Feuille d'exercices 18.
Calcul asymptotique

Exercice 18.1 : (niveau 1)
Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $e^{\sin t}$.

Exercice 18.2 : (niveau 1)
Donner un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 18.3 : (niveau 1)
Donnez des équivalents de

◇ $\frac{1}{\sqrt[3]{1+t^3}}$ au voisinage de -1.

◇ $\frac{chx - \cos x}{(e^x-1)^{\frac{5}{2}}}$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.

◇ $\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ au voisinage de 0 et de 1.

Exercice 18.4 : (niveau 1)
Nature de $\sum_{n\geq 1} a_n$, où $a_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}$.

Exercice 18.5 : (niveau 1)
Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\cos(\sqrt{t+t^2})$: on attend des calculs précis et justifiés.

Exercice 18.6 : (niveau 1)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de $\sum a_n$ où $a_n = n^a \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Exercice 18.7 : (niveau 1)
Calculer la limite en 0, si elle existe, de $(\sin x)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$, $\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$, et $\frac{\sin(x\ln x)}{x}$.

Exercice 18.8 : (niveau 1)
Nature de la série de terme général $a_n = \cos\left(\dfrac{\pi n^2}{2n^2 + an + 1}\right)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 18.9 : (niveau 1)
$\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = xe^{\sin x} - \sqrt{1+x}$.

Exercice 18.10 : (niveau 1)
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n})$.

Exercice 18.11 : (niveau 1)
Donner un équivalent simple en 0 et en $+\infty$ de $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ et de $\ln(4x^4 - 2\cos x + 3)$, .

Exercice 18.12 : (niveau 1)
Nature de $\sum u_n$ où $u_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 18.13 : (niveau 1)
Déterminer la limite lorsque x tend vers 1 de $\dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$.

Exercice 18.14 : (niveau 1)
Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Exercice 18.15 : (niveau 2)
Donnez des équivalents de
- ◇ $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ au voisinage de 0 et de 1.
- ◇ $f(x) = \dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1}$ au voisinage de 0.
- ◇ $f(x) = \dfrac{th3x - th2x}{x}$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Exercice 18.16 : (niveau 2)
Donnez des équivalents au voisinage de $+\infty$ de
- ◇ $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+a)}{\ln(n+b)}\right)^{n\ln(n)}$.
- ◇ $a_n = \arccos(\dfrac{2}{\pi}\arctan(n^2))$.

Exercice 18.17 : (niveau 2)
Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n^2})$.

Exercice 18.18 : (niveau 2)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1°) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2°) Déterminer $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}_+^*$.

3°) Donner un équivalent de u_n.

Exercice 18.19 : (niveau 2)
Calculer la limite en $+\infty$, si elle existe, de $x\sin(\frac{1}{x})$, $\left(\dfrac{x^4}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} - x$, $\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}$, et $\dfrac{\mathrm{sh}\sqrt{x^2+2}}{e^x}$.

Exercice 18.20 : (niveau 2)
Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{nu_n}$ et déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 18.21 : (niveau 2)
$\mathrm{DL}_{100}(0)$ de $f(x) = \ln\Bigl(\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\Bigr)$.

Exercice 18.22 : (niveau 2)
$\mathrm{DL}_2(1)$ de $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.

Exercice 18.23 : (niveau 2)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^x + \arctan x - 1$.
Montrer que f^{-1} est définie au voisinage de 0 et déterminer son $\mathrm{DL}_2(0)$.

Exercice 18.24 : (niveau 2)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $u_n = \dfrac{1}{\ln(n) + (-1)^n n^\alpha}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 18.25 : (niveau 2)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général
$a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}})$.

Exercice 18.26 : (niveau 2)
Nature de $\sum a_n$ où $a_n = \arccos(\dfrac{2}{\pi}\arctan(n^2))$.

Exercice 18.27 : (niveau 2)
Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Exercice 18.28 : (niveau 3)

1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution sur $[0, 1]$ notée a_n.

2°) Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante.

3°) Montrer que la suite (a_n) converge vers une limite l que l'on calculera.

4°) Donner un équivalent de $a_n - l$.

Exercice 18.29 : (niveau 3)

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln(x_n) + nx_n = 0$.

2°) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3°) Donner un équivalent de x_n.

Exercices supplémentaires

Exercice 18.30 : (niveau 1)
Développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{\cos t}$.

Exercice 18.31 : (niveau 1)
On fixe deux réels a et b. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$
où $u_n = \sin(\dfrac{1}{n}) + a\tan(\dfrac{1}{n}) + b\ln(\dfrac{n+1}{n-1})$.

Exercice 18.32 : (niveau 1)
Développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\ln^2(1+t)$.

Exercice 18.33 : (niveau 1)
Développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de $\ln(\cos t)$.

Exercice 18.34 : (niveau 1)
Nature de la série $\sum a_n$ où $a_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 18.35 : (niveau 1)
Développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de $\arcsin^2 t$.

Exercice 18.36 : (niveau 1)
Calculez la limite de $(x\mathrm{cotan}(x))^{\mathrm{cotan}(x)}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Exercice 18.37 : (niveau 1)
Calculer les limites à gauche et à droite en 0, si elles existent,
de $f(x) = x|1 + \dfrac{1}{x}|$ et $g(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Exercice 18.38 : (niveau 1)
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sum_{k=1}^n \ln(k)}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 18.39 : (niveau 1)
Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{x^x - (\sin x)^{\sin x}}{x^3}$.

Exercice 18.40 : (niveau 1)

1°) $f(x) = \dfrac{x\sin x}{x+3}$ possède-t-elle une limite en $+\infty$?

2°) $g(x) = (\sin x)\ln(1+x)$ possède-t-elle une limite en $+\infty$?

3°) $h(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ possède-t-elle une limite en 0 ?

Exercice 18.41 : (niveau 1)

1°) Développement limité de $(sint)^{15}$ à l'ordre 17 au voisinage de 0.

2°) Développement limité de $e^{\cos t}$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

Exercice 18.42 : (niveau 1)
Soient a, b et c trois réels. Déterminez la nature de la série $\sum a_n$ où $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+an^2+bn+c}$.

Exercice 18.43 : (niveau 1)
Donnez le développement limité de $(1+sint)^{\frac{1}{t}}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 18.44 : (niveau 2)
Donner un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{\ln k}$.

Exercice 18.45 : (niveau 2)
Natures de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\mathrm{ch}(\sqrt{\ln n}))^{-2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\mathrm{argch}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)$ et $\displaystyle\sum \left((\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{5}} - (\mathrm{arctan} n)^{\frac{3}{5}}\right)$.

Exercice 18.46 : (niveau 2)
Donnez un équivalent au voisinage de 0 de $\mathrm{sh}(\sin t) - \sin(\mathrm{sh} t)$.

Exercice 18.47 : (niveau 2)
Déterminez la nature de la série $\sum a_n$ où $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

Exercice 18.48 : (niveau 2)
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$.

Exercice 18.49 : (niveau 2)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ Calculer lorsqu'elle existe la limite l de (a_n) où :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; a_n = \cos^n\Big(\dfrac{1}{n^\alpha}\Big)$. Etudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(a_n - l)$.

Exercice 18.50 : (niveau 2)
Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de $f(x) = (1+\sin x)^x$.

Exercice 18.51 : (niveau 2)
Nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \left((1+\dfrac{1}{n})^{-n} - \dfrac{1}{e}\right)$.

Exercice 18.52 : (niveau 2)
Donner un développement asymptotique en $o(\dfrac{1}{n^3})$ de $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$.

Exercice 18.53 : (niveau 2)
On pose $f(x) = xe^{(x^2)}$.

1°) Montrer que f est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2°) Déterminer un développement limité de f^{-1} au voisinage de 0 à l'ordre 6.

Exercice 18.54 : (niveau 2)
Soient $c \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x\sin(x) - c\cos(x) \end{array}$.

1°) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que f possède un seul zéro x_n dans l'intervalle $]n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}[$.

2°) Déterminer un équivalent de $x_n - n\pi$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 18.55 : (niveau 2)
Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+a)}{\ln(n+b)}\right)^{n\ln(n)}$.

1°) Montrer que u_n tend vers une limite l lorsque n tend vers $+\infty$.

2°) Déterminer la nature de la série $\sum(u_n - l)$.

Exercice 18.56 : (niveau 2)
On note (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{\frac{1}{n}}$.

1°) Déterminer la limite de u_n.

2°) Donner un développement de u_n en $o(\frac{1}{n})$.

Exercice 18.57 : (niveau 2)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3, où I est un intervalle ouvert contenant 0.
On suppose qu'au voisinage de 0, $f(x) = x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.

1°) Montrer que f^{-1} est définie et de classe C^3 sur un intervalle ouvert contenant 0.

2°) Donner un développement limité de $f^{-1}(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

3°) On suppose maintenant que f est de classe C^n, où $n \in \mathbb{N}^*$, et qu'au voisinage de 0, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k + o(x^n)$.
Donner un développement limité de f^{-1} au voisinage de 0 à l'ordre n.

Exercice 18.58 : (niveau 2)
Déterminer une application $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'au voisinage de $+\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln^n x = o(f(x))$ et $f(x) = o(x^{\frac{1}{n}})$.

Exercice 18.59 : (niveau 2)
Soit (a_n) une suite de réels positifs ou nuls.
Montrer que $[\dfrac{a_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0] \Longleftrightarrow [e^{a_n} \sim (1 + \dfrac{a_n}{n})^n]$.

Exercice 18.60 : (niveau 3)
On pose $f(x) = \dfrac{e^{(x^2)} - 1}{x}$ lorsque $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.
On admet que f réalise un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Déterminer un développement limité de f^{-1} au voisinage de 0 à l'ordre 6.

Exercice 18.61 : (niveau 3)
Soit (a_n) une suite de réels telle que $a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Déterminer la nature de $\sum a_n$.

Exercice 18.62 : (niveau 3)
Soit $f\ : x \longmapsto \tan x - \dfrac{x^2}{x+1}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que f a un seul zéro noté x_n dans $]n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}[$.
Donner un développement de x_n lorsque n tend vers $+\infty$, à la précision $o\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big)$.

Exercice 18.63 : (niveau 3)

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in \mathbb{R}_+^*$
tel que $\displaystyle\int_0^{x_n} \frac{t^n}{1+t} dt = \ln(1 + x_n)$.

2°) Montrer qu'à partir d'un certain rang, $x_n \in [1, 2]$.

3°) Montrer que la suite (x_n) converge et calculer sa limite α.

4°) Donner un équivalent de $x_n - \alpha$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 18.64 : (niveau 3)
1°) On note U l'ensemble des suites réelles décroissantes (u_n) telles que $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$.
Montrez que les éléments de U sont tous équivalents.
2°) Même question avec l'ensemble V des suites réelles positives telles que $v_n + v_{2n} \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 18.65 : (niveau 3)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ et $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$.
On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = o(g_n(x))$.
Montrer qu'il existe une application H de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = o(H(x))$ et $H(x) = o(g_n(x))$ lorsque x tend vers $+\infty$.