf{u}_k \rangle = \sum_{k=1}^p \delta_{k,q} \lambda_k = \lambda_q \end{aligned}$$

- Une famille orthonormée de n vecteurs de \mathbb{R}^n est une base de \mathbb{R}^n , appelée base orthonormée.

La base canonique de \mathbb{R}^n est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

- Le produit scalaire permet de retrouver les coordonnées d'un vecteur \mathbf{v} dans une base orthonormée $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^n$:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{u}_k \quad \langle \mathbf{u}_q | \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle \mathbf{u}_q | \mathbf{u}_k \rangle = \lambda_q$$

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{u}_k | \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_k$$

- Si le sous-espace F a une base orthonormée $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^m$ alors la projection orthogonale de \mathbf{v} sur F est la suivante car $p(\mathbf{v}) \in F$ et $\mathbf{v} - p(\mathbf{v}) \in F^\perp$:

$$F = \text{Vect}(\mathbf{u}_k)_{k=1}^m$$

$$F^\perp = \{\mathbf{w} / \langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{w} \rangle = 0 = \langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{w} \rangle = \cdots = \langle \mathbf{u}_m | \mathbf{w} \rangle\}$$

$$p(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^m \langle \mathbf{u}_k | \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_k \in F$$

$$\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{v} - p(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{v} \rangle - \sum_{k=1}^m \langle \mathbf{u}_k | \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_k \rangle \quad \text{lorsque } i \in \{1 \cdots m\}$$

$$= \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{v} \rangle \times 1 = 0 \quad \mathbf{v} - p(\mathbf{v}) \in F^\perp$$

Déterminants

Déterminants d'ordre deux

- Le déterminant de deux vecteurs \mathbb{R}^2 est défini ainsi :

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

- Le déterminant d'ordre deux est bilinéaire et antisymétrique :

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\det(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

$$\det(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \det(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \det(\mathbf{u}', \mathbf{v})$$

$$\det(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}) = \lambda \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \det(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{v}') = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}')$$

- Ces égalités peuvent être vues comme des conséquences des propriétés précédentes :

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \det(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = 0$$

- Le déterminant de deux vecteurs de \mathbb{R}^2 est nul si et seulement si la famille est liée.
- Si les deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont colinéaires alors $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou \mathbf{v} est de la forme $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$. Dans ces deux cas un simple calcul vérifie que le déterminant est nul.

Réciproquement si le déterminant est nul deux cas sont possibles selon que $u_x = 0$ ou $u_x \neq 0$.

Si $u_x = 0$ alors $u_y v_x = 0$ et pour les deux sous-cas $u_y = 0$ ou $u_y \neq 0$ la famille (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est liée. Pour le premier sous-cas le vecteur \mathbf{u} est nul, et pour le second $v_x = 0$ et $\mathbf{v} = (v_y/u_y)\mathbf{u}$.

Si $u_x \neq 0$ alors la nullité du déterminant aboutit à $v_y = \lambda u_y$ où $\lambda = v_x/u_x$, et de toute façon $v_x = \lambda u_x$, ainsi $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$, et les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont proportionnels.

- Toute famille libre $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ de deux vecteurs de \mathbb{R}^2 est une base et la formule de Cramer détermine les coordonnées d'un vecteur \mathbf{v} dans cette base :

$$\mathbf{v} = \frac{\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}_2)}{\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}\mathbf{u}_1 + \frac{\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{v})}{\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}\mathbf{u}_2$$

- Cette formule peut être vérifiée par le calcul et par la théorie des déterminants.

Elle justifie qu'une famille libre de deux vecteurs de \mathbb{R}^2 est une base.

- Toute famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ de \mathbb{R}^2 vérifie ces équivalences :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \text{ est une base} &\iff (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \text{ est libre} \\ &\iff \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \neq 0 \end{aligned}$$

Déterminants d'ordre trois

- Deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} de \mathbb{R}^3 sont colinéaires si et seulement si ces trois déterminants extraits d'ordre deux sont nuls :

$$\mathbf{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{pmatrix} = 0$$

- Si la famille (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est liée alors $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou \mathbf{v} est de la forme $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$;

dans ces deux cas les propriétés des déterminants d'ordre deux justifient que les trois déterminants précédents sont nuls.

Supposons réciproquement que ces trois déterminants sont nuls, deux cas sont possibles selon que $u_x = u_y = u_z = 0$ ou que $(u_x, u_y, u_z) \neq (0, 0, 0)$.

Dans le premier cas, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et la famille $(\mathbf{0}, \mathbf{v})$ est liée.

Dans le second cas l'une des trois coordonnées u_x , u_y ou u_z est non nulle ; supposons $u_x \neq 0$, comme leurs rôles de u_x , u_y et u_z sont symétriques.

Ainsi le vecteur (u_x, u_y) est non nul et, par conséquent, le vecteur (v_x, v_y) est proportionnel à (u_x, u_y) . Pour la même raison le vecteur (v_x, v_z) est proportionnel à (u_x, u_z) . En outre $u_x \neq 0$ entraîne par les équations suivantes que $\lambda = \mu$, et les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont donc colinéaires :

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad (v_x, v_y) &= \lambda(u_x, u_y) & \exists \mu \in \mathbb{R} \quad (v_x, v_z) &= \mu(u_x, u_z) \\ v_x = \lambda u_x = \mu u_x & & v_y = \lambda u_y & & v_z = \mu u_z & & \lambda = \mu & & \mathbf{v} = \lambda \mathbf{u} \end{aligned}$$

- Le déterminant de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 est défini ainsi :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \det \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \\ &= u_x \det \begin{pmatrix} v_y & w_y \\ v_z & w_z \end{pmatrix} - u_y \det \begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_z & w_z \end{pmatrix} + u_z \det \begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{pmatrix} \\ &= u_x v_y w_z + u_y v_z w_x + u_z v_x w_y - u_z v_y w_x - u_x v_z w_y - u_y v_x w_z \end{aligned}$$

- Le déterminant d'ordre trois est tri-linéaire et antisymétrique :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= -\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -\det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) \\ &= \det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = \det(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$\det(\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \lambda\mathbf{w})$$

$$\det(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}', \mathbf{w})$$

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{w}') = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}')$$

- Les propriétés précédentes aboutissent à ces égalités :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{0}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= 0 = \det(\mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}) \\ &= \det(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

- Le déterminant de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 est nul si et seulement si

la famille est liée.

- La théorie des déterminants justifie cette propriété, il est aussi possible de la démontrer par un calcul coordonnée par coordonnée. Si la famille $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est liée, l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres et les propriétés précédentes justifient que ce déterminant est nul ; par exemple si $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$:

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) + \mu \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$$

Réciproquement si ce déterminant d'ordre trois est nul, deux cas sont possibles : les deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont proportionnels ou non.

S'ils sont proportionnels la famille (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est liée et la sur-famille $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est liée.

Sinon l'un des trois déterminants d'ordre deux associé à \mathbf{u} et \mathbf{v} est non nul. La démonstration est similaire dans les trois cas. Supposons que $d \neq 0$. Le système linéaire suivant est de Cramer et possède une et une seule solution (λ, μ) . Un calcul algébrique sur la troisième coordonnée exploite que $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ et justifie ensuite que $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$:

$$d = u_x v_y - u_y v_x \neq 0 \quad \begin{cases} \lambda u_x + \mu v_x = w_x \\ \lambda u_y + \mu v_y = w_y \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{w_x v_y - w_y v_x}{d} \quad \mu = \frac{u_x w_y - u_y w_x}{d}$$

$$\lambda u_z + \mu v_z - w_z = \frac{\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}{d} = 0$$

- Toute famille libre $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 est une base, et la formule de Cramer détermine les coordonnées d'un vecteur \mathbf{v} dans cette base :

$$\mathbf{v} = \frac{\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)}{\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)} \mathbf{u}_1 + \frac{\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, \mathbf{u}_3)}{\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)} \mathbf{u}_2 + \frac{\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})}{\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)} \mathbf{u}_3$$

- Cette formule peut être vérifiée par le calcul et par la théorie des déterminants.

- Toute famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ de \mathbb{R}^3 vérifient ces équivalences :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \text{ est une base} &\iff (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \text{ est libre} \\ &\iff \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \neq 0 \end{aligned}$$

Propriétés communes des déterminants

- Le déterminant ne change pas en ajoutant à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs ; ainsi un déterminant de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 vérifie cette égalité :

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \lambda \det(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mu \det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

- Les règles de calcul sur les colonnes des déterminants s'appliquent aussi à ses lignes.
- Les formules de Cramer permettent de résoudre les systèmes linéaires carrés à deux ou trois inconnues.
- Ainsi le système suivant possède un unique couple (x, y) de solution :

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \quad x = \frac{\det \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} = 3 \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} = 2$$

GÉOMÉTRIE DU PLAN

Ce chapitre étudie la géométrie du plan initialement assimilé à l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 .

Repérage dans le plan

Repère canonique

- Le repère canonique du plan affine est $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ où la famille $\mathcal{B}_c = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ est la base canonique du plan vectoriel \mathbb{R}^2 :

$$O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad OM = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

Angles

La suite de ce chapitre suppose connues les relations trigonométriques fondées sur les formules d'addition et le relèvement d'un vecteur.

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ le vecteur \mathbf{u}_θ est défini ainsi et vérifie ces propriétés :

$$\mathbf{u}_\theta \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{i} = \mathbf{u}_0 \quad \mathbf{j} = \mathbf{u}_{\pi/2}$$

$$\mathbf{u}_{\theta+\pi} = -\mathbf{u}_\theta \quad \mathbf{u}_{\theta+2\pi} = \mathbf{u}_\theta \quad \|\mathbf{u}_\theta\| = 1$$

- Réciproquement tout vecteur unitaire est de la forme \mathbf{u}_θ .

Tout vecteur \mathbf{u} peut s'écrire sous la forme $\|\mathbf{u}\|\mathbf{u}_\theta$.

Lorsque le vecteur \mathbf{u} est non nul, la valeur de θ est définie à 2π près et est en général choisie dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$; cette dernière condition entraîne que θ est unique.

- L'angle entre les deux vecteurs $\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|\mathbf{u}_\theta$ et $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}_\varphi$ non nuls est $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \varphi - \theta [\pm 2\pi]$ de façon à ce que sa valeur soit dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$; ainsi $\mathbf{i}\mathbf{u}_\theta \in \theta + 2\pi\mathbb{Z}$.

- Par abus de notation les égalités angulaires $\theta = \varphi$ signifient généralement $\varphi - \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

- Ce formulaire découle des définitions précédentes :

$$\widehat{\lambda\mathbf{u}\ \mu\mathbf{v}} = \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} \quad \text{si } \lambda > 0 \text{ et } \mu > 0 \quad \widehat{\mathbf{v}\mathbf{u}} = -\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} [\pm 2\pi]$$

$$\widehat{(-\mathbf{u})\mathbf{v}} = \widehat{\mathbf{u}(-\mathbf{v})} = \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} \pm \pi \quad \widehat{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} + \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} [\pm 2\pi]$$

- L'angle \widehat{ABC} entre des points A, B et C distincts est \widehat{BABC} :

$$\widehat{BAC} + \widehat{CBA} + \widehat{ACB} = \pm\pi$$

- La preuve repose sur le formulaire précédent :

$$\begin{aligned} \widehat{BAC} + \widehat{CBA} + \widehat{ACB} &= \widehat{ABAC} + \widehat{BCBA} + \widehat{CACB} \\ &= \widehat{ABAC} + (-\widehat{BC})(-\widehat{BA}) + \widehat{CACB} \\ &= \widehat{ABAC} + \widehat{CBAB} + \widehat{ABAC} = \widehat{CAAC} = \pm\pi \end{aligned}$$

- Le produit scalaire et le déterminant calculé dans la base canonique permettent déterminer l'angle de deux vecteurs non nuls :

$$\langle \mathbf{u}_\theta | \mathbf{u}_\varphi \rangle = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = \cos(\varphi - \theta) = \cos \widehat{\mathbf{u}_\theta \mathbf{u}_\varphi}$$

$$\det(\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi) = \cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi = \sin(\varphi - \theta) = \sin \widehat{\mathbf{u}_\theta \mathbf{u}_\varphi}$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) = \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \quad \sin(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) = \frac{\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

Coordonnées polaires

- Tout vecteur OA ou \mathbf{u} peut s'écrire sous la forme $r\mathbf{u}_\theta$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$; dans ce cas le couple (r, θ) définit les coordonnées polaires du vecteur \mathbf{u} et du point A par rapport à l'origine O .

$$\mathbf{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = r\mathbf{u}_\theta \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \widehat{\mathbf{i}\mathbf{u}} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Les coordonnées polaires du plan et des complexes sont similaires.

- Deux couples de coordonnées polaires $(r_1, \theta_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(r_2, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ définissent le même vecteur à ces conditions nécessaires et suffisantes :

$$\begin{cases} (r_2 = r_1 \text{ ET } \theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}) \\ \text{OU } (r_2 = -r_1 \text{ ET } \theta_2 - \theta_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}) \\ \text{OU } r_2 = r_1 = 0 \end{cases}$$

Géométrie et algèbre linéaire

Base du plan

Ces résultats ont été justifiés dans le chapitre précédent.

- Le plan vectoriel \mathbb{R}^2 est un espace vectoriel de dimension 2.
- Deux vecteurs forment une famille libre du plan, si et seulement si leur déterminant obtenu à partir des coordonnées dans la base canonique est non nul :

$$\mathbf{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

- Toute famille libre de deux vecteurs du plan est une base. Toute famille de deux vecteurs du plan est soit constituée de deux vecteurs colinéaires, soit une base. Toute base du plan est constituée de deux vecteurs.
- Deux vecteurs \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 forment une base du plan à cette condition :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \text{ est une base} &\iff (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \text{ est libre} \\ &\iff \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \neq 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas la méthode de Cramer permet d'obtenir les coordonnées d'un vecteur quelconque dans cette base.

Déterminant par rapport à une base

- La définition initiale du déterminant fait intervenir les coordonnées des vecteurs dans la base canonique. Le déterminant de deux vecteurs dans la base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est le suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 & \mathbf{w} &= w_1 \mathbf{u}_1 + w_2 \mathbf{u}_2 \\ \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{aligned}$$

- Les deux définitions des déterminants sont reliées par cette égalité : $\det_{\mathcal{B}_c}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
- Le déterminant par rapport à une base quelconque est bilinéaire et antisymétrique.
- La famille (\mathbf{v}, \mathbf{w}) est libre si et seulement si son déterminant $\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ par rapport à une base quelconque \mathcal{B} est non nul.

- Les démonstrations sont similaires à celles faites pour les déterminants dans la base canonique, les coordonnées des vecteurs sont considérées dans la base \mathcal{B} et non la base canonique \mathcal{B}_c .

Géométrie euclidienne

Vecteurs orthogonaux

- Deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont orthogonaux si et seulement si $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0$. Cette condition est équivalente pour deux vecteurs non nuls \mathbf{u} et \mathbf{v} à la mesure de l'angle $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \pm \frac{\pi}{2}$.
- La preuve de cette équivalence est justifiée par le lien entre le produit scalaire et le cosinus.
- L'ensemble \mathbf{u}^\perp des vecteurs sont orthogonaux à \mathbf{u} vérifie ces propriétés lorsque $\lambda \neq 0$ et $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\mathbf{0}^\perp = \mathbb{R}^2 \quad (\lambda \mathbf{u})^\perp = \mathbf{u}^\perp \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\perp = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_\theta^\perp = \mathbb{R} \mathbf{u}_{\theta \pm \pi/2}$$

- Lorsque $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, la famille à un vecteur (\mathbf{u}) est une base de la droite vectorielle $\mathbb{R}\mathbf{u}$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\mathbf{u} \oplus \mathbf{u}^\perp \quad \dim(\mathbb{R}\mathbf{u}) = 1 \quad \dim \mathbf{u}^\perp = 1$$

- Deux vecteurs forment une famille orthonormée (\mathbf{u}, \mathbf{v}) si et seulement si les deux vecteurs sont orthogonaux et de norme un :

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 = 1$$

Bases orthonormées

- Toute famille orthonormée de deux vecteurs de \mathbb{R}^2 est libre et est donc une base, appelée base orthonormée. Toute base orthonormée du plan est de la forme $(\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_{\theta \pm \pi/2})$.
- Les coordonnées dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_{\theta \pm \pi/2})$ d'un vecteur quelconque \mathbf{v} dans la base \mathcal{B} est $(\langle \mathbf{u}_\theta | \mathbf{v} \rangle, \langle \mathbf{u}_{\theta \pm \pi/2} | \mathbf{v} \rangle)$:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{u}_\theta | \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_\theta + \langle \mathbf{u}_{\theta \pm \pi/2} | \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_{\theta \pm \pi/2}$$

Le paragraphe sur les espaces euclidiens du chapitre précédent démontre ce résultat en toute généralité.

- Une base orthonormée de la forme $(\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_{\theta+\pi/2})$ est directe, et une base orthonormée de la forme $(\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_{\theta-\pi/2})$ est indirecte :

$$\det(\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_{\theta+\pi/2}) = 1 \quad \det(\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_{\theta-\pi/2}) = -1$$

Produit scalaire et déterminant dans une base orthonormée

- Dans le cas où $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_{\theta\pm\pi/2})$ est une base orthonormée, la formule du produit scalaire est la suivante :

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_\theta + v_2\mathbf{u}_{\theta\pm\pi/2} \quad \mathbf{w} = w_1\mathbf{u}_\theta + w_2\mathbf{u}_{\theta\pm\pi/2} \quad \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = v_1w_1 + v_2w_2$$

Autrement dit, la formule du produit scalaire en fonction des coordonnées des vecteurs est la même dans n'importe quelle base orthonormée, la même formule que celle dans la base canonique (\mathbf{i}, \mathbf{j}) .

- Le déterminant de deux vecteurs est le même dans toute base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_{\theta+\pi/2})$:

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det_{\mathcal{B}_c}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

- Dans la base \mathcal{B} les coordonnées de \mathbf{v} et \mathbf{w} sont les suivantes ; le déterminant s'en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = \langle \mathbf{u}_\theta | \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_\theta + \langle \mathbf{u}_{\theta+\pi/2} | \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_{\theta+\pi/2} \\ &= (\cos \theta v_x + \sin \theta v_y)\mathbf{u}_\theta + (-\sin \theta v_x + \cos \theta v_y)\mathbf{u}_{\theta+\pi/2} \\ \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\cos \theta v_x + \sin \theta v_y)(-\sin \theta w_x + \cos \theta w_y) \\ &\quad - (-\sin \theta v_x + \cos \theta v_y)(\cos \theta w_x + \sin \theta w_y) \\ &= v_xw_y - v_yw_x = \det_{\mathcal{B}_c}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

- Le déterminant dans une base orthonormée indirecte \mathcal{B}' change de signe :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det_{\mathcal{B}_c}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

La preuve est similaire à la précédente en remplaçant $\mathbf{u}_{\theta+\pi/2}$ par $\mathbf{u}_{\theta-\pi/2}$.

- Le cosinus et le sinus d'un angle $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}$ de deux vecteurs peuvent donc se calculer à partir des coordonnées dans n'importe quelle base orthonormée directe \mathcal{B} :

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) = \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \quad \sin(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) = \frac{\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

- Le déterminant $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ mesure la surface du parallélogramme porté par les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} , et $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{AC})/2$ est l'aire orientée

du triangle ABC :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}) &= \det(\mathbf{BC}, \mathbf{BA}) = \det(\mathbf{CA}, \mathbf{CB}) \\ &= \|\mathbf{AB}\|\|\mathbf{AC}\| \sin(\widehat{BAC}) \end{aligned}$$

- La preuve de ces égalités reposent sur l'anti-symétrie et la bilinéarité des déterminants d'ordre deux, par exemple :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{BC}, \mathbf{BA}) &= \det(\mathbf{BA} + \mathbf{AC}, \mathbf{BA}) = \det(\mathbf{BA}, \mathbf{BA}) + \det(\mathbf{AC}, \mathbf{BA}) \\ &= -\det(\mathbf{AC}, \mathbf{AB}) = +\det(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}) \end{aligned}$$

- Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont colinéaires si et seulement si $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = 0$ ou $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \pi$, ce qui correspond à un déterminant nul.

Projections orthogonales

Les projections orthogonales du plan vectoriel sont un cas particulier des projections étudiées dans le chapitre précédent.

- Une base orthonormée de la droite vectorielle $\mathbb{R}\mathbf{u}$ est $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ qui est de la forme \mathbf{u}_θ .

La projection orthogonale $p(\mathbf{v})$ du vecteur \mathbf{v} sur $\mathbb{R}\mathbf{u}_\theta$ est celle-ci :

$$p(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}_\theta | \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_\theta = \|\mathbf{v}\| \cos(\widehat{\mathbf{u}_\theta\mathbf{v}}) \mathbf{u}_\theta \in \mathbb{R}\mathbf{u}_\theta = \mathbb{R}\mathbf{u}$$

- La projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}\mathbf{u}$ est la suivante car le vecteur $(1/5)\mathbf{u}$ est unitaire :

$$\mathbf{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3x + 4y}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Droites du plan

Définitions équivalentes

- Toute droite \mathcal{D} du plan peut être définie de quatre façons équivalentes :

- par deux points distincts A et B ,
- par un point A et un vecteur non nul \mathbf{u} ,
- par un point A et un vecteur $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ orthogonal à \mathbf{u} , et
- par une équation $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= A + \mathbb{R}\mathbf{u} = A + \mathbb{R}\mathbf{AB} = \{M / \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \mathbf{AM} = \lambda \mathbf{u}\} \\
&= \{\text{Bar}((A, \lambda), (B, 1 - \lambda)) / \lambda \in \mathbb{R}\} & \mathbf{AB} &= \mathbf{u} \\
&= \{\text{Bar}((A, \lambda), (B, \mu)) / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ ET } \lambda + \mu \neq 0\} \\
&= \{M / \det(\mathbf{AB}, \mathbf{AM}) = 0\} \\
&= \{M / \langle \mathbf{AM} | \mathbf{v} \rangle = 0\} & \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \\
&= \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / ax + by + c = 0 \right\} & c &= -(aa_x + ba_y) \\
\langle \mathbf{AM} | \mathbf{v} \rangle &= ax + by - (aa_x + ba_y) & A &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} & M &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D} & \begin{pmatrix} 0 \\ -c/b \end{pmatrix} \in \mathcal{D} & \det(\mathbf{AB}, \mathbf{AM}) &= \det \begin{pmatrix} a_x & b_x & x \\ a_y & b_y & y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- La méthode de Cramer permet de calculer le point d'intersection des deux droites (AB) et (CD) supposées sécantes :

$$\begin{aligned}
& A \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad D \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} \\
(AB) & : \det(\mathbf{AB}, \mathbf{AM}) = \det \begin{pmatrix} -a & x - a \\ b & y \end{pmatrix} = ab - bx - ay = 0 \\
(CD) & : \det(\mathbf{CD}, \mathbf{CM}) = \det \begin{pmatrix} -c & x - c \\ d & y \end{pmatrix} = cd - dx - cy = 0 \\
\begin{cases} bx + ay = ab \\ dx + cy = cd \end{cases} & x = \frac{abc - adc}{bc - ad} = \frac{ac(b - d)}{bc - ad} \quad y = \frac{bcd - abd}{bc - ad} = \frac{bd(c - a)}{bc - ad}
\end{aligned}$$

Ces deux droites sont sécantes si et seulement si $bc - ad \neq 0$.

Distance d'un point à une droite

- La distance $d(M, \mathcal{D})$ d'un point M à une droite \mathcal{D} de vecteur directeur \mathbf{u} est la plus petite des distances de M à un point quelconque X de \mathcal{D} :

$$d(M, \mathcal{D}) = \min \{ \|\mathbf{MX}\| / X \in \mathcal{D} \} = \|\mathbf{MB}\|$$

Le point B est la projection orthogonale de M sur \mathcal{D} , c'est-à-dire $B \in \mathcal{D}$ et $\mathbf{MB} \in \mathbf{u}^\perp$; dans ce cas $\|\mathbf{MB}\|^2 \leq \|\mathbf{MB}\|^2 + \|\mathbf{BX}\|^2 = \|\mathbf{MX}\|^2$.

- Lorsque $A \in \mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$, et $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ est un vecteur orthogonal à \mathcal{D} , cette distance est obtenue par une projection orthogonale sans qu'il soit nécessaire de déterminer le point B :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|\langle \mathbf{AM} | \mathbf{v} \rangle|}{\sqrt{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle}} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Avec ces notations $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ est une base orthonormée de D^\perp où D est la droite vectorielle associée à \mathcal{D} :

$$\begin{aligned}
M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad aa_x + ba_y + c = 0 \\
\langle \mathbf{v} | \mathbf{AM} \rangle = a(x - a_x) + b(y - a_y) = ax + by - c \\
\mathbf{AB} = \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{AM} \rangle}{\|\mathbf{v}\|} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad \|\mathbf{AB}\| = \frac{|\langle \mathbf{v} | \mathbf{AM} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|}
\end{aligned}$$

- Ainsi la distance de l'origine à la droite d'équation $3x + 4y = 2$ est $2/5$.

Équation polaire d'une droite

- Toute droite D possède deux vecteurs directeurs unitaires, de la forme $\pm \mathbf{u}_\theta$, l'angle θ est défini modulo π et caractérise l'angle de la droite D .
- Les équations en coordonnées cartésiennes puis polaires d'une droite \mathcal{D} de vecteur directeur orthogonal à \mathbf{u}_α et passant par le point H défini par $\mathbf{OH} = h\mathbf{u}_\alpha$ sont les suivantes :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \langle \mathbf{u}_\alpha | \mathbf{OM} \rangle = \langle \mathbf{u}_\alpha | \mathbf{OH} \rangle = h \quad \cos \alpha x + \sin \alpha y = h$$

$$\mathbf{OM} = r\mathbf{u}_\theta \quad r \cos \alpha \cos \theta + r \sin \alpha \sin \theta = h \quad r = \frac{h}{\cos(\theta - \alpha)}$$

Le point H est la projection orthogonale de O sur \mathcal{D} .

- Réciproquement toute équation cette forme est celle d'une droite :

$$r = \frac{1}{a \cos \theta + b \sin \theta} \quad h = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Les cercles

Définition et équation cartésienne

- Le cercle \mathcal{C} de centre Ω et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$ est défini ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{M / \|\Omega M\| = R\} = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / (x - \omega_x)^2 + (y - \omega_y)^2 = R^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \omega_x + R \cos t \\ \omega_y + R \sin t \end{pmatrix} / t \in]-\pi, \pi] \right\} \quad \Omega \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Réciproquement l'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ représente un cercle de centre $(-a/2, -b/2)$, un point ou l'ensemble vide.

Caractérisation des cercles

- Le cercle \mathcal{C} de diamètre $[A B]$ est le cercle dont le centre est le milieu I du segment $[A B]$, et le rayon est $\|\mathbf{AB}\|/2$:

$$\mathcal{C} = \{M / \langle \mathbf{MA} | \mathbf{MB} \rangle = 0\}$$

- La preuve repose sur le développement de ce produit scalaire où $\mathbf{AI} = \mathbf{IB}$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{IM}\|^2 &= \langle \mathbf{IM} | \mathbf{IM} \rangle = \langle \mathbf{IA} + \mathbf{AM} | \mathbf{IB} + \mathbf{BM} \rangle \\ &= \langle \mathbf{IA} | \mathbf{IB} \rangle + \langle \mathbf{IA} | \mathbf{BM} \rangle + \langle \mathbf{IB} | \mathbf{AM} \rangle + \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle \\ &= -\|\mathbf{IA}\|^2 + \langle \mathbf{IA} | \mathbf{BM} \rangle - \langle \mathbf{IA} | \mathbf{AM} \rangle + \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle \\ &= -\|\mathbf{IA}\|^2 + \langle \mathbf{IA} | \mathbf{BM} - \mathbf{AM} \rangle + \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle \\ &= -\|\mathbf{IA}\|^2 + \langle \mathbf{IA} | \mathbf{BA} \rangle + \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle \\ &= -\|\mathbf{IA}\|^2 + 2\|\mathbf{IA}\|^2 + \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle = \|\mathbf{IA}\|^2 + \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle \\ \|\mathbf{IM}\| &= \|\mathbf{IA}\| \iff \|\mathbf{IM}\|^2 = \|\mathbf{IA}\|^2 \iff \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle = 0 \end{aligned}$$

- L'intersection d'une droite \mathcal{D} et d'un cercle de centre Ω et de rayon R est l'ensemble vide, un ou deux points, selon que la distance du centre à la droite $d(\Omega, \mathcal{D})$ est supérieur, inférieur ou égal à R .

- Le paramétrage du cercle de centre I et de rayon 1 aboutit à l'équation polaire du cercle $r(\theta) = 2 \cos \theta$:

$$\begin{cases} x(\alpha) = 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2(\alpha/2) \\ y(\alpha) = \sin \alpha = 2 \cos(\alpha/2) \sin(\alpha/2) \end{cases} \\ \mathbf{OM}(\alpha) = 2 \cos \theta \mathbf{u}_\theta \quad \theta = \alpha/2$$

- Plus généralement l'équation polaire du cercle passant par O et de centre Ω vérifiant $\mathbf{O}\Omega = R\mathbf{u}_\alpha$ est la suivante :

$$r(\theta) = 2R \cos(\theta - \alpha) = a \cos \theta + b \sin \theta \quad 2R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Cette équation polaire se déduit de la précédente par une homothétie de rapport R et une rotation d'angle α .

Théorèmes de l'angle inscrit

- Si A, B et M sont trois points distincts d'un même cercle de centre Ω alors $\widehat{A\Omega B} = 2\widehat{AMB} [\pm 2\pi]$.

- La caractérisation du cercle à partir d'un produit scalaire est un cas particulier du théorème de l'angle inscrit pour un angle de $\pm\pi/2$.

- Une démonstration algébrique est possible, en effectuant les calculs dans le repère orthonormé direct $(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ où le point Ω est le centre du cercle, et le vecteur \mathbf{v} proportionnel à \mathbf{AB} .

Avec ces hypothèses les coordonnées d'un point M du cercle, de A et de B sont de la forme suivante, et dans le cas général, vérifient ces égalités :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} R \cos \alpha \\ -R \sin \alpha \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} R \cos \alpha \\ R \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \widehat{A\Omega B} = 2\alpha \\ \tan(\widehat{AMB}) = \frac{\sin(\widehat{AMB})}{\cos(\widehat{AMB})} = \frac{\det(\mathbf{MA}, \mathbf{MB})}{\langle \mathbf{MA} | \mathbf{MB} \rangle} \\ = \frac{(\cos \alpha - \cos \theta)(\sin \alpha - \sin \theta) - (-\sin \alpha - \sin \theta)(\cos \alpha - \cos \theta)}{(\cos \alpha - \cos \theta)(\cos \alpha - \cos \theta) + (-\sin \alpha - \sin \theta)(\sin \alpha - \sin \theta)} \\ = \frac{2 \sin \alpha (\cos \alpha - \cos \theta)}{\cos^2 \alpha - 2 \cos \theta \cos \alpha + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)} \\ = \frac{2 \sin \alpha (\cos \alpha - \cos \theta)}{\cos^2 \alpha - 2 \cos \theta \cos \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (\cos \alpha - \cos \theta)}{2 \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \theta)} = \tan \alpha \end{aligned}$$

Cette démonstration n'est pas valable dans deux cas. Le cas $\cos \alpha = \cos \theta$ correspond à $M = A$ ou $M = B$, et est exclu par hypothèse. Le cas $\cos \alpha = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \pm\pi/2$ et $\widehat{A\Omega B} = \pm\pi$ correspond en fait à la caractérisation d'un cercle par le produit scalaire où le centre Ω du cercle est le milieu du segment $[A B]$.

L'égalité $\tan(\widehat{AMB}) = \tan \alpha$ justifie successivement $\widehat{AMB} = \alpha$ modulo π , puis $2\widehat{AMB} = \widehat{A\Omega B}$.

- Une démonstration géométrique est aussi possible à partir des triangles $A\Omega M$ et $B\Omega M$ isocèles en Ω :

$$\begin{aligned}\widehat{MA\Omega} &= \widehat{\Omega MA} & \widehat{A\Omega M} &= \pi - 2\widehat{\Omega MA} \\ \widehat{MB\Omega} &= \widehat{\Omega MB} & \widehat{B\Omega M} &= \pi - 2\widehat{\Omega MB} \\ \widehat{A\Omega B} &= \widehat{A\Omega M} + \widehat{M\Omega B} = (\pi - 2\widehat{\Omega MA}) - (\pi - 2\widehat{\Omega MB}) \\ &= 2(\widehat{\Omega MB} - \widehat{\Omega MA}) = 2\widehat{AMB}\end{aligned}$$

- L'ensemble des points M vérifiant $\widehat{AMB} = 0$ modulo π est la droite (AB) sauf ces deux points.
- La démonstration repose sur le calcul du déterminant :

$$\det(\mathbf{AB}, \mathbf{AM}) = \|\mathbf{MA}\| \|\mathbf{MB}\| \sin(\widehat{AMB})$$

- L'ensemble des points M tel que $\widehat{AMB} = \alpha \neq 0$ modulo π est un cercle passant par A et B , sauf les points A et B .

La valeur de l'angle \widehat{AMB} défini à 2π près dépend de quel côté M est placé par rapport à A et à B .

- Notons \mathcal{C} le cercle contenant A et B dont le centre Ω vérifie $\widehat{A\Omega B} = 2\alpha$. Ce cercle existe et est unique, et son centre est sur la médiatrice \mathcal{D} de $[AB]$. En effet l'angle \widehat{AMB} varie de 0 à 2π de façon continue et strictement monotone lorsque M décrit la droite \mathcal{D} d'une extrémité à l'autre.

Le théorème précédent justifie que tous les points de ce cercle sauf A et B sont des points-solutions de ce théorème.

- Réciproquement tout les points M du plan sauf ceux de la droite (AB) et ceux de la droite tangente au cercle \mathcal{C} en A sont sur une certaine droite (AM) qui coupe le cercle \mathcal{C} en un point N autre que A et B . Dans le cas où $M \neq N$, la famille $(\mathbf{BM}, \mathbf{BN})$ est libre, et donc les angles $\widehat{ANB} = \alpha$ et \widehat{AMB} sont différents modulo π .

Les points M sur la droite (AB) vérifient $\widehat{AMB} = 0$ ou $\widehat{AMB} = \pi$ et ne sont pas solution car $\alpha \neq 0$. La construction précédente n'est pas non plus possible pour les points de la tangente en A à \mathcal{C} , dans ce cas l'échange des rôles de A et B permet de conclure de la même façon, sauf pour le point d'intersection des deux tangentes au cercle en A et en B , qui, pour une raison du signe de l'angle n'est pas non plus solution.

En conclusion la seule possibilité pour avoir $\widehat{AMB} = \alpha$ modulo π

est que $M = N$; ainsi l'ensemble des solutions contient le cercle précédent.

ÉTUDE DES CONIQUES

Dans ce chapitre le plan affine \mathbb{R}^2 est noté \mathcal{P} , il est muni de la distance usuelle associée au produit scalaire canonique; Δ est une droite affine, le point $F \in \mathcal{P}$ n'est pas sur la droite Δ , le point H est la projection orthogonale de F sur Δ , et $e \in \mathbb{R}_+^*$.

La distance d'un point M à la droite Δ est $d(M, \Delta) = \|MN\|$ où le point N est la projection orthogonale de M sur Δ , et δ est défini ainsi :

$$\delta = d(F, H) = d(F, \Delta) > 0$$

La base orthonormée (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est construite de façon à ce que le vecteur \mathbf{v} soit un vecteur directeur de Δ et $H\mathbf{F} = \delta\mathbf{u}$, généralement le vecteur \mathbf{u} est représenté horizontalement et \mathbf{v} verticalement.

Définition géométrique et équation cartésienne

Dans les définitions suivantes, les coordonnées d'un point $M \in \mathcal{P}$ sont notées (X, Y) dans le repère $(F, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ et (x, y) dans le repère $(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ une fois fixé le point $\Omega \in \mathcal{P}$:

$$FM = Xu + Yv \quad \Omega M = xu + yv$$

- La conique \mathcal{C} de foyer F , de directrice Δ et d'excentricité e est l'ensemble de points ci-dessous :

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} \mid \frac{d(M, F)}{d(M, \Delta)} = e \right\}.$$

- L'équation de \mathcal{C} dans le repère $(F, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ est celle-ci :

$$(1 - e^2)X^2 - 2e^2\delta X + Y^2 = \delta^2 e^2.$$

Étude des paraboles - cas $e = 1$

- Dans ce cas l'équation de \mathcal{C} est la suivante dans le repère $(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ où Ω est le milieu du segment $[HF]$:

$$y^2 = 2\delta x \quad H\Omega = \Omega F = \frac{\delta}{2} \mathbf{u}$$

Étude des ellipses - cas $0 < e < 1$

- Cette équation de \mathcal{C} dans le repère $(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ est obtenue à partir de la précédente par réduction sous la forme d'un carré du terme en x , et le point Ω est défini ainsi :

$$a = \frac{e\delta}{1 - e^2} \quad b = \frac{e\delta}{\sqrt{1 - e^2}} < a \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{e^2\delta}{1 - e^2} = d(F, \Omega)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad F\Omega = +c\mathbf{u}$$

Les points A, A', B et B' d'intersections de l'ellipse avec les axes Ωx et Ωy sont appelés les sommets de l'ellipse, le segment $[AA']$ est le grand axe, et $[BB']$ le petit axe. Le point Ω est le centre de l'ellipse.

Étude des hyperboles - cas $1 < e$

- La même transformation d'équation aboutit dans ce cas à cette équation dans le repère $(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, et définit ainsi le point Ω qui est le centre de l'hyperbole :

$$a = \frac{e\delta}{e^2 - 1} \quad b = \frac{e\delta}{\sqrt{e^2 - 1}} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{e^2\delta}{e^2 - 1} = d(F, \Omega)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad F\Omega = -c\mathbf{u}$$

Étude réciproque de l'équation algébrique

Les équations étudiées dans ces réciproques sont exprimées dans le repère orthonormé $(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ du plan; dans ces trois cas la directrice Δ est dirigée par le vecteur \mathbf{v} et contient le point H .

- Réciproquement l'équation ci-dessous est celle de l'ellipse où l'excentricité e , un foyer F et un point H sont ceux-ci :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{où } 0 < b < a \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad e = \frac{c}{a} < 1 \quad \delta = \frac{b^2}{c}$$

$$H\mathbf{F} = \delta\mathbf{u} \quad \Omega\mathbf{F} = -c\mathbf{u} \quad \Omega\mathbf{H} = \frac{\delta}{e^2 - 1} \mathbf{u} = -\frac{a^2}{c} \mathbf{u}$$

- De même l'équation ci-dessous représente cette hyperbole :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad e = \frac{c}{a} > 1 \quad \delta = \frac{b^2}{c}$$

$$H\mathbf{F} = \delta\mathbf{u} \quad \Omega\mathbf{F} = +c\mathbf{u} \quad \Omega\mathbf{H} = \frac{\delta}{e^2 - 1} \mathbf{u} = \frac{a^2}{c} \mathbf{u}$$

- Une étude analytique de cette courbe ou des critères algébriques justifient que les asymptotes de l'hyperbole sont ces deux droites :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

- Le graphe de cette fonction trinôme dans le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ est la parabole où le point Ω est au sommet de celle-ci, le foyer F , et la directrice Δ est une droite horizontale :

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ et } (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \quad \delta = \frac{|\alpha|}{2}$$

$$\Omega \left(\begin{array}{c} -\frac{\alpha}{2\beta} \\ \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \end{array} \right) \quad \Delta : y = \frac{4\alpha\gamma - \alpha^2 - \beta^2}{4\alpha} \quad \text{dans le repère canonique}$$

Récapitulatif

- Lorsque a et b sont des réels strictement positifs, les quatre équations suivantes définissent une ellipse, une hyperbole, un cercle ou l'ensemble vide ; la directrice est une droite parallèle à l'un des axes Ωx ou Ωy :

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Cette définition géométrique des coniques exclut les cercles, alors que l'équation des cercles de rayon $R > 0$ fait naturellement partie de cette famille des équations cartésiennes des coniques avec $a = b = R$.
- Lorsque l'excentricité $e < 1$ tend vers 1, l'ellipse correspondante est de plus en plus allongée — le quotient a/b tend vers $+\infty$ — et sa forme se rapproche de celle d'une parabole autour de l'origine.
- Au contraire lorsque l'excentricité $e > 0$ tend vers 0, l'ellipse correspondante est de plus en plus circulaire — le quotient a/b tend vers 1 — pour ressembler à un cercle.

Définition bifocale

- La symétrie des formules cartésiennes dans le repère orthonormé $(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ montre que les droites Ωx et Ωy sont des axes de symétries des ellipses et des hyperboles ; ces coniques possèdent en fait deux couples foyer et directrice symétriques par rapport à l'origine Ω , ils sont notés (F, Δ) et (F', Δ') :

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Omega F = -\Omega F' \quad \Omega H = -\Omega H' \quad H' \in \Delta'$$

- L'ensemble suivant définit l'unique ellipse dont les deux foyers sont les points F et F' et le demi grand axe est de longueur a :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} / d(M, F) + d(M, F') = 2a\}$$

$$c = \frac{\|FF'\|}{2} < a \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad e = \frac{c}{a}$$

- Tout les points M de l'ellipse dont les foyers sont F et F' , d'excentricité $e = c/a$ et de directrice Δ et Δ' vérifient cette définition bifocale :

$$\frac{d(M, F)}{d(M, \Delta)} = \frac{d(M, F')}{d(M, \Delta')} = e$$

$$d(M, F) + d(M, F') = e(d(M, \Delta) + d(M, \Delta')) = e d(\Delta, \Delta') = \frac{2ea^2}{c} = 2a$$

Ces égalités sont justifiées du fait que les droites Δ et Δ' sont parallèles, et que le point M sur l'ellipse est entre ces deux droites.

Réciproquement $d(M, F) + d(M, F')$ est strictement inférieur à $2a$ pour un point M intérieur à l'ellipse, et strictement supérieur pour un point extérieur. De tels points M ne peuvent être solution.

- De même l'ensemble ci-dessous est l'unique hyperbole caractérisée par F, F', a et b :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} / |d(M, F) - d(M, F')| = 2a\}$$

$$c = \frac{\|FF'\|}{2} > a \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad e = \frac{c}{a}$$

Le signe de cette différence détermine la branche de l'hyperbole.

- La démonstration que les points de l'hyperbole de foyers F et F' vérifient cette propriété bifocale se fait de la même façon que pour l'ellipse, sauf que l'hyperbole est placée en dehors des deux directrices et non entre celles-ci.

Réciproquement, montrons qu'un point M en dehors de cette hyperbole ne vérifie pas cette définition bifocale ; la valeur absolue de la différence des distances est plus grande ou plus petite que $2a$ selon que le point M est à l'intérieur ou à l'extérieur des braches d'hyperbole.

La comparaison peut se faire avec le point d'intersection N de la

droite (FM) et de la branche d'hyperbole opposée au foyer F ; d'où ces inégalités dans le cas d'un point intérieur de la branche d'hyperbole entourant F' :

$$\begin{aligned} d(N, F') &> d(M, F') - d(M, N) & d(M, N) + d(N, F) &= d(M, F) \\ 2a &= d(N, F) - d(N, F') \\ < d(N, F) + d(M, N) - d(M, F') &= d(M, F) - d(M, F') \end{aligned}$$

Équation polaire

Dans ce paragraphe la droite Δ a pour équation $x = -\delta$, dans le repère $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, et le point M a pour coordonnées polaires (r, θ) :

$$\mathbf{OM} = r(\cos \theta \mathbf{u} + \sin \theta \mathbf{v})$$

• Ces ensembles de points définis en coordonnées polaires sont égaux :

$$\begin{aligned} &\{M(r, \theta) / e|r \cos \theta + \delta| = |r| \text{ ET } \theta \in]-\pi, \pi]\} \\ &= \{M(r, \theta) / e(r \cos \theta + \delta) = r \text{ ET } \theta \in]-\pi, \pi]\} \\ &= \{M(r, \theta) / -e(r \cos \theta + \delta) = r \text{ ET } \theta \in]-\pi, \pi]\} \end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que les coordonnées polaires $(-r, \theta \pm \pi)$ du point de coordonnées (r, θ) vérifient l'autre équation.

• Cette équation en coordonnées polaires représente la conique de foyer l'origine O , d'excentricité e , et de directrice la droite d'équation $x = \delta$:

$$r = \frac{e\delta}{1 - e \cos \theta}$$

• Plus généralement une conique dont le foyer est à l'origine O se déduit de la précédente par rotation, son équation est de cette forme où α est fixé dans \mathbb{R} :

$$r = \frac{e\delta}{1 \pm e \cos(\theta - \alpha)}$$

Dans ce cas la directrice associée au foyer à l'origine est de direction orthogonale au vecteur \mathbf{u}_α

• La première de ces deux équations est celle d'une conique dont la directrice a pour équation $x = \delta$, et la seconde est celle d'une conique dont le dénominateur est de la forme $e \cos(\theta - \alpha)$:

$$\begin{aligned} r &= \frac{e\delta}{1 + e \cos \theta} & r &= \frac{p}{1 + \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta} = \frac{e\delta}{1 - e \cos(\theta - \alpha)} \\ e &= \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} & \cos \alpha &= -\frac{\lambda}{e} & \sin \alpha &= -\frac{\mu}{e} & \delta &= \frac{p}{e} \end{aligned}$$

Réduction d'une équation cartésienne

L'ensemble \mathcal{I} est défini ainsi dans le repère canonique $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ du plan, et ce paragraphe a pour but de déterminer un repère orthonormé $\mathcal{R}_\theta = (\Omega, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{v}_\theta)$ où l'équation de \mathcal{I} est « plus simple » :

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \lambda x + \mu y + \eta = 0 \right\}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \eta) \in \mathbb{R}^6 \quad \mathbf{u}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_\theta = \mathbf{u}_{\theta+\pi/2} \quad \mathbf{v}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

• Lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 0$ l'ensemble \mathcal{I} est une droite, l'ensemble vide où le plan en entier.

La suite du paragraphe suppose $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

• Ces équations relient les coordonnées (x, y) dans le repère canonique aux coordonnées (X, Y) du repère $(O, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{v}_\theta)$:

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = X\mathbf{u}_\theta + Y\mathbf{v}_\theta$$

$$\begin{cases} x = \cos \theta X - \sin \theta Y \\ y = \sin \theta X + \cos \theta Y \end{cases} \quad \begin{cases} X = \cos \theta x + \sin \theta y \\ Y = -\sin \theta x + \cos \theta y \end{cases}$$

• L'équation de \mathcal{I} exprimée dans le repère $(O, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{v}_\theta)$ est obtenu en remplaçant x et y en fonction de X et Y ; le coefficient en XY dans cette équation est celui-ci :

$$2(\beta - \alpha) \sin \theta \cos \theta + \gamma(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = (\beta - \alpha) \sin(2\theta) + \gamma \cos(2\theta)$$

• L'équation dans le repère $(O, \mathbf{u}_\varphi, \mathbf{v}_\varphi)$ est de la forme suivante sans terme en XY pour certains réels φ ; celui-ci est généralement défini à partir de la fonction tan pour que le coefficient précédent de XY soit nul :

$$AX^2 + BY^2 + MX + NY + P = 0 \quad \tan(2\varphi) = \frac{\gamma}{\alpha - \beta}$$

ou $\cos(2\varphi) = 0$, c'est-à-dire $\varphi = \pm\pi/4$ ou $\varphi = \pm3\pi/4$, si $\alpha = \beta$

• Un changement d'origine fondé sur une réduction de l'équation précédente aboutit à l'une de ces équations dans un repère

$(\Omega, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{v}_\theta)$; les coordonnées sont notées (\tilde{X}, \tilde{Y}) , les différents cas dépendent du signe des coefficients qui sont tous supposés non nuls :
 $a\tilde{X}^2 + b\tilde{Y}^2 = 1$: une ellipse, une hyperbole, un cercle ou l'ensemble vide
 $a\tilde{X}^2 + b\tilde{Y}^2 = 0$: le point Ω ou deux droites concourantes en Ω

$$\left. \begin{array}{l} a\tilde{X}^2 + c\tilde{Y} = 0 \\ a\tilde{Y}^2 + c\tilde{X} = 0 \end{array} \right\} \text{une parabole} \quad \left. \begin{array}{l} a\tilde{X}^2 = 0 \\ a\tilde{Y}^2 = 0 \end{array} \right\} \text{une droite}$$

$$\left. \begin{array}{l} a\tilde{X}^2 = 1 \\ a\tilde{Y}^2 = 1 \end{array} \right\} \text{deux droites parallèles ou l'ensemble vide}$$

• La courbe représentée par $2xy = 1$ est de la forme précédente et correspond bien à une hyperbole.

En effet la méthode précédente et l'aspect de la courbe justifient de l'étudier dans le repère $(O, \mathbf{u}_{\pi/4}, \mathbf{u}_{3\pi/4})$. Son équation devient celle-ci :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \quad 2xy = X^2 - Y^2 = 1 \quad e = \sqrt{2}$$

GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

Ce chapitre étudie la géométrie de l'espace initialement assimilé à l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 .

Repérage dans l'espace

Repère canonique

- Le repère canonique de l'espace affine $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est construit à partir de la base canonique $\mathcal{B}_c = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 .

$$O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Coordonnées cylindriques

- Le triplet (r, θ, z) — appelé coordonnées cylindriques du point M — est défini à partir du fait que tout vecteur du plan $\mathbb{R}\mathbf{i} + \mathbb{R}\mathbf{j}$ est de la forme $r\mathbf{u}_\theta$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$:

$$\mathbf{u}_\theta = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \quad \mathbf{OM} = r\mathbf{u}_\theta + z\mathbf{k}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Coordonnées sphériques

Le triplet (ρ, θ, φ) — appelé coordonnées sphériques — est défini à partir du fait que la famille $(\mathbf{k}, \mathbf{u}_\theta)$ est une base orthonormée du plan $\mathbb{R}\mathbf{k} + \mathbb{R}\mathbf{u}_\theta$ contenant le vecteur \mathbf{OM} où la colatitude $\varphi = \widehat{\mathbf{k}\mathbf{OM}} \in [0, \pi]$ est un angle mesuré dans le plan $\mathbb{R}\mathbf{k} + \mathbb{R}\mathbf{OM}$:

$$\rho = \sqrt{z^2 + r^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \mathbf{OM} = z\mathbf{k} + r\mathbf{u}_\theta = \rho\mathbf{v}_\varphi$$

$$\mathbf{v}_\varphi \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \cos \varphi = \frac{z}{\rho} \quad \sin \varphi = \frac{r}{\rho} \quad \tan \varphi = \frac{r}{z} \quad \|\mathbf{v}_\varphi\| = 1$$

L'angle de latitude est $\pi/2 - \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Géométrie et algèbre linéaire

La majorité de ces résultats a été justifié dans le premier chapitre.

Vecteurs colinéaires

- La nullité de trois déterminants d'ordre deux détermine si deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont colinéaires :

$$0 = \det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_z & v_z \\ u_x & v_x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$$

$$= u_y v_z - u_z v_y = u_z v_x - u_x v_z = u_x v_y - u_y v_x$$

- Les points A, B et C sont alignés ou confondus si et seulement si la famille $(\mathbf{AB}, \mathbf{AC})$ est liée.

Cette propriété est indépendante de l'ordre d'énumération des points.

- La démonstration repose sur des équivalences de cette forme :

$$\lambda \mathbf{AB} + \mu \mathbf{AC} \text{ ET } (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

$$\iff (\lambda + \mu) \mathbf{AB} + \mu \mathbf{BC} \text{ ET } (\lambda + \mu, \mu) \neq (0, 0)$$

Famille de trois vecteurs

- Toute famille libre de trois vecteurs de l'espace est une base. Toute famille de trois vecteurs de l'espace est soit liée, soit une base. Toute base de l'espace est constituée de trois vecteurs.
- Trois vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ et \mathbf{u}_3 forment une base de l'espace à cette condition :

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \text{ est une base} \iff (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \text{ est libre}$$

$$\iff \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \neq 0$$

Dans ce cas la méthode de Cramer permet d'obtenir les coordonnées d'un vecteur quelconque dans cette base.

Géométrie euclidienne

Produit vectoriel

- Le produit vectoriel $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ est défini de la manière suivante par permutation circulaire des coordonnées :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{pmatrix} \mathbf{i} + \det \begin{pmatrix} u_z & v_z \\ u_x & v_x \end{pmatrix} \mathbf{j} + \det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \mathbf{k}\end{aligned}$$

- Le produit vectoriel est bilinéaire et antisymétrique :
 $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \quad (\lambda \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \wedge (\lambda \mathbf{v})$
 $(\mathbf{u} + \mathbf{u}') \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u}' \wedge \mathbf{v} \quad \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}'$
- Ces propriétés en sont des conséquences :
 $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- Le vecteur $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ est orthogonal à \mathbf{u} et à \mathbf{v} :
 $\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \in (\mathbf{u}, \mathbf{v})^\perp$
- L'identité de Lagrange énonce cette égalité :
 $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$
- La famille (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est liée si et seulement si $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- La première de ces propriétés correspond à des déterminants nuls :
 $\det(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$

Un développement coordonnée par coordonnée justifie l'égalité de Lagrange. Le lien entre les trois déterminants extraits d'ordre deux prouvent la dernière propriété.

- L'ensemble des vecteurs orthogonaux à la famille libre (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est proportionnel à $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, et réciproquement :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})^\perp = \mathbb{R}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \quad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^\perp = \mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v}$$

En particulier si la famille (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est libre alors $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ est libre.

- Un critère de dimension sur les espaces euclidiens permet de démontrer rapidement ces propriétés à partir des deux inclusions élémentaires $\mathbb{R}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \subset (\mathbf{u}, \mathbf{v})^\perp$ et $\mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v} \subset (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^\perp$:

$$\begin{aligned}\dim((\mathbf{u}, \mathbf{v})^\perp) &= \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = 3 - 2 = 1 \\ &= \dim \mathbb{R}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim((\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^\perp) &= \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\text{Vect}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})) = 3 - 1 = 2 \\ &= \dim(\text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))\end{aligned}$$

Une démonstration par un calcul sur les coordonnées est aussi possible.

Produit mixte

- Le produit mixte est défini à partir du produit scalaire et du produit vectoriel :

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle = \det \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

- Le produit mixte, comme tout déterminant d'ordre trois, est trilineaire et antisymétrique :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle \\ &= -\langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle = -\langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle\end{aligned}$$

- Le produit mixte représente le volume du parallélépipède dont les cotés sont ces trois vecteurs.

Projections orthogonales

Ce paragraphe reprend les propriétés du premier chapitre.

- Le sous-espace orthogonal à une droite vectorielle D de vecteur directeur \mathbf{u} est un plan vectoriel dont toute base est constituée de deux vecteurs orthogonaux à \mathbf{u} , et $\mathbb{R}^3 = D \oplus D^\perp$.
- La projection orthogonale $p(\mathbf{w})$ du vecteur \mathbf{w} sur $\mathbb{R}\mathbf{u}$ est la suivante lorsque \mathbf{u} est un vecteur unitaire :

$$p(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle \mathbf{u} \in \mathbb{R}\mathbf{u}$$

- Le sous-espace orthogonal à un plan vectoriel P dirigé par les vecteurs non colinéaires \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 est une droite vectorielle de base $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2$, et $\mathbb{R}^3 = P \oplus P^\perp$.
- La projection orthogonale $p(\mathbf{w})$ du vecteur \mathbf{w} sur le plan vectoriel dont une base orthonormée est $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est obtenue à partir de la projection q sur la droite vectorielle $\mathbb{R}\mathbf{v} = P^\perp$ de direction P :

$$q(\mathbf{w}) = \left\langle \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} | \mathbf{w} \right\rangle \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} \quad p(\mathbf{w}) = \mathbf{w} - q(\mathbf{w})$$

Bases orthonormées

• Toute famille orthonormée $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de trois vecteurs de l'espace est libre et est donc une base.

• Une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est directe lorsque $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) > 0$, sinon elle est dite inverse. Deux bases sont dites dans le même sens si elles sont toutes les deux directes ou toutes les deux inverses.

La base canonique $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est donc par définition directe.

• Les bases $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$, $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3)$, etc. sont dans le même sens.

• Toute base orthonormée directe $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vérifie ces égalités :

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \quad \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$$

• Le sous-espace $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)^\perp$ est une droite vectorielle, de dimension 1, et contient $\mathbf{e}_3 \neq \mathbf{0}$, car la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est orthonormée ; ainsi $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ est de la forme $\lambda \mathbf{e}_3$.

Par ailleurs $\lambda = \pm 1$ à partir de l'égalité de Lagrange :

$$|\lambda| = \|\lambda \mathbf{e}_3\|^2 = \|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|^2 = \|\mathbf{e}_1\|^2 \|\mathbf{e}_2\|^2 - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 \rangle^2 = 1$$

Enfin la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est directe :

$$0 < \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \langle \mathbf{e}_3 | \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_3 | \lambda \mathbf{e}_3 \rangle = \lambda$$

En conclusion $\lambda = 1$ et le déterminant d'une base orthonormée directe est 1.

La méthode est similaire pour les autres produits vectoriels.

• Si la famille (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est orthonormée alors les trois vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ forment une famille orthonormée et donc une base orthonormée.

Cette base est directe.

• Les vérifications suivantes le justifient :

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle^2 = 1$$

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} | \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = 1$$

Méthodes de calcul dans une base orthonormée

Dans ce paragraphe la famille $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est une base de l'espace, généralement orthonormée directe, et les coordonnées des vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ sont notées ainsi :

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3$$

• La base canonique $\mathcal{B}_c = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et les deux bases suivantes intervenant dans en coordonnées cylindriques et sphériques sont des bases orthonormées directes :

$$(\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_{\theta+\pi/2}, \mathbf{k}) \quad \mathbf{u}_\theta = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$(\mathbf{v}_{\theta,\varphi}, \mathbf{u}_{\theta+\pi/2,\varphi}, \mathbf{v}_{\theta,\varphi-\pi/2})$$

$$\mathbf{v}_{\theta,\varphi} \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_{\theta+\pi/2,\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_{\theta,\varphi-\pi/2} \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

• Le déterminant dans la base \mathcal{B} est défini ainsi :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \quad \det_{\mathcal{B}_c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

• Dans toute base orthonormée, pas nécessairement directe, la formule du produit scalaire est la même :

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

• Les coordonnées de \mathbf{u} dans cette base sont $(\langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{u} \rangle, \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{u} \rangle, \langle \mathbf{e}_3 | \mathbf{u} \rangle)$:

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \mathbf{e}_3 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_3$$

Ce résultat a été justifié dans le chapitre *Outils algébriques pour la géométrie*.

• Dans toute base orthonormée directe la formule du produit vectoriel est la même :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 + \det \begin{pmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{pmatrix} \mathbf{e}_2 + \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_3$$

• Cette propriété provient de la bilinéarité du produit vectoriel et des trois égalités de la forme $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ vérifiées par toute base orthonormée directe $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

• La formule du produit mixte est la même dans toute base orthonormée directe :

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \det_B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

- Ce résultat est une conséquence des deux précédents.
- La formule du double produit vectoriel énonce cette égalité :

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle \mathbf{u}$$

- Une démonstration consiste à construire une base orthonormée directe $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ telle que $\mathbf{u} \in \mathbb{R}\mathbf{e}_1$, par exemple $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$. Le vecteur \mathbf{e}_2 est choisi orthogonal à \mathbf{e}_1 de façon à ce que $\mathbf{v} \in \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, par exemple $\mathbf{f} = \mathbf{v} - \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}/\|\mathbf{f}\|$. Enfin $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ termine la construction d'une base orthonormée directe.

Cette base orthonormée directe simplifie les calculs du double produit vectoriel car certaines coordonnées de vecteurs sont nulles :

$$\mathbf{u} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab' \end{pmatrix} \quad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -ab'b'' \\ ab'c'' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle = aa'' \quad \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = a'a'' + b'b''$$

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle \mathbf{u} = \begin{pmatrix} aa''a' - (a'a'' + b'b'')a \\ aa''b' - 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab'b'' \\ ab'a'' \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) \wedge \mathbf{i} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} = \langle \mathbf{i} | \mathbf{i} \rangle \mathbf{j} - \langle \mathbf{i} | \mathbf{j} \rangle \mathbf{i}$.

Ensembles remarquables

Plans de l'espace

- Tout plan affine de l'espace peut être défini de quatre façons équivalentes :
 - par un point A et deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} non colinéaires,
 - par trois points non alignés A , B et C ,
 - par une équation $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et

– par un point A et un vecteur normal $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= A + (\mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v}) = A + (\mathbb{R}\mathbf{AB} + \mathbb{R}\mathbf{AC}) \\ &= \left\{ \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)) / (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ ET } \alpha + \beta + \gamma \neq 0 \right\} \\ &= \{M / \det(\mathbf{AM}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\} = \{M / \langle \mathbf{AM} | \mathbf{w} \rangle = 0\} \\ &= \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / ax + by + cz + d = 0 \right\} \quad \mathbf{w} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{u} \quad \mathbf{AC} = \mathbf{v} \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \quad d = -(aa_x + ba_y + ca_z)$$

- Deux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 dirigés par $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ et $(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)$ sont parallèles si et seulement si les deux sous-espaces vectoriels associés sont les mêmes ; ils sont caractérisés par ces conditions équivalentes :

$$\mathbb{R}\mathbf{u}_1 + \mathbb{R}\mathbf{v}_1 = \mathbb{R}\mathbf{u}_2 + \mathbb{R}\mathbf{v}_2$$

$$\iff (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{v}_2) \text{ sont liés}$$

$$\iff (a_1, b_1, c_1) \text{ et } (a_2, b_2, c_2) \text{ sont proportionnels}$$

- La distance $d(M, \mathcal{P})$ d'un point M à un plan \mathcal{P} de direction (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est défini par ces égalités :

$$d(M, \mathcal{P}) = \min \{ \|\mathbf{MX}\| / X \in \mathcal{P} \} = \|\mathbf{MB}\|$$

Le point B est la projection orthogonale de M sur \mathcal{P} , c'est-à-dire $B \in \mathcal{P}$ et $\mathbf{MB} \in (\mathbf{u}, \mathbf{v})^\perp = \mathbb{R}\mathbf{w}$.

- Lorsque le plan \mathcal{P} est dirigé par (\mathbf{u}, \mathbf{v}) et d'équation $ax + by + cz + d = 0$, la distance $d(M, \mathcal{P})$ fait intervenir la projection orthogonale de direction la droite vectorielle $\mathbb{R}\mathbf{w}$ où $A \in \mathcal{P}$ et $\mathbf{w} \in (\mathbf{u}, \mathbf{v})^\perp$, par exemple $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, sans qu'il soit nécessaire de déterminer explicitement le point B :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\langle \mathbf{AM} | \mathbf{w} \rangle|}{\sqrt{\langle \mathbf{w} | \mathbf{w} \rangle}} = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|\det(\mathbf{AM}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|}$$

- Cette distance est obtenue à partir de la projection vectorielle orthogonale de \mathbf{AM} sur $P^\perp = \mathbb{R}\mathbf{w}$.

Droites de l'espace

- Trois points A , B et C sont alignés si et seulement si la famille $(\mathbf{AB}, \mathbf{AC})$ est liée ; cette proposition est indépendante de l'ordre d'énumération des trois points A , B et C .

- Toute droite \mathcal{D} de l'espace peut être définie de quatre façons équivalentes :

- par deux points distincts A et B ,
- par un point A et un vecteur non nul \mathbf{u} ,
- par l'intersection de deux plans non parallèles, et
- par deux équations linéaires non proportionnelles.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= A + \mathbb{R}\mathbf{u} = A + \mathbb{R}\mathbf{AB} & \mathbf{AB} &= \mathbf{u} \\ &= \{\text{Bar}((A, \lambda), (B, 1 - \lambda)) / \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 & \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \text{ET} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

- La distance d'un point M à une droite \mathcal{D} de vecteur directeur \mathbf{u} est définie et calculée par ces égalités où $A \in \mathcal{D}$:

$$d(M, \mathcal{D}) = \min \{ \|\mathbf{MX}\| / X \in \mathcal{D} \} = \|\mathbf{MB}\| = \frac{\|\mathbf{MA} \wedge \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

Le point B est la projection orthogonale de M sur \mathcal{D} , c'est-à-dire $B \in \mathcal{D}$ et $\mathbf{MB} \in \mathbf{u}^\perp$.

- La formule de Lagrange justifie ces égalités :

$$\begin{aligned} \mathbf{MA} \wedge \mathbf{u} &= (\mathbf{MB} + \mathbf{BA}) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{MB} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{BA} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{MB} \wedge \mathbf{u} \\ \|\mathbf{MB} \wedge \mathbf{u}\|^2 &= \|\mathbf{MA}\|^2 \|\mathbf{u}\|^2 - \langle \mathbf{MA} | \mathbf{u} \rangle^2 = \|\mathbf{MA}\|^2 \|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

- Deux droites affines Δ_1 et Δ_2 non parallèles de l'espace ont une droite perpendiculaire commune qui est dirigée par $\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2$ lorsque \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont des vecteurs directeurs de Δ_1 et Δ_2 .

Lorsque $A_1 \in \Delta_1$ et $A_2 \in \Delta_2$ la décomposition de $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ sur la base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2)$ permet de construire les points $B_1 \in \Delta_1$ et $B_2 \in \Delta_2$ qui appartiennent à une même droite perpendiculaire à Δ_1 et Δ_2 .

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{w} & \mathbf{v}_1 &\in \mathbb{R}\mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_2 &\in \mathbb{R}\mathbf{u}_2 & \mathbf{w} &\in \mathbb{R}(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 &= \mathbf{v}_1 & B_1 &\in \Delta_1 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 &= -\mathbf{v}_2 & B_2 &\in \Delta_2 \\ \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 &= \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 = \mathbf{w} & & & & & & \in \mathbb{R}(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) \end{aligned}$$

- La distance entre ces deux droites contenant respectivement A et B est définie de la même manière et se calcule de façon comparable :

$$\begin{aligned} d(\Delta_1, \Delta_2) &= \min \{ \|\mathbf{XY}\| / X \in \Delta_1 \text{ ET } Y \in \Delta_2 \} = \|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\| \\ &= \frac{\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\|\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2\|} \end{aligned}$$

Angles de l'espace

- Les angles dans l'espace sont définis uniquement à l'aide du produit scalaire, sous la forme d'un cosinus, à valeurs dans $[0, \pi]$ et sans orientation :

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) = \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \in [-1, 1] \quad \left| \sin(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) \right| = \frac{\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \quad \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} \in [0, \pi]$$

- Le signe de l'angle $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}$ de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} du plan dépend de $\sin(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ calculé dans une base orthonormée directe \mathcal{B} , une base du plan est dite directe en référence à la base canonique, cette notion d'orientation du plan canonique \mathbb{R}^2 n'a pas d'équivalent pour les plans de l'espace.

- L'angle θ entre deux droites dont les vecteurs directeurs sont \mathbf{u} et \mathbf{v} est défini ainsi :

$$\cos \theta = \frac{|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \in [0, 1] \quad \theta \in [0, \pi/2]$$

La valeur absolue du produit scalaire permet de rendre $\cos \theta$ indépendant du choix des vecteurs directeurs $\pm \mathbf{u}$ et $\pm \mathbf{v}$ des deux droites.

- L'angle $\theta \in [0, \pi/2]$ entre deux plans est de même défini à partir de l'angle entre les vecteurs normaux \mathbf{u} et \mathbf{v} des deux plans :

$$\cos \theta = \frac{|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

- L'angle φ entre une droite et un plan est l'angle $\varphi = \pi/2 - \psi$ où ψ est l'angle entre un vecteur directeur \mathbf{u} de la droite et un vecteur \mathbf{v} normal au plan :

$$\cos \psi = \sin \varphi = \frac{|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

COURBES PARAMÉTRÉES ET POLAIRES

Dans ce chapitre le plan affine euclidien est muni du repère canonique $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, dans lequel les vecteurs \mathbf{i} et \mathbf{j} sont orthogonaux et unitaires.

Étude des courbes paramétrées

Définitions

- Une courbe paramétrée plane Γ est construite à partir de deux fonctions réelles x et y définies sur $\mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_y \subset \mathbb{R}$, et correspond à l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ si $t \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y$.

$$M : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{OM}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \Gamma = \{M(t) / t \in \mathcal{D}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} / t \in \mathcal{D} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

- Une courbe paramétrée est continue [respectivement de classe \mathcal{C}^k ou \mathcal{C}^∞] si et seulement si les fonctions x et y sont continues [respectivement de classe \mathcal{C}^k ou \mathcal{C}^∞].

- Le vecteur $\mathbf{OM}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$ est appelé vecteur vitesse ou vecteur tangent. Le vecteur accélération est $\mathbf{OM}''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$. Les vecteurs des dérivées itérées sont définis coordonnée par coordonnée de la même façon.

- Le graphe d'une fonction réelle f est la courbe paramétrée ainsi :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

- Une courbe paramétrée $M(t)$ de l'espace \mathbb{R}^3 dans le repère orthonormé $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est définie de façon analogue par trois fonctions coordonnées x, y et z : $\mathbf{OM}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$.

Ensemble d'étude

- L'étape suivante de l'étude consiste à rechercher un sous-ensemble $\tilde{\mathcal{D}}$ de \mathcal{D} permettant de tracer la courbe Γ en entier.

- Par exemple le tracé de la courbe Γ est complet lorsque $t \in \mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$ pour toute courbe vérifiant $M(t) = M(-t)$.

De même des propriétés de périodicité comme $x(t) = x(t + T)$ et $y(t) = y(t + T)$ où $T > 0$ entraînent que la courbe Γ est tracée en entier pour n'importe quel intervalle de longueur T .

- L'étude se poursuit par la recherche des axes de symétrie de la courbe Γ ; les propriétés suivantes traduisent les principaux invariants géométriques, par exemple lorsque $u = -t, u = \pi + t, u = 1 - t$, etc. :

Symétrie d'axe Ox $(x(u), y(u)) = (x(t), -y(t))$

Symétrie d'axe Oy $(x(u), y(u)) = (-x(t), y(t))$

Symétrie d'axe $y = x$ $(x(u), y(u)) = (y(t), x(t))$

Symétrie d'axe $y = -x$ $(x(u), y(u)) = (-y(t), -x(t))$

Symétrie centrale $(x(u), y(u)) = (-x(t), -y(t))$

Symétrie d'axe vertical $x = a/2$ $(x(u), y(u)) = (a - x(t), y(t))$

Symétrie d'axe horizontal $y = b/2$ $(x(u), y(u)) = (x(t), b - y(t))$

Invariant par rotation
centrale d'angle $\pi/2$ $(x(u), y(u)) = (y(t), -x(t))$

Invariant par translation
de vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $(x(u), y(u)) = (x(t) + a, y(t) + b)$

Invariant par homothétie
de rapport a $(x(u), y(u)) = (ax(t), ay(t))$

Toutes ces symétries sont orthogonales.

Exemple de l'astroïde

- L'astroïde est la courbe Γ paramétrée par $(x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

- Les fonctions x et y sont définies et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

La périodicité de 2π des fonctions x et y entraîne que la courbe est tracée en entier pour tout intervalle de longueur 2π :

$$x(t + 2\pi) = x(t) \quad y(t + 2\pi) = y(t)$$

- La recherche des symétries de cette courbe suggère *a posteriori* de tracer Γ en retenant l'intervalle $[-\pi/2, 3\pi/2]$.

Les égalités $x(t + \pi) = -x(t)$ et $y(t + \pi) = -y(t)$ réduisent l'étude de Γ à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ et mettent en évidence la symétrie centrale de cette courbe par rapport à l'origine.

De même les relations $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ limitent l'étude de Γ à l'intervalle $[0, \pi/2]$ et prouvent que l'axe Ox est aussi un axe

de symétrie de Γ .

Enfin les égalités $x(\pi/2 - t) = y(t)$ et $y(\pi/2 - t) = x(t)$ énoncent que la première bissectrice d'équation $y = x$ est un axe de symétrie de Γ et réduisent l'étude de Γ à l'intervalle $[0, \pi/4]$.

La courbe complète est construite à partir de cette partie de courbe pour $t \in [0, \pi/4]$ et est reproduite 7 autres fois pour tenir compte de ces trois symétries.

- Il est aussi possible de partir de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et de le réduire successivement à $[0, \pi]$, à $[0, \pi/2]$ puis à $[0, \pi/4]$ par les transformations $u = -t$, $u = \pi - t$ puis $u = \pi/2 - t$ qui aboutissent à trois symétries d'axes respectifs Ox , Oy et $y = x$.

Tableau de variation

- Le tableau de variation des fonctions x et y sur l'intervalle d'étude I permet de déterminer la partie du plan où la courbe est tracée.
- Par exemple la courbe est dans la bande délimitée par les droites verticales $x = m$ et $x = M$ dès que la fonction x vérifie $m \leq x(t) \leq M$ pour tout $t \in I$.
- Les extrema des fonctions x et y correspondent aux points extrêmes de la courbe à gauche, à droite, en haut et en bas selon la représentation géométrique usuelle.
- Les variations des fonctions x et y fixent les directions de la courbe Γ :

signe de $x'(t)$	+	+	-	-
variation de $x(t)$	↗	↗	↘	↘
signe de $y'(t)$	+	-	+	-
variation de $y(t)$	↗	↘	↗	↘
sens de parcours de Γ	↗	↘	↖	↗

- Le tableau de variation des fonctions x et y facilite la recherche des éventuels points de croisement de la courbe :

$$M(t) = M(u) \quad t \neq u$$

- Le tableau de variation récapitule les informations nécessaires à un tracé soigné de la courbe Γ .

Il peut être judicieux d'ajouter dans ce tableau quelques points intermédiaires et éventuellement de calculer le vecteur dérivé en ces

points.

Courbe de Lissajous

- La courbe paramétrée $(x(t), y(t)) = (\sin(2t), \sin(3t))$ appelée courbe de Lissajous comporte des points de croisement.

La courbe est tracée en entier sur un intervalle de longueur 2π , et les axes Ox et Oy sont des axes de symétries par les transformations $\pi + t$ et $\pi - t$. L'étude initiale se limite donc à l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Le tableau de variation est le suivant :

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$x(t)$	0 ↗	$\sqrt{3}/2$ ↗	1 ↘	$\sqrt{3}/2$ ↘	0
$y(t)$	0 ↗	1 ↘	$\sqrt{2}/2$ ↘	0 ↘	-1

Les symétries imposent deux points de croisement de la courbe sur l'axe Ox , d'abscisse $\pm\sqrt{3}/2$ obtenue pour $t = \pm\pi/3$ et $u = \pm4\pi/3$.

La courbe comporte quatre autres points d'intersections, dont les coordonnées sont les solutions de cette équations à quatre sous-cas :

$$\begin{aligned} & \sin(2t) = \sin(2u) \text{ ET } \sin(3t) = \sin(3u) \\ \iff & \begin{cases} (2t - 2u \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ OU } 2t - (\pi - 2u) \in 2\pi\mathbb{Z}) \\ \text{ET } (3t - 3u \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ OU } 3t - (\pi - 3u) \in 2\pi\mathbb{Z}) \end{cases} \end{aligned}$$

Le seul point d'intersection à coordonnées strictement positives est $(1/2, \sqrt{2}/2)$ atteint pour $t = \pi/12$ et $u = 17\pi/12$.

Vecteurs tangents

- Un point $M(a)$ pour lequel le vecteur vitesse $\mathbf{OM}'(a)$ est nul est appelé point singulier, et point régulier sinon.
- En tout point régulier $M(a)$ le vecteur vitesse $\mathbf{OM}'(a)$ non nul est tangent à la courbe Γ ; il correspond direction-limite de la corde reliant les deux points $M(a)$ et $M(a + h)$ quand h tend vers zéro :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}(a)\mathbf{M}(a+h)}{h} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{\mathbf{M}(a)\mathbf{M}(t)}{t-a} = \mathbf{OM}'(a)$$

- La tangente en $M(a)$ est la droite passant par $M(a)$ de vecteur directeur $\mathbf{OM}'(a) \neq \mathbf{0}$.
- Un point pour lequel $x'(a) = 0$ et $y'(a) \neq 0$ a une tangente verticale, et un vérifiant $x'(a) \neq 0$ et $y'(a) = 0$ possède une tangente horizontale.
- En un point sigulier le vecteur vitesse nul, $\mathbf{OM}'(a) = \mathbf{0}$, ne permet

pas de déterminer l'aspect de la courbe.

Aspect local des courbes paramétrées

Ce paragraphe suppose que les dérivées successives des fonctions x et y existent à un ordre suffisamment élevé en a pour définir de la manière suivante les entiers p et $q > p$.

- Pour la valeur $t = a$ du paramètre, l'entier p correspond au premier vecteur non nul des dérivées successives :

$$\mathbf{OM}'(a) = \mathbf{OM}''(a) = \dots = \mathbf{OM}^{(p-1)}(a) = \mathbf{0} \quad \mathbf{OM}^{(p)}(a) \neq \mathbf{0}$$

- Les points réguliers, c'est-à-dire ceux pour lesquels le vecteur vitesse est non nul, correspondent à $p = 1$, et les points singuliers à $p > 1$.
- La définition des applications vectorielles $\mathbf{OM}(t)$ négligeables est reliée à celle des applications réelles :

$$\begin{aligned} \mathbf{OM}(t) = o_{t \rightarrow a}((t-a)^p) &\iff \lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{(t-a)^p} \mathbf{OM}(t) = \mathbf{0} \\ \iff \begin{cases} x(t) = o_{t \rightarrow a}((t-a)^p) \\ y(t) = o_{t \rightarrow a}((t-a)^p) \end{cases} &\iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow a} \frac{x(t)}{(t-a)^p} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{(t-a)^p} = 0 \end{cases} \\ \iff \|\mathbf{OM}(t)\| = o_{t \rightarrow a}((t-a)^p) &\iff \lim_{t \rightarrow a} \left\| \frac{1}{(t-a)^p} \mathbf{OM}(t) \right\| = 0 \end{aligned}$$

- L'application de la formule de Taylor-Young coordonnée par coordonnée aboutit à cette égalité vectorielle à l'ordre p :

$$\mathbf{OM}(t) = \mathbf{OM}(a) + \frac{(t-a)^p}{p!} \mathbf{OM}^{(p)}(a) + o_{t \rightarrow a}((t-a)^p)$$

- Le vecteur $\mathbf{OM}^{(p)}(a) \neq \mathbf{0}$ est appelé tangente généralisée, ce vecteur correspond à la direction-limite de la corde reliant les deux points $M(a)$ et $M(a+h)$ quand h tend vers zéro :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}(a)\mathbf{M}(a+h)}{h^p} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{\mathbf{M}(a)\mathbf{M}(t)}{(t-a)^p} = \mathbf{OM}^{(p)}(a)$$

- L'entier $q > p$ est le plus petit des ordres des dérivées successives tel que $\mathbf{OM}^{(p)}(a)$ et $\mathbf{OM}^{(q)}(a)$ ne sont pas colinéaires :

$(\mathbf{OM}^{(p)}(a), \mathbf{OM}^{(k)}(a))$ est une famille liée lorsque $p \leq k < q$

$(\mathbf{OM}^{(p)}(a), \mathbf{OM}^{(q)}(a))$ est une famille libre

Ainsi les vecteurs $\mathbf{OM}^{(p+1)}(a), \mathbf{OM}^{(p+2)}(a), \dots, \mathbf{OM}^{(q-1)}(a)$ sont tous proportionnels au vecteur $\mathbf{OM}^{(p)}(a) \neq \mathbf{0}$; certains de ces $q-p-1$ vecteurs peuvent être nuls.

- Les développements limités des coordonnées du point $M(a+h)$ par l'application de la formule de Taylor-Young aboutissent à cette égalité vectorielle :

$$\begin{aligned} \mathbf{OM}(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_x(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_y(h) = \mathbf{0} \\ &= \mathbf{OM}(a) + \frac{h^p}{p!} (1 + \varepsilon(h)) \mathbf{OM}^{(p)}(a) + \frac{h^q}{q!} (\mathbf{OM}^{(q)}(a) + \varepsilon_x(h) \mathbf{i} + \varepsilon_y(h) \mathbf{j}) \end{aligned}$$

- L'aspect de la courbe Γ au voisinage du point $M(a)$ s'obtient à partir de cette égalité vectorielle, et dépend plus précisément de la parité des entiers p et q :

	p est impair	p est pair
q est pair	aspect régulier	rebroussement de seconde espèce
q est impair	point d'inflexion	rebroussement de première espèce

- Un point birégulier vérifie $p = 1$ et $q = 2$, il est d'aspect régulier. Un point de rebroussement est un point singulier. Un point régulier est un point d'aspect régulier ou un point d'inflexion.

- Les deux méthodes pour obtenir p et q consistent soit à calculer les dérivées successives, soit à retrouver ces dérivées par les développements limités des coordonnées, grâce à la formule de Taylor-Young.

Points singuliers de l'astroïde

- Le point $M(0)$ de coordonnée $(1, 0)$ de l'astroïde paramétrée par $x(t) = \cos^3 t$ et $y(t) = \sin^3 t$ est singulier car $x'(0) = y'(0) = 0$. Les développements limités de $x(t)$ et $y(t)$ en 0 permet de déterminer les vecteurs dérivées successifs :

$$x(t) = \cos^3 t = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^3)\right)^3 = 1 - \frac{3t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^3)$$

$$y(t) = \sin^3 t = \left(t - \frac{t^3}{6} + o_{t \rightarrow 0}(t^3)\right)^3 = t^3 + o_{t \rightarrow 0}(t^3)$$

$$\mathbf{OM}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_{t \rightarrow 0}(t^3) \\ o_{t \rightarrow 0}(t^3) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{OM}'(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{OM}''(0) \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{OM}^{(3)}(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad p = 2 \quad q = 3$$

La courbe comporte donc un point de rebroussement de première espèce de tangente généralisée de direction horizontale $\mathbf{OM}''(0) = -3\mathbf{i}$.

• Des critères de symétrie permettent de déterminer l'aspect de certains points singuliers sans mener à terme tous les calculs.

Par exemple l'axe Ox de symétrie de l'astroïde permet de déduire l'aspect du point $M(0)$ une fois connue l'ordre de la tangente généralisée : $p = 2$; cette symétrie interdit un point de rebroussement de seconde espèce.

Concavité

• La concavité traduit les variations relatives, vers la gauche ou vers la droite, du vecteur vitesse.

Le vecteur accélération $\mathbf{OM}''(a)$ représente les variations du vecteur vitesse $\mathbf{OM}'(a)$; et, pour cette raison, le vecteur accélération est orienté dans le sens de la concavité de la courbe.

• Le changement de signe de ce déterminant signale un point d'inflexion ou un point de rebroussement de seconde espèce :

$$\det(\mathbf{OM}'(a), \mathbf{OM}''(a)) = \det \begin{pmatrix} x'(a) & x''(a) \\ y'(a) & y''(a) \end{pmatrix}$$

Direction asymptotique et asymptote

Dans ce paragraphe les fonctions x ou y divergent vers $\pm\infty$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Cette hypothèse entraîne que $\lim_{t \rightarrow a} \|\mathbf{OM}(t)\| = +\infty$ et que la courbe Γ n'est pas bornée au voisinage de a .

• La direction asymptotique définie à une constante multiplicative positive près est un vecteur non nul qui indique la direction limite

de la courbe Γ au voisinage de a .

Cette direction est celle de la limite vectorielle suivante calculée coordonnée par coordonnée :

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\mathbf{OM}(t)}{\|\mathbf{OM}(t)\|}$$

• La condition suivante est suffisante pour que la courbe Γ possède une direction asymptotique en a :

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{direction asymptotique} \begin{pmatrix} 1 \\ \ell \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty \quad \text{direction asymptotique} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• Une droite Δ est asymptote de la courbe Γ au voisinage de a si et seulement si la distance d'un point $M(t)$ de la courbe à la droite Δ tend vers 0 en a : $\lim_{t \rightarrow a} d(M(t), \Delta) = 0$ avec $d(M(t), \Delta) = \|\mathbf{H}(t)\mathbf{M}(t)\|$ et $H(t)$ étant la projection orthogonale de $M(t)$ sur la droite Δ .

• La courbe admet une branche parabolique dans la direction asymptotique lorsque $d(M(t), \Delta)$ tend vers $+\infty$ où Δ est une droite dirigée par la direction asymptotique.

• Le vecteur directeur de l'asymptote est la direction asymptotique ; l'équation de la droite Δ est de la forme $y = \ell x + m$; et le tableau ci-dessous détermine l'existence et l'équation de l'asymptote :

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \ell \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \rightarrow a} y(t) - \ell x(t) = m \in \mathbb{R} \quad \text{asymptote } \Delta \text{ d'équation } y = \ell x + m$$

$$\lim_{t \rightarrow a} y(t) - \ell x(t) = \pm\infty \quad \text{branche parabolique de direction} \begin{pmatrix} 1 \\ \ell \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

est un cas particulier du précédent

$$\lim_{t \rightarrow a} y(t) = m \in \mathbb{R} \quad \Delta \text{ d'équation } y = m$$

$$\lim_{t \rightarrow a} y(t) = \pm\infty \quad \text{branche parabolique horizontale}$$

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty \quad \lim_{t \rightarrow a} \frac{x(t)}{y(t)} = 0 \quad \text{les rôles de } x \text{ et de } y \text{ sont inversés}$$

$$\lim_{t \rightarrow a} x(t) = m \in \mathbb{R} \quad \Delta \text{ d'équation } x = m$$

$$\lim_{t \rightarrow a} x(t) = \pm\infty \quad \text{branche parabolique verticale}$$

- Le signe de $f(x) - \ell x - m$ renseigne sur la position relative de l'asymptote par rapport à la courbe.
- La courbe $(x(t), y(t)) = (t^2/(t-1), t^2/(t+1))$ comporte trois asymptotes : asymptote horizontale d'équation $y = 1/2$ lorsque t tend vers 1, asymptote verticale d'équation $x = -1/2$ lorsque t tend vers -1 , et asymptote d'équation $y = x - 2$ lorsque t tend vers $\pm\infty$:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t-1}{t+1} \quad \text{de limite } 1 \text{ en } \pm\infty$$

$$y(t) - x(t) = \frac{-2t^2}{t^2-1} \quad \text{de limite } -2 \text{ en } \pm\infty$$

$$y(t) - x(t) + 2 = -\frac{2}{t^2-1} < 0 \quad \text{pour } |t| > 1$$

Le signe de cette dernière expression prouve que la courbe Γ est placée en dessous de cette asymptote dès que $|t| > 1$.

Étude des courbes polaires

Définitions

- La courbe polaire associée à la fonction réelle r dont l'ensemble de définition est noté $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble Γ des points $M(\theta)$ définis ainsi :

$$M : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \longmapsto \begin{pmatrix} r(\theta) \cos \theta \\ r(\theta) \sin \theta \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{OM}(\theta) = r(\theta) \mathbf{u}_\theta \\ \Gamma = \{M(\theta) / \theta \in \mathcal{D}\} \subset \mathbb{R}^2 \end{matrix} \quad \mathbf{u}_\theta \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

- Une courbe polaire est continue si et seulement si la fonction r est continue.
- Dériver la fonction vectorielle $\theta \mapsto \mathbf{u}_\theta$ opère une rotation d'angle $\pi/2$ et se traduit dans le plan complexe par une multiplication par i :

$$\mathbf{u}_\theta \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}'_\theta \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad f : \theta \mapsto e^{i\theta}$$

$$\mathbf{u}'_\theta = \mathbf{u}_{\theta+\pi/2} \quad \mathbf{u}''_\theta = \mathbf{u}_{\theta+\pi} = -\mathbf{u}_\theta$$

$$f'(\theta) = i e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi/2)} \quad f''(\theta) = i^2 e^{i\theta} = -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$$

- Le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération sont donc les suivants :

$$\mathbf{OM}'(\theta) = r'(\theta) \mathbf{u}_\theta + r(\theta) \mathbf{u}_{\theta+\pi/2}$$

$$\mathbf{OM}''(\theta) = (r''(\theta) - r(\theta)) \mathbf{u}_\theta + 2r'(\theta) \mathbf{u}_{\theta+\pi/2}$$

Ensemble d'étude

- L'étape suivante de l'étude consiste à rechercher un sous-ensemble $\tilde{\mathcal{D}}$ de \mathcal{D} permettant de tracer la courbe Γ en entier.
- Les égalités $r(\theta+2n\pi) = r(\theta)$ et $r(\theta+(2n+1)\pi) = -r(\theta)$ entraînent que les points correspondants de la courbe Γ sont confondus :

$$\mathbf{u}_{\theta+2n\pi} = \mathbf{u}_\theta \quad \mathbf{u}_{\theta+(2n+1)\pi} = -\mathbf{u}_\theta$$

$$r(\theta+2n\pi) = r(\theta) \implies \mathbf{OM}(\theta) = \mathbf{OM}(\theta+2n\pi)$$

$$r(\theta+(2n+1)\pi) = -r(\theta) \implies \mathbf{OM}(\theta) = \mathbf{OM}(\theta+(2n+1)\pi)$$

- L'étude se poursuit par la recherche des invariants de la courbe Γ ; ces propriétés traduisent les principales symétries :

Symétrie d'axe Ox	$r(\theta) = r(-\theta)$
Symétrie d'axe Oy	$r(\theta) = r(\pi - \theta)$ ou $-r(-\theta)$
Symétrie d'axe $y = x$	$r(\theta) = r(\pi/2 - \theta)$
Symétrie centrale	$r(\theta) = r(\theta \pm \pi)$
Invariant par rotation d'angle α	$r(\theta + \alpha) = r(\theta)$
Symétrie d'axe orienté par \mathbf{u}_α	$r(2\alpha - \theta) = r(\theta)$
Symétrie d'axe orienté par $\mathbf{u}_{\alpha+\pi/2}$	$r(2\alpha - \theta) = -r(\theta)$

Toutes ces symétries sont orthogonales.

- Cette partie de l'étude se termine en recherchant donc un intervalle le plus petit possible permettant, après rotations et symétries, de tracer complètement la courbe Γ .

Vecteurs tangents et tableau de variation

- Le vecteur tangent $\mathbf{OM}'(\theta)$ est différent du vecteur nul dès que la courbe n'est pas à l'origine.

L'angle $V = \widehat{\mathbf{u}_\theta \mathbf{OM}'(\theta)}$ est défini à π près :

$$\mathbf{OM}'(\theta) = r'(\theta) \mathbf{u}_\theta + r(\theta) \mathbf{u}_{\theta+\pi/2} \quad \tan V = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$$

- Le seul éventuel point singulier d'une courbe polaire est l'origine, tous les autres points sont réguliers.
- Lorsque $r(\alpha) = 0$ et $r'(\alpha) \neq 0$ la courbe passe par l'origine et est un point régulier. Le vecteur tangent est orienté par \mathbf{u}_α .
- Le tableau de variation de la fonction r permet de placer la courbe par rapport à un disque de rayon $R > 0$

$$|r(\theta)| \leq R \iff M(\theta) \in \mathcal{B}(O, R) \quad \mathcal{B}(O, R) = \{M / \|\mathbf{OM}\| \leq R\}$$

En outre le signe de $r(\theta)$ sur un intervalle I permet de placer la courbe dans le secteur angulaire correspondant à I si $r(\theta) \geq 0$, ou dans le secteur symétrique à l'origine si $r(\theta) \leq 0$.

- Récapituler dans le tableau de variation r' et $\tan V = r/r'$ regroupe les principales données nécessaires au tracé de la courbe.
- La courbe polaire $r(\theta) = \cos(3\theta)$ est tracée en entier sur un intervalle de longueur π , et comporte trois pétales, alors que la courbe polaire $r(\theta) = \cos(4\theta)$ est tracée en entier sur un intervalle de longueur 2π , et en comporte huit.

Aspect de la courbe à l'origine

Ce paragraphe suppose que les dérivées itérées de la fonction r existent à un ordre suffisamment élevé pour définir l'entier p .

- Les courbes en coordonnées polaires sont des cas particuliers de courbes paramétrées, l'aspect d'un point singulier dépend des valeurs de p et q associées aux dérivées itérées.
- Les dérivées successives de $\mathbf{OM}(\alpha)$ sont les suivantes lorsque α est une solution d'ordre p de l'équation $r(\theta) = 0$:

$$r(\alpha) = r'(\alpha) = r''(\alpha) = \dots = r^{(p-1)}(\alpha) = 0 \text{ ET } r^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

$$\implies \begin{cases} \mathbf{OM}(\alpha) = \mathbf{OM}'(\alpha) = \mathbf{OM}''(\alpha) = \dots = \mathbf{OM}^{(p-1)}(\alpha) = \mathbf{0} \\ \text{ET } \mathbf{OM}^{(p)}(\alpha) = r^{(p)}(\alpha) \mathbf{u}_\alpha \neq \mathbf{0} \\ \text{ET } \mathbf{OM}^{(p+1)}(\alpha) = (p+1)r^{(p)}(\alpha) \mathbf{u}_{\alpha+\pi/2} + r^{(p+1)}(\alpha) \mathbf{u}_\alpha \neq \mathbf{0} \\ \text{ET } (\mathbf{OM}^{(p)}(\alpha), \mathbf{OM}^{(p+1)}(\alpha)) \text{ est libre ET } q = p+1 \end{cases}$$

- Toute courbe polaire à l'origine a donc l'aspect soit d'un point régulier soit d'un point de rebroussement de première espèce. Dans tous les cas la tangente généralisée est de direction \mathbf{u}_α .
- La formule de Taylor aboutit à cet équivalent et met en évidence le signe de $r(\theta)$ au voisinage de α :

$$r(\theta) \underset{\theta \rightarrow \alpha}{\sim} \frac{r^{(p)}(\alpha)}{p!} (\theta - \alpha)^p$$

- L'entier p est impair si et seulement si α est une racine d'ordre impair de $r(\alpha) = 0$, et dans ce cas $r(\theta)$ s'annule et change de signe. L'aspect de la courbe à l'origine est celui d'un point régulier.
- Au contraire p est pair si et seulement si θ est une racine d'ordre pair de $r(\theta) = 0$, et $r(\theta)$ s'annule sans changer de signe au voisinage de α . L'origine est alors un point de rebroussement de première espèce.

Concavité

- La concavité d'une courbe paramétrée dépend du signe du déterminant $\det(\mathbf{OM}', \mathbf{OM}'')$ dont la formule de calcul est la même dans toute base orthonormée directe, la base $\mathcal{B}_\theta = (\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_{\theta+\pi/2})$ dans ce cas :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{OM}'(\theta), \mathbf{OM}''(\theta)) &= \det_{\mathcal{B}_\theta}(\mathbf{OM}'(\theta), \mathbf{OM}''(\theta)) \\ &= \det \begin{pmatrix} r'(\theta) & r''(\theta) - r(\theta) \\ r(\theta) & 2r'(\theta) \end{pmatrix} = r^2(\theta) + 2r'^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta) \end{aligned}$$

- La courbe polaire représentée par $r(\theta) = 1 + \cos \theta$ est appelée cardioïde; les propriétés $r(\pi) = r'(\pi) = 0$ et $r''(\pi) = 1$ justifient que l'origine est un point de rebroussement de première espèce; la concavité de la courbe ne change pas, elle est tournée vers la gauche en suivant le sens de parcours trigonométrique des θ croissants :

$$\det(\mathbf{OM}'(\theta), \mathbf{OM}''(\theta)) = \det \begin{pmatrix} -\sin \theta & -1 - 2 \cos \theta \\ 1 + \cos \theta & -2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$= 2 \sin^2 \theta + 1 + 3 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta = 3(1 + \cos \theta) \geq 0$$

Direction asymptotique et asymptote

• Par définition même de la direction asymptotique la courbe polaire $r(\theta)$ possède une direction asymptotique \mathbf{u}_α si et seulement si $\lim_{\theta \rightarrow \alpha} r(\theta) = \pm\infty$.

• La courbe paramétrée possède une asymptote Δ de vecteur directeur \mathbf{u}_α passant par H tel que $\mathbf{OH} = \ell \mathbf{u}_{\alpha+\pi/2}$ si et seulement si la limite $\lim_{\theta \rightarrow \alpha} \sin(\theta - \alpha) r(\theta) = \ell$ existe et est finie.

• Le signe de $\sin(\theta - \alpha) r(\theta) - \ell$ précise la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

• La limite ℓ peut être obtenue par un calcul d'équivalent :

$$\sin(\theta - \alpha) r(\theta) \underset{\theta \rightarrow \alpha}{\sim} (\theta - \alpha) r(\theta)$$

• La courbe polaire $r(\theta) = 2/\cos(2\theta)$ est tracée en entier sur un intervalle de longueur 2π et est invariante par rotation d'angle $-\pi/2$ car $r(\theta + \pi/2) = -r(\theta)$. Elle possède une symétrie d'axe Ox car $r(-\theta) = r(\theta)$.

Cette courbe comporte 7 autres morceaux similaires à celui obtenu par l'étude sur $[0, \pi/4[$.

Ces limites justifient que l'asymptote à la courbe au voisinage de $\theta = \pi/4$ est dirigée par $\mathbf{u}_{\pi/4}$ et contient ce point H :

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow \pi/4 \\ \theta < \pi/4}} r(\theta) = +\infty \quad h = \theta - \frac{\pi}{4} \quad \mathbf{OH} = -\mathbf{u}_{\pi/4+\pi/2} = \mathbf{u}_{-\pi/4}$$

$$f(h) = \frac{2 \sin(\theta - \pi/4)}{\cos(2\theta)} = \frac{2 \sin h}{\cos(2h + \pi/2)} = \frac{-2 \sin h}{\sin(2h)} = \frac{-2 \sin h}{2 \sin h \cos h}$$

de limite $\ell = -1$

L'inégalité $f(h) < -1$ pour h proche de 0 place la courbe dans le demi-plan délimité par cette asymptote qui ne contient pas l'origine.

Branches en spirales

• Une courbe polaire $r(\theta)$ contient une branche en spirale lorsque l'intervalle d'étude de la courbe s'effectue sur un intervalle non borné, par exemple \mathbb{R} ou \mathbb{R}_+ .

• Lorsque $r(\theta)$ tend vers une limite finie R au voisinage de $\pm\infty$ cette branche en spirale est un cercle asymptote de rayon R et centré à l'origine.

Lorsque $r(\theta)$ a une limite infinie en $\pm\infty$, la courbe n'est pas bornée.

• Les courbes polaires $r(\theta)$ caractérisées par un angle $\widehat{\mathbf{OM} \mathbf{OM}'} = \alpha$ constant sont appelées spirales logarithmiques. Ce sont les courbes polaires dont la fonction $r(\theta)$ est solution de cette équation différentielle :

$$\tan V = \frac{r}{r'} = \tan \alpha \quad r' = \frac{1}{\tan \alpha} r \quad r(\theta) = \lambda e^{\theta / \tan \alpha}$$

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES COURBES

Dans ce chapitre le plan affine euclidien est muni du repère canonique $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ où les vecteurs \mathbf{i} et \mathbf{j} sont orthogonaux et unitaires.

Les courbes paramétrées étudiées sont généralement de classe \mathcal{C}^1 ou \mathcal{C}^2 et notées $M(t)$ avec $t \in [a, b]$.

Rectification

• L'abscisse curviligne s et la longueur L d'une courbe paramétrée $M(t)$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[a, b]$ sont définies à partir de ces notations plus ou moins précises :

$$s(t) = \int \|\mathbf{OM}'(t)\| dt \quad s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \|\mathbf{OM}'(t)\| \quad ds = \|\mathbf{OM}'\| dt$$

$$L = \int_a^b \|\mathbf{OM}'(t)\| dt = \int_a^b \frac{ds(t)}{dt} dt = \int_a^b ds = s(b) - s(a)$$

L'application $s(t)$ est donc une primitive de $\|\mathbf{OM}'(t)\|$, généralement calculée par intégration sur le segment $[a, t]$.

• Le calcul de cette longueur dépend de la façon dont la courbe est représentée, courbe du graphe d'une fonction $f(x)$, courbe du plan paramétrée par $(x(t), y(t))$ ou courbe polaire associée à $r(\theta)$:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \quad \int_a^b \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

• Les notations utilisées dans ce paragraphe omettent régulièrement le nom des variables et représentent de façon différentielle les dérivées :

$$x'^2 + y'^2 \text{ à la place de } x'^2(t) + y'^2(t) \quad \frac{ds}{dt} \text{ à la place de } s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

• Le vecteur tangent \mathbf{OM}' est aussi appelé vecteur vitesse, et sa norme $\|\mathbf{OM}'\|$ est la vitesse.

Le lien entre la vitesse et la longueur de la courbe est le même qu'entre un indicateur de vitesse et un compteur kilométrique.

• Lorsque l'application φ est croissante, de classe \mathcal{C}^1 et bijective d'un segment $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$, et que l'application φ^{-1} est de classe

\mathcal{C}^1 , les deux paramétrages $\widetilde{M} = M \circ \varphi$ sont appelés paramétrages équivalents de la même courbe.

Une telle application φ est appelée changement de paramétrage admissible de la courbe paramétrée.

• La longueur de la courbe paramétrée $\widetilde{M} = M \circ \varphi$ définie sur $[\alpha, \beta]$ est la même que celle définie par la courbe M .

• La démonstration repose sur un changement de variable :

$$\mathbf{O}\widetilde{M}(u) = \mathbf{O}M(\varphi(u)) \quad \mathbf{O}\widetilde{M}'(u) = \varphi'(u) \mathbf{O}M'(\varphi(u))$$

$$\|\mathbf{O}\widetilde{M}'(u)\| = \varphi'(u) \|\mathbf{O}M'(\varphi(u))\|$$

$$L = \int_\alpha^\beta \|\mathbf{O}\widetilde{M}'(u)\| du = \int_\alpha^\beta \|\mathbf{O}\widetilde{M}'(u)\| \varphi'(u) du = \int_a^b \|\mathbf{O}M'(t)\| dt$$

• L'hypothèse que l'application φ est strictement croissante indique que les deux courbes M et \widetilde{M} sont parcourues dans le même sens : $M(a) = \widetilde{M}(\alpha)$ et $M(b) = \widetilde{M}(\beta)$, sans points singuliers supplémentaires.

L'hypothèse que l'application φ^{-1} est bien définie et de classe \mathcal{C}^1 ne sert pas dans cette démonstration, mais permet de retrouver le paramétrage $M(t)$ à partir de celui de $\widetilde{M}(u)$.

Paramétrage régulier et paramétrage normal

• Le paramétrage $M(t)$ d'une courbe Γ pour laquelle le vecteur tangent $\mathbf{OM}'(t)$ ne s'annule pas est appelé paramétrage régulier.

• Le paramétrage $P(s)$ d'une courbe pour laquelle le vecteur tangent $\mathbf{OP}'(s)$ est unitaire — $\|\mathbf{OP}'(s)\| = 1 \neq 0$ — est appelée paramétrage normal.

Tout paramétrage normal est régulier.

Dans la suite le paramétrage $M(t)$ est régulier de classe \mathcal{C}^1 , dépend d'une variable $t \in [a, b]$ et définit la courbe Γ .

La courbe paramétrée $M(t)$ de classe \mathcal{C}^1 est sans point singulier ni point de rebroussement car la vitesse est continue et ne s'annule pas. Les paramétrages normaux sont notés $P(s)$ et dépendent d'une variable s .

• Le paramétrage $P(s)$ ci-dessous est équivalent au paramétrage $M(t)$ et normal ; il représente la même courbe Γ ; l'application s est strictement croissante car $s'(t) = \|\mathbf{OM}'(t)\| > 0$ et continue, donc

bijective :

$$P = M \circ s^{-1} \quad M = P \circ s \quad \text{autrement dit } M(t) = P(s(t))$$

$$\mathbf{OP}'(\sigma) = \frac{1}{s'(s^{-1}(\sigma))} \mathbf{OM}'(s^{-1}(\sigma)) = \frac{\mathbf{OM}'(s^{-1}(\sigma))}{\|\mathbf{OM}'(s^{-1}(\sigma))\|} \quad \|\mathbf{OP}'\| = 1$$

- Le changement de paramétrage s est admissible.

Les courbes représentées par les paramétrages $M(t)$ sur $t \in [a, b]$ et $P(s)$ sur $s \in [0, L]$ où $L = \int_a^b ds$ sont identiques, elles sont parcourues dans le même sens de $M(a) = P(0)$ à $M(b) = P(L)$.

Repère direct de Frénet

Dans la suite de ce chapitre la courbe régulière paramétrée par $M(t)$ a pour paramétrage normal $P(s)$ qui vérifie $M(t) = P(s(t))$.

Les notations usuelles nomment de la même façon la fonction d'abscisse curviligne $s(\bullet)$ et la variable s d'un paramétrage normal.

- Le vecteur tangent $\mathbf{T}(s) = \mathbf{OP}'(s)$ d'une courbe normale est unitaire et de la forme \mathbf{u}_φ . Le vecteur $\mathbf{N}(s) = \mathbf{u}_{\varphi+\pi/2}$ associé à $\mathbf{T}(s)$ est choisi de façon à ce que la base $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)) = (\mathbf{u}_\varphi, \mathbf{u}_{\varphi+\pi/2})$ soit une base orthonormée directe.

- Le repère de Frénet au point $P(s)$ d'une courbe de paramétrage normal est le repère affine $(P(s), \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s))$.

- Le repère de Frénet en un point d'une courbe Γ de paramétrage régulier $M(\bullet)$ en t est le repère de Frénet de Γ de paramétrage normal $P(\bullet)$ en $s(t)$.

En toute rigueur il devrait être noté $(P(s(t)), \mathbf{T}(s(t)), \mathbf{N}(s(t)))$:

$$\begin{aligned} M &= P \circ s & M(t) &= P(s(t)) \\ \mathbf{OM}'(t) &= s'(t) \mathbf{OP}'(s(t)) = \|\mathbf{OM}'(t)\| \mathbf{T}(s(t)) \\ \mathbf{OM}' &= \frac{ds}{dt} \mathbf{T} & \mathbf{T} &= \frac{\mathbf{OM}'}{\|\mathbf{OM}'\|} \end{aligned}$$

Ces deux dernières lignes correspondent à la même propriété ; la première des deux précise les variables et les compositions d'applications intervenant dans l'égalité vectorielle, alors que la dernière les sous-entend.

- Le repère de Frénet d'une courbe est indépendant du paramétrage admissible choisi, et $\mathbf{T}_P(s(t)) = \mathbf{T}_M(t)$.

Pour cette raison le vecteur tangent est dans la suite noté \mathbf{T} au point

$P(s) = M(s(t))$ sans préciser le paramétrage.

- Le repère de Frénet $(M, \mathbf{T}, \mathbf{N})$ d'un point M d'une courbe Γ est transformé en $(M, -\mathbf{T}, -\mathbf{N})$ lorsque le sens de parcours échange les extrémités de Γ .

Étude de la courbure

Dans cette partie les courbes étudiées sont toutes de classe \mathcal{C}^2 .

Courbure pour un paramétrage normal

- Le vecteur $\mathbf{OP}''(s) = \mathbf{T}'(s)$ d'une courbe de paramétrage normal $P(s)$ est orthogonal au vecteur unitaire $\mathbf{OP}'(s) = \mathbf{T}(s)$, et est donc proportionnel au vecteur $\mathbf{N}(s)$ du repère de Frénet ; la courbure algébrique $\rho(s)$ en $P(s)$ est définie ainsi :

$$0 = (\|\mathbf{T}(s)\|^2)' = 2 \langle \mathbf{T}'(s) | \mathbf{T}(s) \rangle \quad \mathbf{OP}''(s) = \mathbf{T}'(s) = \rho(s) \mathbf{N}(s)$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \rho \mathbf{N} \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\rho \mathbf{T}$$

- Un point d'une courbe paramétrée est birégulier lorsque $p = 1$ et $q = 2$; cette condition est équivalente à une courbure ρ non nulle pour les courbes de paramétrage normal.

- Le rayon de courbure en un point birégulier $P(s)$ est $R = 1/\rho$, et le cercle \mathcal{C} de rayon R et de centre Ω tel que $P\Omega = R\mathbf{N}$ est appelé cercle osculateur de Γ en $P(s)$.

- Un paramétrage régulier du cercle de centre A et de rayon r parcouru dans le sens trigonométrique est le suivant, le paramétrage normal et la courbure en découlent :

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad M(t) \begin{cases} x(t) = x_0 + r \cos t \\ y(t) = y_0 + r \sin t \end{cases} \quad \mathbf{OM}'(t) \begin{cases} x'(t) = -r \sin t \\ y'(t) = r \cos t \end{cases}$$

$$\|\mathbf{OM}'(t)\| = r \quad s(t) = t/R \quad P(s) \begin{cases} x(s) = x_0 + r \cos(s/r) \\ y(s) = y_0 + r \sin(s/r) \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{OP}}{ds} = \mathbf{u}_{s/r+\pi/2} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\frac{1}{r} \mathbf{u}_{s/r}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{u}_{s/r+\pi} = -\mathbf{u}_{s/r} \quad \rho = 1/r \quad R = r \quad \mathbf{OP} = R \mathbf{u}_{s/r} = \mathbf{AP}$$

Le rayon de courbure $1/\rho$ d'un cercle parcouru dans le sens direct est son rayon r . Le rayon de courbure du même cercle parcouru dans

le sens inverse est $-r$

Dans les deux cas $A = \Omega$ et le cercle osculateur du cercle est lui-même.

- Le cercle osculateur \mathcal{C} paramétré de façon normale et parcouru dans le sens de \mathbf{T} , et la courbe Γ ont le même repère de Frénet et la même courbure au point de contact $P(s)$.

Les dérivées premières et secondes des paramétrages normaux du cercle et de la courbe sont égales en ce point.

Pour cette raison le cercle osculateur est le cercle « le plus proche » de la courbe Γ parmi tous les cercles tangents à Γ en $P(s)$,

- La courbe décrite par les centres des cercles osculateurs d'une courbe Γ est appelée développée de Γ .

Courbure pour un paramétrage régulier

- La courbure en un point d'une courbe Γ de paramétrage régulier M en t est obtenue, comme le repère de Frénet, à partir du paramétrage normal P de Γ en $s(t)$.

- Pour toute courbe de paramétrage régulier, la dérivée de l'application $t \mapsto \mathbf{T}_M$ correspondant au vecteur tangent unitaire de Frénet en $M(t)$ est en fait la composition des applications $t \mapsto s(t)$ avec $s \mapsto \mathbf{T}_P(s) = \mathbf{OP}'(s)$ et se dérive comme une application composée :

$$\mathbf{T}_M(t) = \mathbf{T}_P(s(t)) \quad \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \rho \mathbf{N} \quad \text{correspond à } (\mathbf{T} \circ s)'(t)$$

Les notations employées notent généralement \mathbf{T} le vecteur tangent de Frénet à la place de $\mathbf{T}_M(t) = \mathbf{T}_P(s(t))$, et sous-entendent que le calcul est fait au point $M(t) = P(s(t))$.

- Le vecteur accélération s'écrit donc ainsi dans le repère de Frénet :

$$\begin{aligned} \mathbf{OM}'(t) &= \frac{ds}{dt} \mathbf{T} & \frac{ds}{dt} &= \|\mathbf{OM}'(t)\| \\ \mathbf{OM}''(t) &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \rho \mathbf{N} \end{aligned}$$

Angle de relèvement

- Si l'application $t \mapsto z(t)$ définie d'un intervalle I dans l'ensemble des complexes de module 1 du plan complexe est de classe \mathcal{C}^n où $n \geq 1$, alors il existe une application réelle $\varphi(t)$ de classe \mathcal{C}^n définie sur I telle que $z(t) = e^{i\varphi(t)}$ pour tout $t \in I$.

- Si l'application $\varphi(t)$ est solution, alors la dérivée de cette égalité complexe complexe aboutit à $z'(t) = \varphi'(t) i e^{i\varphi(t)}$ et $-i z'(t)/z(t) = \varphi'(t)$.

Réciproquement vérifions que cette primitive complexe de $\varphi(t)$ de l'application $-i z'(t)/z(t)$ où $t_0 \in I$ et $\theta_0 = \arg z(t_0)$ est bien solution :

$$\varphi(t) = \theta_0 - i \int_{t_0}^t \frac{z'(u)}{z(u)} du \quad \varphi(t_0) = \theta_0$$

L'application φ est *a priori* à valeurs complexes.

L'application $f(t) = e^{-i\varphi(t)} z(t)$ est dérivable sur l'intervalle I de dérivée $(z'(t) - i\varphi'(t) z(t))e^{-i\varphi(t)} = 0$. L'application $f(t)$ est constante sur I , de valeur $f(t) = f(t_0) = 1$; ainsi $z(t) = e^{i\varphi(t)}$.

- Si l'application $t \mapsto \mathbf{U}(t)$ définie d'un intervalle I dans l'ensemble des vecteurs unitaires du plan est de classe \mathcal{C}^n , alors il existe une application réelle φ de classe \mathcal{C}^n définie sur I telle que $\mathbf{U}(t) = \mathbf{u}_{\varphi(t)}$ pour tout $t \in I$:

$$\mathbf{U}(t) = \cos(\varphi(t)) \mathbf{i} + \sin(\varphi(t)) \mathbf{j} = \mathbf{u}_{\varphi(t)} \quad \mathbf{u}_{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

- La preuve de ce théorème consiste à identifier le plan complexe \mathbb{C} avec \mathbb{R}^2 , où $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \in \mathbb{R}^2$ correspond à $z = x + iy$.

- La fonction vectorielle \mathbf{T} de Frénet possède une fonction de relèvement φ de classe \mathcal{C}^1 dès que le paramétrage normal $P(\bullet)$ est de classe \mathcal{C}^2 ; la dérivation de la première égalité aboutit au calcul de la courbure :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) = \mathbf{u}_{\varphi(s)} \quad \rho(s) \mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s) = \varphi'(s) \mathbf{u}_{\varphi(s)+\pi/2} = \varphi'(s) \mathbf{N}(s) \\ \rho(s) = \varphi'(s) \quad \rho = \frac{d\varphi}{ds} \end{aligned}$$

Détermination de la courbure d'une courbe paramétrée

- La propriété précédente permet de calculer la courbure d'une courbe paramétrée de façon normale par $(x_P(s), y_P(s))$:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi(s)) = x'_P(s) \quad \sin(\varphi(s)) = y'_P(s) \quad \tan(\varphi(s)) = \frac{y'_P(s)}{x'_P(s)} \\ \cos \varphi = \frac{dx}{ds} \quad \sin \varphi = \frac{dy}{ds} \quad \tan \varphi = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} \end{aligned}$$

$$\rho(s) = \varphi'(s) = -\frac{x''_P(s)}{y'_P(s)} = \frac{y''_P(s)}{x'_P(s)} = \frac{y''_P(s)x'_P(s) - x''_P(s)y'_P(s)}{x'_P(s)^2}$$

• Le vecteur tangent de Frénet est noté \mathbf{T} indépendamment du paramétrage choisi car $\mathbf{T}_M(t) = \mathbf{T}_P(s(t))$. Il en est de même pour l'angle de relèvement φ défini à partir du vecteur \mathbf{T} . En effet les angles de relèvement pour une courbe régulière en $M(s(t))$ ou pour la courbe normale associée en $P(s)$ sont égaux et $\varphi_M(s(t)) = \varphi_P(s)$.

• La méthode géométrique pour déterminer l'angle de relèvement d'une courbe Γ paramétrée de façon régulière par $(x_M(t), y_M(t))$ consiste le plus souvent à exploiter la relation en $\tan \varphi$ pour le paramétrage normal $(x_P(s), y_P(s))$ associé à Γ :

$$\begin{aligned} x_P(s(t)) &= x_M(t) & x'_P(s(t))s'(t) &= x'_M(t) \\ y_P(s(t)) &= y_M(t) & y'_P(s(t))s'(t) &= y'_M(t) \\ \tan(\varphi(s(t))) &= \frac{y'_P(s(t))}{x'_P(s(t))} = \frac{y'_M(t)}{x'_M(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \end{aligned}$$

• La dérivée de cette application composée relie la courbure aux variations de l'angle de relèvement :

$$\varphi_M(t) = \varphi_P(s(t)) \quad \rho = \frac{d\varphi_P(s)}{ds} \quad \frac{d\varphi_M(t)}{dt} = \frac{d\varphi_P(s(t))}{ds} \frac{ds(t)}{dt}$$

$$\rho = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad \text{au point } M(t) = P(s(t)).$$

• La combinaison des deux remarques précédentes permet d'extraire $\rho = d\varphi/ds$.

• Une méthode comparable traitant $\cos \varphi$ ou $\sin \varphi$ à la place de $\tan \varphi$ est aussi possible :

$$\cos \varphi = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad \sin \varphi = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

• L'exemple suivant détermine de cette manière la courbure de la parabole d'équation $y = ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}$:

$$M(t) \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = at^2 \end{cases} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 4a^2t^2}$$

$$\tan \varphi = \tan(\varphi(s(t))) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = 2at \quad \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{ds} (1 + \tan^2 \varphi) = 2a$$

$$\rho = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{2a}{\frac{ds}{dt}(1 + \tan^2 \varphi)} = \frac{2a}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}(1 + 4a^2t^2)} = \frac{2a}{(1 + 4a^2t^2)^{3/2}}$$

• Le repère de Frénet et le centre Ω du cercle osculateur en découlent :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \mathbf{O}M'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2at \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}} \begin{pmatrix} -2at \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{O}\Omega = \mathbf{O}M + M\Omega = \mathbf{O}M + \frac{1}{\rho} \mathbf{N} \quad \Omega(t) \begin{cases} x_\Omega(t) = -4a^2t^3 \\ y_\Omega(t) = \frac{1 + 6a^2t^2}{2a} \end{cases}$$

• De façon générale la dérivation de $\tan(\varphi(s(t)))$ permet donc de calculer la courbure $\rho = d\varphi/ds$:

$$[1 + \tan^2(\varphi(s(t)))] \varphi'(s(t)) s'(t) = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right)' \frac{x'(t)}{s'(t)} = \cos(\varphi(s(t)))$$

$$\begin{aligned} \rho(s(t)) = \varphi'(s(t)) &= \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{x'^2(t) \cos^2(\varphi(s(t))) s'(t)} \\ &= \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{s'^3(t)} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}} \end{aligned}$$

• Dans certains cas, l'angle de relèvement φ d'une courbe paramétrée peut être obtenu directement, cette propriété simplifie ensuite le calcul de la courbure en un point régulier car elle évite la dérivation de $\tan \varphi$:

$$\begin{cases} x(t) = t + \sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = 1 + \cos t \\ y'(t) = -\sin t \end{cases} \quad \text{régulière pour } t \in]-\pi, \pi[$$

$$\tan \varphi = \frac{-2 \sin(t/2) \cos(t/2)}{2 \cos^2(t/2)} = -\tan(t/2) = \tan(-t/2)$$

$$\varphi = -t/2 + k\pi \quad \text{correspond à } (\varphi \circ s)(t)$$

$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = \sqrt{(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 + 2 \cos t} = 2 \cos(t/2)$$

$$\rho = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = -\frac{1}{4 \cos(t/2)} \quad \text{par dérivation de l'application } \varphi \circ s$$

• Cette courbe est appelée cycloïde, elle correspond à la trajectoire d'un point de la bande de roulement d'une roue roulant sans glisser sur un plan. La développée de la cycloïde est la même cycloïde

translatée.

Détermination de la courbure d'une courbe polaire

- En coordonnées polaire l'angle de relèvement φ est associé à l'angle de la tangente $V = \mathbf{u}_\theta \widehat{\mathbf{OM}}'(\theta)$ par $\varphi = \theta + V$:

$$\rho = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = \frac{1 + \frac{dV}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} \quad \tan V = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)} \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r'^2(\theta) + r^2(\theta)}$$

La dérivation de $\tan V_\theta$ permet, comme pour les courbes paramétrées, d'extraire dV/ds pour obtenir la courbure.

- L'exemple suivant illustre cette méthode de calcul de la courbure :

$$r(\theta) = \tanh(\theta/2) \quad r'(\theta) = \frac{1 - \tanh^2(\theta/2)}{2} = \frac{1}{2 \cosh^2(\theta/2)}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\theta} &= \sqrt{\tanh^2(\theta/2) + \frac{(1 - \tanh^2(\theta/2))^2}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{4 \tanh^2(\theta/2) + 1 + \tanh^4(\theta/2) - 2 \tanh^2(\theta/2)}}{2} \\ &= \frac{1 + \tanh^2(\theta/2)}{2} = \frac{\cosh^2(\theta/2) + \sinh^2(\theta/2)}{2 \cosh^2(\theta/2)} = \frac{\cosh \theta}{2 \cosh^2(\theta/2)} \end{aligned}$$

$$\tan V = \frac{\tanh(\theta/2)}{\frac{1}{2 \cosh^2(\theta/2)}} = 2 \cosh(\theta/2) \sinh(\theta/2) = \sinh \theta$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\cosh \theta}{1 + \tan^2 V} = \frac{1}{\cosh \theta}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{d\theta}{ds} + \frac{dV}{ds} = \frac{1 + \frac{dV}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = \frac{1 + \frac{1}{\cosh \theta}}{\frac{\cosh \theta}{2 \cosh^2(\theta/2)}} = \frac{2 \cosh^2(\theta/2)(\cosh \theta + 1)}{\cosh^2 \theta} \\ &= \frac{2 \cosh^2(\theta/2)(2 \cosh^2(\theta/2) - 1 + 1)}{\cosh^2 \theta} = \frac{4 \cosh^4(\theta/2)}{\cosh^2 \theta} \end{aligned}$$

- Cette méthode de dérivation de $\tan V$ pour déterminer la courbure est générale :

$$\begin{aligned} (1 + \tan^2(V(\theta)))V'(\theta) &= \left(\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}\right)' = \frac{r'^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta)}{r'^2(\theta)} \\ V'(\theta) &= \frac{r'^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta)}{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} \\ \rho &= \frac{1 + V'(\theta)}{s'(\theta)} = \frac{r^2(\theta) + 2r'^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta)}{(r^2(\theta) + r'^2(\theta))s'(\theta)} \\ &= \frac{r^2(\theta) + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)}{(r^2(\theta) + r'^2(\theta))^{3/2}} \end{aligned}$$

- Dans certains cas il est possible de déterminer directement les angles V et φ ; le calcul de la courbure en est simplifié.
- Le calcul de la courbure de la cardioïde définie en coordonnées polaire par $r(\theta) = 1 + \cos \theta$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$ met en œuvre cette simplification :

$$\tan V = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \frac{1 + \cos \theta}{-\sin \theta} = -\frac{2 \cos^2(\theta/2)}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{-1}{\tan(\theta/2)} = \tan\left(\frac{\theta - \pi}{2}\right)$$

$$V = \frac{\theta - \pi}{2} + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\theta} &= \sqrt{r'^2(\theta) + r^2(\theta)} = \sqrt{\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos \theta} = 2 \cos(\theta/2) \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = \frac{1 + \frac{dV}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = \frac{1 + 1/2}{2 \cos(\theta/2)} = \frac{3}{4 \cos(\theta/2)}$$

- Cette propriété provient du fait que la cardioïde est une cycloïde ; c'est une courbe obtenue en faisant rouler sans glisser une roue sur un cercle, la cardioïde correspond au cas particulier où les deux cercles ont le même rayon, et l'astroïde à un rapport 4 entre les rayons. Par ailleurs la développée de la cardioïde est une cardioïde obtenue à partir d'une homothétie appliquée à la cardioïde initiale.

Méthode algébrique de calcul de la courbure

- Ce déterminant dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = (\mathbf{T}, \mathbf{N})$ de Frénet dépend directement de la courbure :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(\mathbf{OM}'(t), \mathbf{OM}''(t)) &= \det_{\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}\left(\frac{ds}{dt} \mathbf{T}, \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \rho \mathbf{N}\right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{ds}{dt} & \frac{d^2s}{dt^2} \\ 0 & \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \rho \end{pmatrix} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \rho \end{aligned}$$

- Ce résultat appliquée aux courbes paramétrées aboutit à cette égalité :

$$\rho = \frac{\det(\mathbf{OM}'(t), \mathbf{OM}''(t))}{\|\mathbf{OM}'(t)\|^3} = \frac{\det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix}}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

- L'exemple suivant illustre le calcul de la courbure d'une ellipse :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t & \begin{cases} x'(t) = -a \sin t \\ y'(t) = b \cos t \end{cases} & \begin{cases} x''(t) = -a \cos t \\ y''(t) = -b \sin t \end{cases} \end{cases}$$

$$\rho = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

Les rayons de courbure aux sommets de l'ellipse sont donc a^2/b et b^2/a .

- La même méthode appliquée aux courbes en coordonnées polaires énonce cette égalité :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\det(\mathbf{OM}'(\theta), \mathbf{OM}''(\theta))}{\|\mathbf{OM}'(\theta)\|^3} = \frac{\det \begin{pmatrix} r'(\theta) & r''(\theta) - r(\theta) \\ r(\theta) & 2r'(\theta) \end{pmatrix}}{(r^2(\theta) + r'^2(\theta))^{3/2}} \\ &= \frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

- Les courbures à l'origine — en $\theta = \pi/6$ — et à l'extrémité — en $\theta = 0$ — des trois pétales de la courbe polaire $r = \cos(3\theta)$ peuvent s'obtenir de cette manière :

$$r(\theta) = \cos(3\theta)$$

$$\rho(\theta) = \frac{\cos^2(3\theta) + 18 \sin^2(3\theta) + 9 \cos^2(3\theta)}{(\cos^2(3\theta) + 9 \sin^2(3\theta))^{3/2}}$$

$$\rho(0) = 10 \qquad \rho(\pi/6) = \frac{18}{9^{3/2}} = \frac{2}{3}$$

TABLE DES MATIÈRES

Outils algébriques pour la géométrie	1		
Définitions	1		
Points et vecteurs	1		
Espaces vectoriels	1		
Espaces affines	4		
Familles de vecteurs	5		
Familles libres et familles liées	5		
Familles génératrices	8		
Bases	8		
Sous-espaces vectoriels	11		
Définitions	11		
Somme et intersection de sous-espaces vectoriels	13		
Projections vectorielles	15		
Théorie de la dimension	16		
Géométrie affine	17		
Droites et plans affines	17		
Barycentre	19		
Repères affines	20		
Projections affines	22		
Espaces euclidiens	23		
Produit scalaire	23		
Norme euclidienne	23		
Orthogonalité	25		
Bases orthonormées	25		
Déterminants	26		
Déterminants d'ordre deux	26		
Déterminants d'ordre trois	27		
Propriétés communes des déterminants	30		
Géométrie du plan	31		
Repérage dans le plan	31		
Repère canonique	31		
Angles	31		
Coordonnées polaires	32		
		Géométrie et algèbre linéaire	33
		Base du plan	33
		Déterminant par rapport à une base	33
		Géométrie euclidienne	34
		Vecteurs orthogonaux	34
		Bases orthonormées	34
		Produit scalaire et déterminant dans une base ortho-	
		normée	35
		Projections orthogonales	36
		Droites du plan	36
		Définitions équivalentes	36
		Distance d'un point à une droite	37
		Équation polaire d'une droite	38
		Les cercles	39
		Définition et équation cartésienne	39
		Caractérisation des cercles	39
		Théorèmes de l'angle inscrit	40
		Étude des coniques	43
		Définition géométrique et équation cartésienne	43
		Définition bifocale	45
		Équation polaire	47
		Réduction d'une équation cartésienne	48
		Géométrie de l'espace	51
		Repérage dans l'espace	51
		Repère canonique	51
		Coordonnées cylindriques	51
		Coordonnées sphériques	51
		Géométrie et algèbre linéaire	52
		Vecteurs colinéaires	52
		Famille de trois vecteurs	52
		Géométrie euclidienne	52
		Produit vectoriel	52
		Produit mixte	54
		Projections orthogonales	54
		Bases orthonormées	55
		Méthodes de calcul dans une base orthonormée	55

Ensembles remarquables	57
Plans de l'espace	57
Droites de l'espace	58
Angles de l'espace	60
Courbes paramétrées et polaires	61
Étude des courbes paramétrées	61
Définitions	61
Ensemble d'étude	61
Tableau de variation	63
Vecteurs tangents	64
Aspect local des courbes paramétrées	65
Concavité	67
Direction asymptoptique et asymptote	67
Étude des courbes polaires	69
Définitions	69
Ensemble d'étude	70
Vecteurs tangents et tableau de variation	71
Aspect de la courbe à l'origine	71
Concavité	72
Direction asymptoptique et asymptote	73
Branches en spirales	74
Propriétés métriques des courbes	75
Rectification	75
Paramétrage régulier et paramétrage normal	76
Repère direct de Frénet	77
Étude de la courbure	78
Courbure pour un paramétrage normal	78
Courbure pour un paramétrage régulier	79
Angle de relèvement	79
Détermination de la courbure d'une courbe paramétrée	80
Détermination de la courbure d'une courbe polaire	83
Méthode algébrique de calcul de la courbure	84
Table des matières	87