MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 21 : du lundi 25 au vendredi 29 mars.

Comparaison au voisinage d'un point et séries

Liste des questions de cours

1°) Montrer que $\mathbf{O}(\mathbf{O}(f)) = \mathbf{O}(f)$.

2°) Montrer que $o(f) + o(f) = o(f)$.

3°) Sous des conditions à préciser, montrer que $f(x) \sim g(x) \Longrightarrow \ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$.

4°) Enoncer précisément puis démontrer le théorème de changement de variable pour les o, O et $\sim$.

5°) Enoncer et démontrer l'unicité du développement limité.

6°) $\mathrm{DL}_2(0)$ de $e^{(\cos\sqrt{t})}$.

7°) Enoncer le théorème de sommation des relations de comparaison. Démontrez-le pour les "o" en cas de divergence.

8°) Moyennes de Cesaro : énoncé et démonstration.

9°) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

10°) Nature des séries de Bertrand : énoncé et démonstration.

1 o, O et $\sim$

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation. A est une partie d'un espace $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E. Soit $a \in E \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$. On suppose que tout voisinage de a rencontre A.

Les applications considérées sont définies sur A et sont à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1.1 La relation de domination

$f(x) = \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\mathbf{O}}(g(x)) \Longleftrightarrow [\exists V \in \mathcal{V}(a)\ \exists C \in \mathbb{R}_+^*\ \forall x \in V \cap A\ \|f(x)\| \leq C\|g(x)\|]$.

Cas particulier des suites.

Si $g(x) \neq 0$ au voisinage de a, $f = \mathbf{O}(g)$ si et seulement si $x \longmapsto \dfrac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|}$ est bornée au voisinage de a.

$\mathbf{O}(\mathbf{O}(f)) = \mathbf{O}(f)$, $\mathbf{O}(f) + \mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(f)$,
Lorsque $\varphi(A) \subset \mathbb{K}$, $\mathbf{O}(\varphi).\mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(\varphi.f)$. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, lorsque $f(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, $\mathbf{O}(f)^\alpha = \mathbf{O}(f^\alpha)$.

Si $f(x) = \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\mathbf{O}}(g(x))$ et si $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 0$, alors $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 0$.

(Hors programme) Si $(u_n), (v_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ vérifient $\forall n \geq N \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors $u_n = \mathbf{O}(v_n)$.

1.2 La relation de prépondérance

$f(x) = \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{o}(g(x)) \iff [\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \ \exists V \in \mathcal{V}(a) \ \ \forall x \in V \cap A \ \ \|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|]$.
Cas particulier des suites.
Si $g(x) \neq 0$ au voisinage de a, $f = o(g)$ si et seulement si $\dfrac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 0$.

$o(f) = \mathbf{O}(f)$, $o(\mathbf{O}(f)) = o(f)$ et $\mathbf{O}(o(f)) = o(f)$ (donc aussi $o(o(f)) = o(f)$).
$o(f) + o(f) = o(f)$, Lorsque $\varphi(A) \subset \mathbb{K}$, $o(\varphi).\mathbf{O}(f) = o(\varphi.f)$ et $\mathbf{O}(\varphi).o(f) = o(\varphi.f)$ (donc aussi $o(\varphi).o(f) = o(\varphi.f)$). Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, lorsque $f(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, $o(f)^\alpha = o(f^\alpha)$.

Théorème des croissances comparées : Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et $a > 1$.

1. Les suites $\ln^\alpha(n)$, n^β, a^n et $n!$ tendent vers $+\infty$ et chacune est négligeable devant les suivantes.
2. Au voisinage de $+\infty$, les fonctions $\ln^\alpha x$, x^β et $e^{\gamma x}$ tendent vers $+\infty$ et chacune est négligeable devant les suivantes.
3. Au voisinage de 0^+, $|\ln x|^\alpha = o\Big(\dfrac{1}{x^\beta}\Big)$.
4. Au voisinage de $-\infty$, $e^{\gamma x} = o\Big(\dfrac{1}{|x|^\beta}\Big)$.

1.3 La relation d'équivalence

1.3.1 Définition

$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\sim} g(x) \iff f = g + o(g)$.
On suppose qu'il existe un voisinage de a sur lequel $g(x)$ ne s'annule jamais et que f et g sont à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors $f \sim g \iff \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 1$.
La relation "$\sim$" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(A, F)$.

1.3.2 Propriétés de stabilité de la relation d'équivalence

Stabilité du produit. Si $\varphi \sim \Psi$, avec φ et Ψ à valeurs dans $\mathbb{K}$, et si $f \sim g$, alors $\varphi.f \sim \Psi.g$.
Si $f \sim g$, alors $\|f\| \sim \|g\|$, $\dfrac{1}{f(x)} \sim \dfrac{1}{g(x)}$, $f^\alpha(x) \sim g^\alpha(x)$.

Si $f \sim g$, $f(x)$ et $g(x)$ ont même signe au voisinage de a,
elles ont même limite en cas d'existence.

La condition $f = \mathbf{O}(g)$ (respectivement $f = o(g)$, $f \sim g$) est vraie si et seulement si elle l'est en remplaçant f et g par des applications équivalentes.

(Hors programme :) Sous de bonnes conditions, $f(x) \sim g(x) \Longrightarrow \ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$.

Théorème de changement de variable pour les o, O et $\sim$.

1.3.3 Défauts de stabilité de la relation d'équivalence

En général, si $f(x) \sim g(x)$, $\varphi(f(x)) \not\sim \varphi(g(x))$.

L'équivalence de fonctions au voisinage d'un point n'est pas stable pour la somme.

1.4 Les développements limités.

Dans ce paragraphe, on suppose que $E = \mathbb{K}$ et que a est un point d'accumulation de A.

1.4.1 Définitions

Développements limités au sens faible et fort, partie principale.

unicité du développement limité.
Cas des fonctions paires ou impaires.

1.4.2 Opérations sur les développements limités

Les règles de calcul établies pour les "o" et les "O" permettent d'additionner, de multiplier et de composer des développements limités entre eux.

Il est souvent pratique d'écrire le DL $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ sous sa forme normalisée $a_m x^m(1 + \cdots + o(x^{n-m}))$.

1.4.3 Applications

Détermination de la tangente et positionnement local du graphe par rapport à cette tangente.
Détermination d'une asymptote oblique et positionnement asymptotique du graphe par rapport à cette asymptote.

2 Séries

Réviser ce qui a déjà été fait.

Théorème de sommation des relations de comparaison.
Application aux moyennes de Cesaro.

Séries de Bertrand (hors programme).

Prévisions pour la semaine suivante :

Dérivation.