

## DM 27 : un corrigé

### Partie I : à la frontière des séries convergentes

1°)

◇ La série dont le terme général est identiquement nul est dans  $S_0$ ,  $S_C$  et  $S_{AC}$ , donc ces trois ensembles sont tous non vides. Pour montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de  $S$ , il suffit ainsi d'établir qu'ils sont stables par combinaison linéaire.

Soit  $u = \sum u_n \in S$ ,  $v = \sum v_n \in S$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Si  $u, v \in S_0$ , alors  $\alpha u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc  $\alpha u + v \in S_0$ .

Si  $u, v \in S_C$ , alors d'après le cours,  $\alpha u + v$  est une série convergente (il suffit de passer aux sommes partielles), donc  $\alpha u + v \in S_C$ .

Si  $u, v \in S_{AC}$ , on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\alpha u_n + v_n| \leq |\alpha||u_n| + |v_n|$ , or  $\sum(|\alpha||u_n| + |v_n|)$  est convergente, donc d'après le cours sur les séries à termes positifs,  $\alpha u + v \in S_{AC}$ .

En conclusion,  $S_0$ ,  $S_C$  et  $S_{AC}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $S$ .

◇  $\sum n!$  est dans  $S$  sans être dans  $S_0$ , donc  $S_0$  est un sous-espace vectoriel strictement inclus dans  $S$ .

D'après le cours, si  $\sum u_n \in S_C$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc  $\sum u_n \in S_0$ . Ainsi,  $S_C \subset S_0$ .

De plus, toujours d'après le cours,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est dans  $S_0$  sans être dans  $S_C$ , donc  $S_C$  est

un sous-espace vectoriel strictement inclus dans  $S_0$ .

D'après le cours,  $S_{AC} \subset S_C$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Alors  $\sum_{n \geq 1} u_n$  n'est pas absolument convergente.

Cependant la suite  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et tend vers 0, donc d'après le théorème spécial des séries alternées,  $\sum u_n$  est un élément de  $S_C$ . Ainsi,  $S_{AC}$  est un sous-espace vectoriel strictement inclus dans  $S_C$ .

2°)

◇ Supposons que  $u = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ . Posons  $\alpha_n = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors la suite  $(\alpha_n)$  est

bien une suite croissante de réels positifs ou nuls qui tend vers  $+\infty$ .

De plus  $\sum \alpha_n u_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est bien convergente.

◇ Supposons maintenant que  $u = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ . Posons  $\alpha_n = \sqrt{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors la suite  $(\alpha_n)$  est bien une suite croissante de réels positifs ou nuls qui tend vers  $+\infty$ . De plus  $\sum \alpha_n u_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  est bien convergente, d'après le cours, car  $\frac{3}{2} > 1$ .

◇ Supposons enfin que  $u = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2 n}$ . Posons  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  et  $\alpha_n = \sqrt{\ln n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Alors la suite  $(\alpha_n)$  est bien une suite croissante de réels positifs ou nuls qui tend vers  $+\infty$ . De plus  $\sum \alpha_n u_n = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^{\frac{3}{2}} n}$  est bien convergente. En effet,

l'application  $t \mapsto \frac{1}{t \ln^{\frac{3}{2}} t}$ , définie sur  $[2, +\infty[$ , est continue, positive et décroissante, donc d'après le théorème de comparaison entre séries et intégrales, la série

$$\sum \alpha_n u_n = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^{\frac{3}{2}} n} \text{ a même nature que la suite } \left( \int_2^n \frac{dt}{t \ln^{\frac{3}{2}} t} \right)_{n \geq 2},$$

$$\text{or } \int_2^n \frac{dt}{t \ln^{\frac{3}{2}} t} = \int_2^n \frac{d(\ln t)}{\ln^{\frac{3}{2}} t} = \left[ -2 \ln^{-\frac{1}{2}} t \right]_2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \ln^{-\frac{1}{2}}(2).$$

3°) La suite  $(R_n)$  est définie si et seulement si  $\sum u_n \in S_C$ , ce que nous supposons. Lorsqu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n > N$ ,  $u_n = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $u_n$  est nul à partir d'un certain rang, alors, pour  $n > N$ ,  $R_n = R_{n-1} = 0$ , donc  $\alpha_n$  n'est pas défini.

Réciproquement, supposons que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $n_N > N$  tel que  $u_{n_N} > 0$ . Alors, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $R_N \geq u_{n_N} > 0$  et  $R_{-1} \geq u_{n_0} > 0$ , donc la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie.

En conclusion, la condition demandée est que  $\sum u_n$  converge mais que  $(u_n)$  ne soit pas une suite presque nulle.

Dans ce cas, pour tout  $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ ,  $R_{n-1} - R_n = u_n \geq 0$ , donc la suite  $(R_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}}$  est décroissante. On en déduit que la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

$$\text{De plus, } R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0, \text{ donc } \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

4°) Supposons d'abord que  $u_n$  est nul à partir d'un certain rang. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $\alpha_n = n$ . Alors  $(\alpha_n)$  est une suite croissante de réels positifs ou nuls qui tend vers  $+\infty$ . De plus  $\sum \alpha_n u_n$  est convergente car son terme général est nul à partir d'un certain rang.

Supposons maintenant que la suite  $(u_n)$  n'est pas nulle à partir d'un certain rang. On peut alors poser  $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{R_n} + \sqrt{R_{n-1}}}$  et d'après la question précédente, c'est une suite croissante de réels positifs ou nuls qui tend vers  $+\infty$ . Il reste à montrer que  $\sum \alpha_n u_n$  converge.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Lorsque  $u_n \neq 0$ ,

$\alpha_n u_n = \frac{u_n}{\sqrt{R_n} + \sqrt{R_{n-1}}} = \frac{u_n(\sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n-1}})}{R_n - R_{n-1}}$ , or  $R_n - R_{n-1} = -u_n$  (même lorsque  $n = 0$ ), donc  $\alpha_n u_n = -\sqrt{R_n} + \sqrt{R_{n-1}}$ .

Cette dernière égalité est encore vraie lorsque  $u_n = 0$ . Ainsi  $\sum \alpha_n u_n$  est une série télescopique : pour  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=0}^N \alpha_n u_n = -\sqrt{R_N} + \sqrt{R_{-1}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sqrt{R_{-1}}$ , ce qu'il fallait démontrer.

5°)

◇ Supposons que  $u = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Posons  $\alpha_0 = 2$  et  $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors la suite  $(\alpha_n)$  est bien une suite décroissante de réels strictement positifs qui tend vers 0. De plus  $\sum \alpha_n u_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est bien divergente.

◇ Supposons maintenant que  $u = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ . Posons  $\alpha_0 = \frac{1}{\ln 2} + 2$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{\ln 2} + 1$  et  $\alpha_n = \frac{1}{\ln n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Alors la suite  $(\alpha_n)$  est bien une suite décroissante de réels strictement positifs qui tend vers 0. De plus  $\sum_{n \geq 2} \alpha_n u_n = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$  est bien

divergente. En effet, l'application  $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ , définie sur  $[2, +\infty[$ , est continue, positive et décroissante, donc d'après le théorème de comparaison entre séries et intégrales, la série  $\sum \alpha_n u_n$  a même nature que la suite  $\left( \int_2^n \frac{dt}{t \ln t} \right)_{n \geq 2}$ ,

or  $\int_2^n \frac{dt}{t \ln t} = \int_2^n \frac{d(\ln t)}{\ln t} = [\ln(\ln t)]_2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

◇ Supposons enfin que  $u = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ . Posons  $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{\ln 2}} + 2$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{\ln 2}} + 1$

et  $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Alors la suite  $(\alpha_n)$  est bien une suite décroissante de réels strictement positifs qui tend vers 0. De plus  $\sum_{n \geq 2} \alpha_n u_n$  étant encore égale à

$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ , elle est bien divergente.

6°)  $\sum u_n$  diverge, donc la suite  $(u_n)$  est non nulle : il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $u_p > 0$ . Alors, pour tout  $n \geq p$ ,  $U_n \geq u_p > 0$ , donc on peut définir la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la façon suivante :

lorsque  $n \geq p$ ,  $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{U_n} + \sqrt{U_{n-1}}}$  et lorsque  $n < p$ ,  $\alpha_n = \alpha_p$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n > 0$ .

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n - U_{n-1} = u_n \geq 0$ , donc  $(U_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}}$  est croissante puis

$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

$\sum u_n$  est une série divergente de réels positifs, donc d'après le cours,  $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . On en déduit que  $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $\alpha_n u_n = \sqrt{U_n} - \sqrt{U_{n-1}}$ , donc  $\sum_{k=0}^n \alpha_k u_k = \sqrt{U_n} - \sqrt{U_{-1}} = \sqrt{U_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

Ainsi,  $\sum \alpha_n u_n$  diverge.

## Partie II : Normes sur $S_{AC}$ .

7°) Supposons que la suite  $(\alpha_n)$  est majorée et soit  $\sum u_n$  une série à termes réels positifs ou nuls et convergente. Alors  $\alpha_n = O(1)$ , donc  $\alpha_n u_n = O(u_n)$ , or  $\sum u_n$  converge et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ , donc d'après le cours,  $\sum \alpha_n u_n$  est convergente.

8°) Lorsque  $u = \sum u_n \in S_{AC}$ , la série  $\sum |u_n|$  est à termes positifs ou nuls et est convergente, donc d'après la question précédente,  $\sum \alpha_n |u_n|$  est aussi convergente. Ainsi  $\sum \alpha_n u_n$  est absolument convergente, ce qui prouve que  $N_\alpha$  est bien définie en tant qu'application de  $S_{AC}$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

◇ Supposons d'abord qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\alpha_p = 0$ . Considérons la série  $u = \sum u_n$  définie par  $u_n = \delta_{n,p}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $N_\alpha(u) = 0$  et  $u \neq 0$ , donc  $N_\alpha$  n'est pas une norme.

◇ Supposons que  $\alpha$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Il reste à montrer que  $N_\alpha$  est une norme.

—  $N_\alpha$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

— Soit  $u = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \in S_{AC}$  telle que  $N_\alpha(u) = 0$ . Soit  $p \in \mathbb{N}$ .

Alors  $0 \leq \alpha_p |u_p| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k |u_k| = N_\alpha(u) = 0$ , donc  $\alpha_p |u_p| = 0$ , or  $\alpha_p \neq 0$ , donc

$u_p = 0$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Ceci montre que  $N_\alpha(u) = 0 \implies u = 0$ .

— Soit  $u = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \in S_{AC}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Par linéarité des séries convergentes,

$$N_\alpha(\lambda u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k |\lambda u_k| = |\lambda| N_\alpha(u).$$

— Soit  $u = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \in S_{AC}$  et  $v = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \in S_{AC}$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_k |u_k + v_k| \leq \alpha_k |u_k| + \alpha_k |v_k|$ , donc en sommant dans le cadre de séries convergentes, on obtient que  $N_\alpha(u + v) \leq N_\alpha(u) + N_\alpha(v)$ .

9°) Les suites  $\alpha$  et  $\beta$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et elles sont majorées par 1, donc les applications  $N_\alpha$  et  $N_\beta$  sont bien définies et ce sont des normes. Supposons qu'elles sont équivalentes. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , notons  $u_p = \sum \delta_{n,p}$ . Ainsi  $(u_p)$  est une suite d'éléments de  $S_{AC}$ . De plus  $N_\alpha(u_p) = \alpha_p = \frac{1}{2^p}$  et  $N_\beta(u_p) = \frac{1}{p!}$ . D'après les croissances comparées,  $\frac{2^p}{p!} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc la suite  $2^p u_p$  tend vers 0 pour la norme  $N_\beta$ . Cependant,  $N_\alpha(2^p u_p) = 1$ , donc la suite  $2^p u_p$  ne tend pas vers 0 pour la norme  $N_\alpha$ . Ceci prouve que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

**10°)**

◇ Supposons que  $N_\alpha$  et  $N_\beta$  sont équivalentes. Alors il existe  $C, D \in \mathbb{R}_+$  tels que, pour tout  $u \in S_{AC}$ ,  $N_\alpha(u) \leq CN_\beta(u)$  et  $N_\beta(u) \leq DN_\alpha(u)$ . En particulier, lorsque  $u = \sum_n \delta_{n,p}$ , où  $p \in \mathbb{N}$ , on obtient  $\alpha_p \leq C\beta_p$  et  $\beta_p \leq D\alpha_p$ , donc lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $a_n = O(b_n)$  et  $b_n = O(a_n)$ .

◇ Réciproquement, supposons que  $a_n = O(b_n)$  et  $b_n = O(a_n)$ . Alors d'après le cours, il existe  $N, N' \in \mathbb{N}$  et  $C', D' \in \mathbb{R}_+$  tels que, pour tout  $n \geq N$ ,  $\alpha_n \leq C'\beta_n$  et  $\beta_n \leq D'\alpha_n$ . Posons  $C = \max\left(C', \max_{0 \leq k < N} \frac{\alpha_k}{\beta_k}\right)$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n \leq C\beta_n$ . De même, il existe  $D \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_n \leq D\alpha_n$ .

Soit  $u = \sum u_n \in S_{AC}$ . Alors  $N_\alpha(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k |u_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} C\beta_k |u_k| = CN_\beta(u)$  et de même,  $N_\beta(u) \leq DN_\alpha(u)$ , donc les deux normes sont équivalentes.

**11°)**

◇ D'après le cours, l'application  $\varphi$  est une forme linéaire, donc elle est continue si et seulement si il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $u \in S_{AC}$ ,  $|\varphi(u)| \leq kN_\alpha(u)$ .

◇ Supposons que  $\alpha_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, pour tout  $u = \sum u_n \in S_{AC}$ , d'après le cours,  $|\varphi(u)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| = N_\alpha(u)$ , donc  $\varphi$  est continue.

◇ Supposons maintenant que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$ . Supposons que  $\varphi$  est continue. Alors il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $u \in S_{AC}$ ,  $|\varphi(u)| \leq kN_\alpha(u)$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Avec  $u = \sum_n \delta_{n,p}$ , l'inégalité précédente devient :  $1 \leq k \frac{1}{2^p}$ . En faisant tendre  $p$  vers  $+\infty$ , on obtient  $1 \leq 0$ , ce qui est faux.

◇ Supposons que  $\varphi$  est continue.

Il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $u \in S_{AC}$ ,  $|\varphi(u)| \leq kN_\alpha(u)$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Avec  $u = \sum_n \delta_{n,p}$ , l'inégalité précédente devient :  $1 \leq k\alpha_p$ , donc  $1 = O(\alpha_n)$ .

Réciproquement, supposons que  $1 = O(\alpha_n)$ . De même que lors de la question précédente, on en déduit qu'il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k\alpha_p$ .

Soit  $u = \sum u_n \in S_{AC}$ . Alors  $|\varphi(u)| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |u_p| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} k\alpha_p |u_p| = kN_\alpha(u)$ ,

donc  $\varphi$  est continue.

En conclusion,  $\varphi$  est continue avec  $N_\alpha$  si et seulement si  $1 = O(\alpha_n)$ .

**12°)**

◇ Posons  $\varphi(0) = 0$ . Ainsi  $\alpha_{\varphi(0)} = \alpha_0 \geq 0$ .

La suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  n'est pas majorée, donc il existe  $\varphi(1) \geq 1$  tel que  $\alpha_{\varphi(1)} \geq 1$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons construits  $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$  des entiers

tels que  $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$  et pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\alpha_{\varphi(k)} \geq k$ .

La suite  $(\alpha_p)_{p > \varphi(n)}$  n'est pas majorée, donc il existe un entier  $\varphi(n+1)$

tel que  $\varphi(n+1) > \varphi(n)$  et  $\alpha_{\varphi(n+1)} \geq n+1$ .

On construit ainsi par récurrence une application  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , strictement croissante, telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_{\varphi(n)} \geq n$ .

◇ Pour montrer la réciproque de la question 7, il suffit de construire une série  $\sum u_n$  de réels positifs ou nuls qui est convergente et telle que  $\sum \alpha_n u_n$  diverge.

On définit la suite  $(u_n)$  en convenant que :

pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{\varphi(k)} = \frac{1}{k^2}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \varphi(\mathbb{N}^*)$ ,  $u_n = 0$ .

$\varphi$  étant strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , on montre par récurrence que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi(k) \geq k$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $\sum_{k=0}^N u_k \leq \sum_{k=0}^{\varphi(N)} u_k = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$ , donc la suite des sommes partielles de la série  $\sum u_n$  est majorée. C'est une série à termes positifs, donc d'après le cours,  $\sum u_n$  est convergente.

De plus,  $\sum_{k=0}^{\varphi(N)} \alpha_k u_k = \sum_{k=1}^N \alpha_{\varphi(k)} \frac{1}{k^2} \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ , car  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente. Ainsi,

d'après le principe des gendarmes,  $\sum_{k=0}^{\varphi(N)} \alpha_k u_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ , ce qui prouve que  $\sum \alpha_n u_n$  est une série divergente. En effet, la suite de ses sommes partielles diverge car c'est le cas de l'une de ses suites extraites.

### Partie III : séries absolument convergentes d'ordre $p$ .

13°)

◇ Soit  $u = \sum u_n \in S_{AC}$ . On a déjà vu en question 3 que  $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\sum R_n \in S_0$ , ce qui prouve que  $\psi$  est correctement définie.

Soit  $v = \sum v_n \in S_{AC}$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

D'après le cours, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha u_k + v_k) = \alpha \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ ,

donc  $\psi(\alpha u + v) = \psi(\sum (\alpha u_n + v_n)) = \sum \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha u_k + v_k) \right) = \alpha \psi(u) + \psi(v)$ .

Ainsi,  $\psi$  est une application linéaire de  $S_{AC}$  dans  $S_0$ .

◇  $\psi(\sum \delta_{n,0}) = 0$  et  $\sum \delta_{n,0} \neq 0$ , donc  $\psi$  n'est pas injective.

◇ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ .

la suite  $(\frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et tend vers 0, donc d'après le théorème spécial des séries alternées,  $r_n$  est correctement défini et  $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi,  $\sum r_n \in S_0$ .

Supposons que  $\sum r_n$  possède un antécédent par  $\psi$ , que l'on notera  $\sum u_n$ . Pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = r_{n-1} - r_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , donc la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \in S_{AC}$ , ce qui est faux. Ainsi,  $\sum r_n$  ne possède pas d'antécédent par  $\psi$  ce qui prouve que  $\psi$  n'est pas surjective.

**14°)**

◇ D'après l'énoncé,  $E_0 = S_{AC}$  et pour tout  $p \geq 1$ ,  $E_p = \psi^{-1}(E_{p-1})$ , or  $\psi$  est linéaire, donc par récurrence sur  $p$ , on en déduit que  $E_p$  est un sous-espace vectoriel de  $S_{AC}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

◇ Soit  $q \in \mathbb{N}$ .  $\psi(c_q) = \sum R_n$ , où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \delta_{k,q}$ .

Lorsque  $n \geq q$ ,  $R_n = 0$  et lorsque  $n < q$ ,  $R_n = 1$ , donc  $\psi(c_q) = \sum_{r=0}^{q-1} c_r$ .

◇ Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Notons  $R(p)$  l'assertion : pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,  $c_q \in E_p$ .

On a clairement  $R(0)$ .

Supposons  $R(p-1)$  avec  $p \geq 1$ . Soit  $q \in \mathbb{N}$ .  $E_{p-1}$  étant stable par combinaison linéaire,

d'après  $R(p-1)$ ,  $\psi(c_q) = \sum_{r=0}^{q-1} c_r \in E_{p-1}$ , donc  $c_q \in E_p$ . Ceci prouve  $R(p)$ .

Pour montrer que  $E_p$  est de dimension infinie, il suffit donc de montrer que la famille  $(c_q)_{q \in \mathbb{N}}$  est libre : soit  $(\alpha_q)$  une famille presque nulle de complexes telle que  $\sum_{q \in \mathbb{N}} \alpha_q c_q = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors le  $n$ -ième terme de la série est nul. Ainsi,  $0 = \sum_{q \in \mathbb{N}} \alpha_q \delta_{q,n} = \alpha_n$ . Cela

conclut.

◇ Ce qui précède montre que  $(c_q)_{q \in \mathbb{N}}$  est une famille d'éléments de  $E_\infty$ . Elle est libre, donc  $E_\infty$  est aussi de dimension infinie.

**15°)** D'après le cours,  $\sum aq^n$  est absolument convergente. De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} aq^k = a \frac{q^{n+1}}{1-q}$ , donc  $\psi(u) = \frac{q}{1-q}u$ . Par récurrence sur  $p$ , on en déduit que

$u \in E_p$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Ainsi,  $u$  est absolument convergente d'ordre infini.

**16°)** Lorsque  $u = \sum u_n \in E_p$ , convenons de noter  $\psi^p(u) = \sum_n u_{n,p}$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Notons  $R(p)$  l'assertion suivante : Lorsque  $u = \sum u_n$  et  $v = \sum v_n$  sont deux séries dans  $\mathbb{R}_+$ , si  $u = \sum u_n \in E_p$  et si  $u_n \sim v_n$ , alors  $v_n \in E_p$  et  $u_{n,p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_{n,p}$ .

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n,p}$  et  $v_{n,p}$  sont dans  $\mathbb{R}_+$ .

Pour  $p = 0$ , si  $u \in E_0 = S_{AC}$  et si  $u_n \sim v_n$ , on sait d'après le cours sur les séries à termes positifs que  $v \in S_{AC} = E_0$ . De plus  $u_{n,0} = u_n \sim v_n = v_{n,0}$ . Ceci démontre  $R(0)$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Supposons  $R(p)$ . Soit  $u = \sum u_n$  et  $v = \sum v_n$  deux séries dans  $\mathbb{R}_+$  telles que  $u = \sum u_n \in E_{p+1}$  et  $u_n \sim v_n$ . Alors  $u \in E_p$ , donc d'après  $R(p)$ ,  $v_n \in E_p$  et  $u_{n,p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_{n,p}$  avec  $u_{n,p}, v_{n,p} \in \mathbb{R}_+$ .

$u \in E_p$ , donc  $\sum_n u_{n,p}$  est convergent et  $u_{n,p} \sim v_{n,p}$  donc  $\sum_n v_{n,p}$  converge également.

Alors, d'après le théorème de sommation des équivalents,

$$u_{n,p+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_{k,p} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_{k,p} = v_{n,p+1}.$$

De plus,  $u_{n,p+1}$  et  $v_{n,p+1}$  sont clairement dans  $\mathbb{R}_+$ .

Enfin,  $u \in E_{p+1}$ , donc  $\sum u_{n,p+1}$  converge, donc  $\sum v_{n,p+1}$  converge, ce qui prouve que  $v \in E_{p+1}$ . On en déduit bien  $R(p+1)$ .

D'après le principe de récurrence, la question est bien démontrée.

**17°)** Reprenons les notations de la question 14.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $N(\frac{1}{n}c_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\frac{1}{n}c_n \xrightarrow[N]{N} 0$ .

Cependant  $N\left(\psi_p\left(\frac{1}{n}c_n\right)\right) = N\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_k\right) = 1$ , donc  $\psi_p\left(\frac{1}{n}c_n\right)$  ne tend pas vers  $\psi_p(0) = 0$  au sens de la norme  $N$ . Ceci prouve que  $\psi_p$  n'est pas continue avec la norme  $N$ .

**18°)**

◇ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

$$\sum_{k=0}^n R_k = \sum_{k=0}^n \left( U - \sum_{h=0}^k u_h \right) = (n+1)U - \sum_{0 \leq h \leq k \leq n} u_h = (n+1)U - \sum_{h=0}^n \sum_{k=h}^n u_h,$$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^n R_k = (n+1)U - \sum_{h=0}^n (n-h+1)u_h = (n+1)R_n + \sum_{k=0}^n ku_k.$$

◇ On suppose que  $u$  est absolument convergente d'ordre 1. Ainsi,  $\sum R_n$  est une série convergente de réels positifs.

Or  $\sum_{k=0}^n ku_k = -(n+1)R_n + \sum_{k=0}^n R_k \leq \sum_{k=0}^n R_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} R_k$  et  $\sum nu_n$  est une série de réels positifs, donc d'après le cours,  $\sum nu_n$  est convergente.

Les restes de Cauchy de  $\sum nu_n$  convergent donc vers 0 :  $\sum_{i=n+1}^{+\infty} iu_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Or  $0 \leq nR_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} nu_i \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} iu_i$ , donc d'après le principe des gendarmes,  $nR_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**19°)** On va montrer que la réciproque est fautive en construisant une série  $\sum u_n$  de réels positifs telle que  $nR_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  mais telle que  $\sum R_n$  diverge.

Posons  $u_n = \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)} - \frac{1}{n\ln n}$  lorsque  $n \geq 3$  et  $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ .

La série télescopique  $\sum u_n$  converge car la suite  $\left(\frac{1}{n\ln n}\right)_{n \geq 3}$  converge et  $u_n \in \mathbb{R}_+$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus, pour  $n \geq 2$ ,  $R_n = \frac{1}{n\ln n}$ , donc  $nR_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , mais (cf question 5)



la série  $\sum R_n = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$  diverge.