DM 25 : un corrigé

Ce problème correspond au sujet Mines-Ponts 2007 MP, à quelques aménagements près.

1 Préliminaires

1°) Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = T_k - T_{k-1}$, même lorsque $k = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k &= \sum_{k=n}^{m} u_k (T_k - T_{k-1}) \\ &= \sum_{k=n}^{m} u_k T_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} u_{k+1} T_k \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} T_k (u_k - u_{k+1}) + u_m T_m - u_n T_{n-1}.\end{aligned}$$

2°) Soit $N \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{N} (-t^2)^n \, dt = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^x t^{2n} \, dt = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Soit $t \in [0, x]$. Alors $-t^2 \neq 1$, donc on sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-t^2)^n = \frac{1 - (-t^2)^{N+1}}{1 + t^2}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{1 - (-t^2)^{N+1}}{1 + t^2} \, dt$, or $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} \, dt = \arctan x$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x + (-1)^N I_N$, en posant $\displaystyle I_N = \int_0^x \frac{(t^2)^{N+1}}{1 + t^2} \, dt$.
Or, par croissance de l'intégrale, lorsque $0 \leq x \leq 1$,

$$0 \leq I_N \leq \int_0^x t^{2N+2} \, dt = \frac{x^{2N+3}}{2N+3} \leq \frac{1}{2N+3} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Lorsque $-1 \leq x \leq 0$, on a de même

$$0 \leq -I_N \leq \int_x^0 t^{2N+2} \, dt = -\frac{x^{2N+3}}{2N+3} \leq \frac{1}{2N+3} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, dans les deux cas, d'après le principe des gendarmes, $I_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \arctan x$, ce qu'il fallait démontrer.

3°) D'après la propriété C, $\chi(1) = \chi(1\times 1) = \chi(1)\chi(1)$, donc $\chi(1) \in \{0, 1\}$.
Si $\chi(1) = 0$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $\chi(a) = \chi(a\times 1) = \chi(a)\chi(1) = 0$, donc χ est nulle, ce qui est faux. Ainsi, $\chi(1) = 1$.

4°) $\diamond$ Soit $k, h \in \mathbb{Z}$ tels que $\overline{k} = \overline{h}$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $k = h + \alpha N$, or χ est N-périodique, donc $\chi(k) = \chi(h)$. Ainsi la quantité $\chi(k)$ ne dépend que de $\overline{k}$, ce qui permet bien de définir l'application $\widetilde{\chi}$.
De plus χ est non nulle, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\chi(k) \neq 0$. Alors $\widetilde{\chi}(\overline{k}) \neq 0$, donc $\widetilde{\chi}$ est également non nulle.
$\diamond$ Soit $\alpha \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \overline{a}$. D'après le cours, a est premier avec N, donc d'après l'identité de Bezout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $ua+vN = 1$. Alors $1 = \chi(1) = \chi(ua + vN) = \chi(ua) = \chi(u)\chi(a)$, donc $\widetilde{\chi}(\alpha) = \chi(a) \neq 0$. On peut donc considérer la restriction $\widetilde{\chi}|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}^{\mathbb{R}^*}$.
D'après la propriété C, on a immédiatement que,
pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{\chi}(\overline{a}\times\overline{b}) = \chi(ab) = \widetilde{\chi}(\overline{a}) \times \widetilde{\chi}(\overline{b})$, donc $\widetilde{\chi}|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}^{\mathbb{R}^*}$ est un morphisme de groupes multiplicatifs.

2 Cas particuliers

5°) On a vu que $\chi(1) = 1$, or χ est 2-périodique, donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\chi(2n+1) = 1$.
D'après la propriété A, $\chi(0) = 0$, donc par 2-périodicité, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\chi(2n) = 0$.
Ceci détermine entièrement l'application χ.
Réciproquement, cette application vérifie bien les 4 axiomes de l'énoncé.

6°) $\chi(3) = \chi(-1)$. De plus, $\chi(-1)^2 = \chi((-1)\times(-1)) = \chi(1) = 1$,
donc $\chi(3) = \chi(-1) \in \{1, -1\}$.

7°) $\diamond$ Soit $k \in \mathbb{Z}$.
$\chi(3) = -1$ et χ est 4-périodique, donc si $k \equiv 3\ [4]$, alors $\chi(k) = -1$.
De même, $\chi(1) = 1$, donc si $k \equiv 1 [4]$, alors $\chi(k) = 1$.
Enfin, si $k \equiv 0\ [4]$ ou $k \equiv 2\ [4]$, alors k et 4 ne sont pas premiers, donc d'après la propriété B, $\chi(k) = 0$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\chi(2k) = 0$ et $\chi(2k + 1) = (-1)^k$.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par sommation par paquets,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\chi(k)}{k} = \sum_{0\leq 2k\leq n}\frac{\chi(2k)}{2k} + \sum_{0\leq 2k+1\leq n}\frac{\chi(2k+1)}{2k+1},$$

or $0 \leq 2k + 1 \leq n \iff -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{n-1}{2} \iff 0 \leq k \leq \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$, donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\chi(k)}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\frac{\chi(2k+1)}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\frac{(-1)^k}{2k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$ d'après la question 2.

3 Convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n}$

8°) D'après le cours, pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$, $\overline{k} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ si et seulement si k est premier avec N, c'est-à-dire si et seulement si $k \in P$.
Ainsi, $\overline{\prod_{k\in P} ak} = \prod_{k\in P} \overline{a}\overline{k} = \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \overline{a}x$.
Mais $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, donc l'application $\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \\ x & \longmapsto & \overline{a}x \end{array}$ est une bijection, dont la bijection réciproque est $\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \\ x & \longmapsto & \overline{a}^{-1}x \end{array}$. Ainsi, par changement de variable, on obtient que $\prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \overline{a}x = \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$, c'est-à-dire, en tenant compte du fait que $\varphi(N) = |P| = |(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*|$, $\overline{a}^{\varphi(N)}\Big(\prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x\Big) = \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$, donc, en multipliant par l'inverse de ce produit (dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$), on obtient que $\overline{a}^{\varphi(N)} = 1$. Ainsi, $a^{\varphi(N)} \equiv 1\ [N]$, ce qu'il fallait démontrer.

9°) D'après la question 4, en notant $f = \widetilde{\chi}|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}^{\mathbb{R}^*}$, on peut écrire :
$1 = \chi(1) = \widetilde{\chi}(\overline{1}) = f(\overline{1}) = f(\overline{a}^{\varphi(N)}) = f(\overline{a})^{\varphi(N)}$, car f est un morphisme de groupes, or $f(\overline{a}) \in \mathbb{R}^*$, donc $f(\overline{a}) \in \{-1, 1\}$. Mais $f(\overline{a}) = \widetilde{\chi}(\overline{a}) = \chi(a)$, donc $|\chi(a)| = 1$.

10°) On adopte un raisonnement analogue à la question 8 :
D'après la propriété B, $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k\in P} \chi(ak)$, donc en posant toujours $f = \widetilde{\chi}|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}^{\mathbb{R}^*}$, $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k\in P} f(\overline{a}\overline{k}) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} f(\overline{a}x)$. Alors par le même changement de variables qu'en question 8, on en déduit que $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} f(x)$, mais le calcul que l'on vient d'écrire prouve, avec $a = 1$, que $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} f(x)$, donc on a bien montré que $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$.

11°) $\diamond$ Ainsi, $\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \chi(a) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$. En choisissant a tel que $\chi(a) \neq 1$, ce qui est possible d'après l'énoncé, on obtient que $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = 0$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = 0$.

$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $x_{n+1} - x_n = \chi(n+N) - \chi(n) = 0$ d'après la propriété D. Ainsi, la suite (x_n) est constante et $x_0 = 0$, donc elle est identiquement nulle. Ceci démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) = 0$.

12°) Par division euclidienne de m par N, il existe $q, h \in \mathbb{N}$ tels que $m = qN + h$ avec $0 \leq h \leq N-1$. Alors, par sommation par paquets,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \chi(k) &= \sum_{k=0}^{m} \chi(k) \\
&= \sum_{k=0}^{qN-1} \chi(k) + \sum_{k=qN}^{m} \chi(k) \\
&= \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{k=iN}^{iN+N-1} \chi(k) + \sum_{k=qN}^{m} \chi(k)
\end{aligned}$$

or d'après la question précédente, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=iN}^{iN+N-1} \chi(k) = 0$,

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \chi(k) = \sum_{k=qN}^{qN+h} \chi(k) = \sum_{k=0}^{h} \chi(k)$, par N-périodicité de χ.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \chi(k) = \sum_{k=1}^{h} \chi(k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq h \\ k \in P}} \chi(k)$ (d'après la propriété B). Alors, par inégalité triangulaire, $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leq \sum_{\substack{1 \leq k \leq h \\ k \in P}} |\chi(k)| \leq \sum_{k \in P} |\chi(k)|$, mais d'après la question 9, pour tout $k \in P$, $|\chi(k)| = 1$, donc $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leq |P| = \varphi(N)$.

13°) $\diamond$ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons $b_k = \left|T_k\Big(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\Big)\right| = |T_k|\Big(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\Big)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{n} \varphi(N)\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \varphi(N)\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)$, car la dernière somme est télescopique. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \leq \varphi(N)$. La suite $\displaystyle\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc majorée, et elle est clairement croissante car $b_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc cette suite de réels est convergente, ce qui prouve la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} b_n$, c'est-à-dire l'absolue convergence de la série $\sum_{n\geq 1} T_n\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)$.

$\diamond$ Afin d'utiliser la question 1, posons pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_k=\chi(k)$ et $u_k=\frac{1}{k}$. Posons également $\alpha_0=0=\chi(0)$ et $u_0=0$.

Alors, lorsque $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\chi(k)}{k}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k=-u_1T_0+\sum_{k=1}^{n-1}T_k(u_k-u_{k+1})+u_nT_n$.

$T_0=0$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\chi(k)}{k}=\frac{T_n}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}T_k\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)$.

La suite (T_n) est bornée d'après la question précédente, donc $\displaystyle\frac{T_n}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. De plus la série $\sum_{n\geq 1} T_n\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)$ est absolument convergente, donc elle converge. On en déduit que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\chi(k)}{k}$ est convergente, ce qu'il fallait démontrer.

4 Comportement asymptotique

14°) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, notons D_k l'ensemble des entiers naturels qui divisent k.
Notons $n=\prod_{p\in\mathbb{P}_1}p^{v_p}$ et $m=\prod_{p\in\mathbb{P}_2}p^{v_p}$ les décompositions de n et m en produit de nombres premiers, où $\mathbb{P}_1$ (respectivement : $\mathbb{P}_2$) désigne l'ensemble des nombres premiers qui divisent n (respectivement m). n et m sont premiers entre eux, donc $\mathbb{P}_1\cap\mathbb{P}_2=\emptyset$.
Soit $a\in D_{nm}$. Alors on sait que la décomposition de a en produit de nombres premiers est de la forme $a=\prod_{p\in\mathbb{P}_1\cup\mathbb{P}_2}p^{k_p}$, où pour tout $p\in\mathbb{P}_1\cup\mathbb{P}_2$, $0\leq k_p\leq v_p$. Ainsi, en posant $b=\prod_{p\in\mathbb{P}_1}p^{k_p}$ et $c=\prod_{p\in\mathbb{P}_2}p^{k_p}$, on peut affirmer que $a=bc$ avec $b\in D_n$ et $c\in D_m$.
Réciproquement, il est évident que si $b\in D_n$ et $c\in D_m$, alors bc est un diviseur de nm. En résumé, $D_{nm}=\{bc\ /\ b\in D_n \text{ et } c\in D_m\}$ et plus précisément, l'application $\begin{array}{ccc} D_n\times D_m & \longrightarrow & D_{nm}\\ (b,c) & \longmapsto & bc\end{array}$ est une bijection. Alors, par changement de variables,
$f_{nm}=\displaystyle\sum_{a\in D_{nm}}\chi(a)=\sum_{(b,c)\in D_n\times D_m}\chi(bc)=\sum_{b\in D_n}\sum_{c\in D_m}\chi(b)\chi(c)$, d'après la propriété C.
Ainsi, par distributivité généralisée, $f_{nm}=\Big(\displaystyle\sum_{b\in D_n}\chi(b)\Big)\times\Big(\sum_{c\in D_m}\chi(c)\Big)=f_nf_m$.

15°) p étant premier, les diviseurs de p^α sont les p^β avec $0\leq\beta\leq\alpha$.
Ainsi, $f_{p^\alpha}=\displaystyle\sum_{\beta=0}^{\alpha}\chi(p^\beta)$. De plus, pour tout $\beta\in\mathbb{N}$, $\chi(p^\beta)=\chi(p)^\beta$, donc $f_{p^\alpha}=\displaystyle\sum_{\beta=0}^{\alpha}\chi(p)^\beta$.

D'après la question 9, $\chi(p) \in \{-1, 0, 1\}$.
Si $\chi(p) = 1$, alors $f_{p^\alpha} = \alpha + 1$.
Si $\chi(p) = 0$, alors $f_{p^\alpha} = 1$.
Il reste le cas où $\chi(p) = -1$. Alors $f_{p^\alpha} = \displaystyle\sum_{\beta=0}^{\alpha}(-1)^\beta = \frac{1-(-1)^{\alpha+1}}{1-(-1)}$. Cette quantité est nulle lorsque α est impair et elle vaut 1 lorsque α est pair.

En résumé, $f_{p^\alpha} = \begin{cases} \alpha+1 & \text{si } \chi(p) = 1 \\ 1 & \text{si } \chi(p) = 0 \\ 0 & \text{si } \chi(p) = -1 \text{ et } \alpha \text{ impair} \\ 1 & \text{si } \chi(p) = -1 \text{ et } \alpha \text{ pair} \end{cases}$.

16°) Comme n possède au plus n diviseurs dans $\mathbb{N}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\chi(k) \leq 1$, on obtient que $f_n \leq n$.

La décomposition de n en produit de nombres premiers s'écrit : $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{q} p_i^{\alpha_i}$, où les p_i sont des nombres premiers distincts et les α_i des entiers au moins égaux à 1. D'après la question 14, généralisée par récurrence à un produit d'un nombre fini d'entiers naturels deux à deux premiers entre eux, comme les $p_i^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux deux à deux, $f_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{q} f_{p_i^{\alpha_i}}$. Or d'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{P}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $f_{p^\alpha} \geq 0$, donc $f_n \geq 0$.

17°) Reprenons les notations de la question précédente. Alors $f_{n^2} = \displaystyle\prod_{i=1}^{q} f_{p_i^{2\alpha_i}}$. Or, à la question 15, avec α pair, quelle que soit la valeur de $\chi(p) \in \{-1, 0, 1\}$, $f_{p^\alpha} > 0$. Donc $f_{n^2} > 0$. Or f_{n^2} est dans $\mathbb{Z}$, $f_{n^2} \geq 1$.

18°) $\diamond$ Supposons que $|x| > 1$. Alors$|f_{n^2}x^{n^2}| \geq |x|^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc d'après le principe des gendarmes, $f_{n^2}x^{n^2}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On en déduit que $f_n x^n$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc d'après le cours, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n x^n$ est divergente.

$\diamond$ Supposons maintenant que $|x| < 1$. Il existe $r \in]|x|, 1[$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n x^n| \leq n|x|^n = r^n \times n\Big(\dfrac{|x|}{r}\Big)^n$, or d'après l'indication de l'énoncé, $n\Big(\dfrac{|x|}{r}\Big)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car $\dfrac{|x|}{r} \in [0, 1[$, donc cette suite est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $n\Big(\dfrac{|x|}{r}\Big)^n \leq M$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $|f_n x^n| \leq M r^n$.

Alors, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |f_k x^k| \leq M \sum_{k=1}^{n} r^k = Mr\frac{1-r^n}{1-r} \leq \frac{Mr}{1-r}$. Ainsi la suite $\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |f_k x^k|\Big)_{n\geq 1}$ est majorée, or elle est croissante, donc elle converge. Ceci montre que la série $\sum_{n\geq 1} f_n x^n$ est absolument convergente, donc elle converge.

19°) Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1[$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n x^n \geq 0$, donc $\sum_{n=1}^{N^2} f_n x^n \geq \sum_{n=1}^{N} f_{n^2} x^{n^2} \geq \sum_{n=1}^{N} x^{n^2} = \sum_{n=1}^{N} g(n)$, si l'on pose, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $g(t) = x^{t^2} = \mathrm{e}^{t^2 \ln x}$. g est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, car $\ln x < 0$.

Pour tout $n \geq 1$, on a donc : $g(n) = \int_n^{n+1} g(n)\ \mathrm{d}t \geq \int_n^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t$.

Donc $\sum_{n=1}^{N^2} f_n x^n \geq \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^{N+1} g(t)\ \mathrm{d}t$.

Effectuons le changement de variable $u = t\sqrt{-\ln x}$:

$\int_1^{N+1} g(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{-\ln x}}^{(N+1)\sqrt{-\ln x}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{(N+1)\sqrt{-\ln x}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u$, car $-\ln x \leq \ln 2$.

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n \geq \sum_{n=1}^{N^2} f_n x^n \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{(N+1)\sqrt{-\ln x}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u$.

La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{(N+1)\sqrt{-\ln x}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est donc majorée, or elle est croissante, donc il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{(N+1)\sqrt{-\ln x}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$ et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n \geq L$.

De plus l'application $h : A \longmapsto \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{A} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u$, de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, est croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone, il existe $L' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $h(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} L'$. Alors par composition des limites, $h((N+1)\sqrt{-\ln x}) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} L'$, mais on vient de voir que $h((N+1)\sqrt{-\ln x}) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} L$, donc par unicité de la limite $L' = L$.

On a donc montré que $f(x) \geq L' = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \lim_{A\to+\infty} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{A} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u$.