MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 20 : du lundi 18 mars au vendredi 22.

Liste des questions de cours

1°) Pour la notion de limite d'une fonction en un point, montrer l'équivalence entre la caractérisation séquentielle et la caractérisation par ε.

2°) Donner les trois caractérisations de la continuité de f en a.

3°) Que peut-on dire lorsque f et g sont continues et coïncident sur une partie dense dans A ? Démontrez-le.

4°) Démontrer le théorème de la limite monotone dans le cas d'une fonction croissante et majorée sur un intervalle majoré.

5°) Montrer qu'un produit cartésien d'un nombre fini de compacts est compact.

6°) Enoncer et démontrer le TVI.

7°) Enoncer et démontrer un théorème qui caractérise la continuité à l'aide d'ouverts.

8°) Enoncer puis démontrer un théorème qui caractérise la continuité des applications linéaires.

9°) Que dire de l'image directe d'un compact par une application continue ? Démontrez-le.

10°) Enoncer et démontrer l'équivalence entre la caractérisation par ε et la caractérisation séquentielle de la continuité uniforme d'une application.

11°) Montrer que les réciproques de la proposition "lispchitzienne" $\Longrightarrow$ "uniformément continue" $\Longrightarrow$ "continue" sont fausses.

Première partie
Révisions sur la topologie

cf le programme de colles précédent.

Deuxième partie
Limites de fonctions et continuité

Par défaut, E et F sont deux espaces métriques et f est une fonction de E dans F, définie sur $\mathcal{D}_f$.

1 Limite en un point

Notation. On fixe une partie A de $\mathcal{D}_f$. On fixe également a, qui peut être infini. On suppose qu'il existe au moins une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. On fixe aussi l dans $F \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$.

1.1 Caractérisation séquentielle

Définition. $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \ \left(x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \Longrightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l\right)$.

Unicité de la limite.

Lorsque $F = \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{C}$, $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $(\mathrm{Re}(f)(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)) \ \wedge \ (\mathrm{Im}(f)(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell))$.

Propriété. Si $A \subset B \subset \mathcal{D}_f$ et si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in B}}{\longrightarrow} l$, alors $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$.

1.2 Caractérisation par "ε"

Si $a \in E$ et $l \in F$, $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in A \ \ (d(x,a) \leq \alpha \Longrightarrow d(f(x), l) \leq \varepsilon)$.
Adaptation aux cas des limites infinies.

1.3 Caractérisation par voisinages

Voisinages de $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$, voisinages de ∞ dans E.

Propriété. $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(l) \ \ \exists U \in \mathcal{V}(a) \ \ f(U \cap A) \subset V$.

Caractère local de la notion de limite : Pour tout $U_0 \in \mathcal{V}(a)$, $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A\cap U_0}}{\longrightarrow} l$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, limite à gauche et à droite en a de $f(x)$.
$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x>a}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x<a}}{\longrightarrow} l$.

2 Continuité en un point

Définition. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in\mathcal{D}_f}}{\longrightarrow} f(a)$.

Propriété. Si $a \notin \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$ (on dit que a est un point isolé de $\mathcal{D}_f$), f est toujours continue en a.
Si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$, f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in\mathcal{D}_f\setminus\{a\}}}{\longrightarrow} f(a)$.

Les applications lipschitziennes sont continues.

Si f est continue en a, alors $f|_A$ est aussi continue en a.

Lorsque $E = \mathbb{R}$, continuité à gauche et à droite.

Prolongement par continuité.
Si f et g sont continues et coïncident sur une partie dense dans A, alors f et g coïncident sur A.

3 Théorèmes de composition

Pour que $g(f(x)) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} m$, il suffit que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(y) \underset{\substack{y \to l \\ y \in B}}{\longrightarrow} m$.
Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} b$ et si g est continue en b, alors $g(f(x)) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} g(b)$.
Continuité d'une composée.

Limite en un point d'une application à valeurs dans un produit de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Continuité en un point d'une application à valeurs dans un produit de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

4 Opérations algébriques sur les limites

4.1 Somme de deux applications à valeurs vectorielles

Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $(f+g)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l + l'$.
C'est valable pour des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $\infty - \infty$.

La somme de deux applications continues est continue.

4.2 Produit d'une application scalaire par une application vectorielle

Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $(fg)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} ll'$.
C'est valable pour des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Le produit d'une application scalaire continue par une application vectorielle continue est continue.

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications continues d'une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé dans un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
La $\mathbb{K}$-algèbre des applications continues d'une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé dans $\mathbb{K}$.

5 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Passage à la limite sur une inégalité *large*.

Principe du tunnel : Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et $\alpha < \ell < \beta$, alors, au voisinage de a, $\alpha < f(x) < \beta$.

Principe des gendarmes.

Théorème de la limite monotone.
Si $f\ :\,]m, M[\longrightarrow \mathbb{R}$ est monotone, elle possède en tout point une limite à droite et une limite à gauche.

6 Continuité globale

6.1 Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

Une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Théorème de la bijection.

6.2 Continuité et ouverts

f est continue si et seulement si les images réciproques des ouverts (resp : fermés) sont des ouverts (resp : fermés) relatifs de $\mathcal{D}_f$.

6.3 Continuité d'une application linéaire.

$f \in L(E, F)$ est continue si et seulement si elle est bornée sur la boule unité de E, ou encore si et seulement si il existe k tel que $\forall x \in E \ \ \|f(x)\| \leq k\|x\|$.

L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Formules : $\|u(x)\| \leq \|u\|\|x\|$, $\|u \circ v\| \leq \|u\|\|v\|$.

6.4 Continuité et compacité

L'image directe d'un compact par une application continue est un compact.
Si $f \ : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue avec A compact, alors f est bornée et elle atteint ses bornes,
L'image directe d'un segment de $\mathbb{R}$ par une application continue à valeurs réelles est un segment.

6.5 La continuité uniforme

Caractérisation par ε et caractérisation séquentielle de la continuité uniforme d'une application.

Composée d'applications uniformément continues.

"lispchitzienne"$\Longrightarrow$"uniformément continue"$\Longrightarrow$"continue", mais les réciproques sont fausses.

Théorème de Heine.

Prévisions pour la semaine prochaine :

o, O, équivalents, développements limités. Application aux séries.