

## Feuille d'exercices 19. Dérivation et convexité

**Exercice 19.1** : (niveau 1)

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}, f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, f(x) = |\ln x|, f(x) = \cos(\sqrt{x}) \text{ et } f(x) = x|x|.$$

**Exercice 19.2** : (niveau 1)

Étudiez les suites  $(x_n)$  de réels vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x_n - x_n^2$ .

**Exercice 19.3** : (niveau 1)

Montrer que, pour tout  $x \geq 1$ ,  $\left| x \ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 1) \right| \leq \frac{1}{6}(x - 1)^3$ .

**Exercice 19.4** : (niveau 1)

Pour  $t \neq 0$  on pose  $f(t) = \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}$ . Prolongez  $f$  par continuité en 0 ; ce prolongement est-il dérivable, est-il de classe  $C^1$  ?

**Exercice 19.5** : (niveau 1)

$E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $C_1$  et  $C_2$  sont deux parties convexes de  $E$ .

On note  $C$  l'ensemble des milieux des couples de points  $(A_1, A_2)$  où  $A_1 \in C_1$  et  $A_2 \in C_2$ .

Montrer que  $C$  est convexe.

**Exercice 19.6** : (niveau 1)

Trouver les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continues et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2xf(x) = 3 \int_0^x f(t) dt.$$

**Exercice 19.7** : (niveau 1)

Déterminez les applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  convexes et bornées.

---

**Exercice 19.8** : (niveau 1)

Etudiez les suites  $(x_n)$  vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a^2}{x_n} \right),$$

où  $a > 0$ .

**Exercice 19.9** : (niveau 1)

Soit  $f$  une application  $C^1$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f(0) = 0$  et pour laquelle il existe  $a \in ]0, 1[$  tel que  $f(a)f'(a) < 0$ . Montrez qu'il existe  $b \in ]0, 1[$  tel que  $f'(b) = 0$ .

**Exercice 19.10** : (niveau 2)

Montrer que  $x \mapsto x^2 \tan \frac{1}{x} \sin \frac{2}{x}$  est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0. Cette fonction est-elle de classe  $C^1$  en 0 ?

**Exercice 19.11** : (niveau 2)

Soit  $(u_n)$  une suite définie par :  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n \frac{1 + 2u_n}{1 + 3u_n}$ .

Etudiez  $(u_n)$  et donnez un équivalent.

**Exercice 19.12** : (niveau 2)

Soit  $f$  une application paire et dérivable, de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $g(x) = f(\sqrt{x})$ .

Lorsque  $f$  est deux fois dérivable en 0, montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ .

Est-ce encore vrai sans supposer que  $f$  est deux fois dérivable en 0 ?

**Exercice 19.13** : (niveau 2)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et soit  $a \in \mathbb{R}$ .

1°) On suppose que  $f$  est strictement convexe sur  $I$ .

Démontrer que l'équation  $f(x) = a$  admet au plus deux solutions.

2°) On suppose seulement que  $f$  est convexe sur  $I$ . Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) = a$  ?

**Exercice 19.14** : (niveau 2)

On considère deux applications  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1°) Si  $f$  et  $g$  sont continues, montrer que  $\max(f, g)$  est également continue.

2°) Lorsque  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $x_0 \in \mathbb{R}$ , à quelle condition  $\max(f, g)$  est-elle dérivable en  $x_0$  ?

---

**Exercice 19.15** : (niveau 2)

Soit  $f$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , où  $I$  désigne un intervalle inclus dans  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide. On suppose que  $f$  est dérivable sur  $I$ .

1°) Soit  $(a, b) \in I^2$ . On suppose que  $f'(a) < 0$  et que  $f'(b) > 0$ .  
Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

2°) Montrer que  $f'(I)$  est un intervalle (c'est le théorème de Darboux).

**Exercice 19.16** : (niveau 2)

Etudiez les suites telles que :  $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$ .

**Exercice 19.17** : (niveau 2)

1°) Soient  $f$  et  $g$  deux applications de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $]a, b[$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0$ .

2°) Règle de l'Hôpital.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide et  $a \in I$ . Soient  $f$  et  $g$  deux applications de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  continues sur  $I$  et dérivables sur  $I \setminus \{a\}$ . On suppose que  $f(a) = g(a) = 0$  et qu'il existe  $V \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $\forall t \in V \cap (I \setminus \{a\})$   $g'(t) \neq 0$ .

Montrer que s'il existe  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que  $\frac{f'(t)}{g'(t)} \xrightarrow[t \neq a]{t \rightarrow a} l$  alors  $\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow[t \neq a]{t \rightarrow a} l$ .

**Exercice 19.18** : (niveau 3)

1°) Déterminer l'ensemble des applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivables en 0 et telles que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(2x) = 2f(x)$ .

2°) Déterminer l'ensemble des applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivables en 0 et telles que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(2x) = f(x)^2$ .

**Exercice 19.19** : (niveau 3)

Donner l'exemple d'un couple  $(f, g)$ , où  $f$  et  $g$  sont deux applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , non dérivables sur  $\mathbb{R}$  en entier, mais telles que  $f \circ g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 19.20** : (niveau 3)

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(t) = \exp\left(\frac{-1}{t^2}\right)$  si  $t \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .

1°) Montrer qu'il existe une suite  $(P_n)_{n \geq 1}$  de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$ . Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite  $(P_n)$  et donner le degré de  $P_n$ .

2°) Montrer que  $f$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $\forall n \in \mathbb{N}$   $f^{(n)}(0) = 0$ .

3°) Montrer que toutes les racines de  $P_n$  sont réelles.

**Exercice 19.21** : (niveau 3)

Soit  $f$  une application de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f(0) = 0$  et  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Montrer qu'il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels, strictement croissante et telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(a_n) = 0$ .

---

## Exercices supplémentaires :

**Exercice 19.22** : (niveau 1)

Etudier les suites  $(x_n)$  de réels vérifiant la relation, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+1} = e^{x_n}$ .

**Exercice 19.23** : (niveau 1)

Donnez un exemple d'application définie sur  $\mathbb{R}$  admettant un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 mais qui n'est pas deux fois dérivable en 0.

**Exercice 19.24** : (niveau 1)

Démontrez les inégalités suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |e^t - 1 - t| \leq \frac{t^2}{2} e^{|t|}; \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan t > \frac{t}{1+t^2};$$

$$\forall t \in ]1, +\infty[ \quad \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < e < \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t.$$

**Exercice 19.25** : (niveau 2)

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Calculer la dérivée  $n$ -ième de l'application  $x \mapsto e^{x \operatorname{ch} a} \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a)$ .

**Exercice 19.26** : (niveau 2)

Calculer la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $\arctan(t)$ .

**Exercice 19.27** : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|e^t - 1 - t| \leq \frac{t^2}{2} e^{|t|}$ .

2°) Montrer que, pour tout  $t > 0$ ,  $\arctan t > \frac{t}{1+t^2}$ .

**Exercice 19.28** : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout  $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ , il existe un unique  $\theta(t) \in ]0, 1[$  vérifiant  $\sin t = t - \frac{t^3}{6} \cos(t\theta(t))$ .

2°) Montrer que  $\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{1}{\sqrt{10}}$ .

**Exercice 19.29** : (niveau 2)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , justifier l'existence d'une primitive  $n$ -ème de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , notée  $f^{[n]}$ , et démontrer que l'on peut prendre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{[n]}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt.$$

**Exercice 19.30** : (niveau 2)

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dérivable.

1°) Montrez que si  $f'$  est bornée,  $f$  est uniformément continue.

2°) Montrez que si  $|f'(x)| \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$ ,  $f$  n'est pas uniformément continue.

---

**Exercice 19.31** : (niveau 2)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $L_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}[(t^2 - 1)^n]$  : c'est le  $n$ -ième polynôme de Legendre. Montrer qu'il est simplement scindé sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 19.32** : (niveau 2)

Soit  $f$  une application convexe et continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $h \in \mathbb{R}_+^*$  : On pose  $g(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$ . Montrez que  $g$  est convexe.

**Exercice 19.33** : (niveau 2)

Soit  $f$  une application de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  dérivable en 0 et telle que  $f(0) = 0$ . Montrez que  $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(0)}{2}$ .

**Exercice 19.34** : (niveau 2)

Etudiez les suites réelles  $(u_n)$  vérifiant :  $u_{n+1} = 1 - u_n^2$ .

**Exercice 19.35** : (niveau 3)

Soit  $f$  une application de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , telle que  $f(0) = 0$  et telle que  $f'(x) \in [0, 1]$  pour tout  $x \geq 0$ .

Montrer que  $\int_0^x f^3(t)dt \leq \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$ .

**Exercice 19.36** : (niveau 3)

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continue en 0 et telle que  $\frac{f(2x) - f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} a \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est dérivable en 0.

Indication. On pourra commencer par étudier le cas où  $f(0) = 0 = a$ .

**Exercice 19.37** : (niveau 3)

Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$ . Montrez que  $f$  est convexe.

**Exercice 19.38** : (niveau 3)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^\infty$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide. On suppose qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $t \in I$ ,  $f^{(2k+1)}(t) \geq 0$ .

Pour tout  $a \in I$  et  $x \in I$ , on pose  $T_a(x) = \sum_{h=0}^{2k} \frac{(x-a)^h}{h!} f^{(h)}(a)$ .

Montrer que pour tout  $a, a' \in I$  avec  $a < a'$ ,  $T_{a'} - T_a$  est convexe sur  $I$ .

---

**Exercice 19.39** : (niveau 3)

*Lemme de Grönwall* :

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que  $g$  est positive et qu'il existe  $x_0, K \in \mathbb{R}$  tels que, pour tout  $x \geq x_0$ ,

$$f(x) \leq K + \int_{x_0}^x f(t)g(t) dt.$$

Montrer que, pour tout  $x \geq x_0$ ,  $f(x) \leq K \exp\left(\int_{x_0}^x g(t) dt\right)$ .

**Exercice 19.40** : (niveau 3)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^\infty$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  de cardinal infini. On suppose qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $t \in I$ ,  $f^{(2k+1)}(t) \neq 0$ .

Pour tout  $\alpha \in I$  et  $x \in I$ , on pose  $T_\alpha(x) = \sum_{h=0}^{2k} \frac{(x-\alpha)^h}{h!} f^{(h)}(\alpha)$ .

Montrer que les graphes des applications  $T_\alpha$  sont deux à deux disjoints.

**Exercice 19.41** : (niveau 3)

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'application  $y \mapsto \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2y}$  est constante

sur  $\mathbb{R}^*$ . On notera  $g(x)$  cette constante.

Sauf pour la dernière question, on suppose que  $g$  est une application continue sur  $\mathbb{R}$ .

1°) Montrer que  $f$  est dérivable et que  $f' = g$ .

2°) Quelles sont les valeurs possibles pour  $f$  ?

3°) Reprendre l'exercice en supposant maintenant que  $g$  est localement bornée.

**Exercice 19.42** : (niveau 3)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a \neq 0$  et  $a \neq 1$ .

On recherche les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ f(x) = ax + b.$$

1°) Si  $a < 0$ , montrez qu'il n'y a aucune solution.

2°) Notons 
$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax + b$$

Montrez que  $h$  est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Pour  $n \in \mathbb{Z}$  calculez  $h^n$  (au sens de la composition).

3°) On suppose que  $a \in ]0, 1[$ .

Montrez que  $h^{-1} \circ f \circ h = f$ .

En déduire les expressions possibles de  $f$ .

4°) Achevez la résolution de l'exercice.

---

**Exercice 19.43** : (niveau 3)

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ . Montrez que la dérivée  $n$ -ième de  $f$  est de la forme :

$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(1+t^2)^n} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ , où  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ . Prouvez les relations :

$P_{n+1} = (1+X^2)P'_n - (2n+1)XP_n$ ;  $\forall n \geq 1 \quad P_{n+1} + (2n+1)XP_n + n^2(1+X^2)P_{n-1} = 0$ ;

$(1+X^2)P''_n - (2n-1)XP'_n + n^2P_n = 0$ . En déduire que  $P_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} a_k X^{n-2k}$  avec

$$a_0 = (-1)^n n! \text{ et } a_p = (-1)^{n+p} \frac{n!n(n-1)\dots(n-2p+1)}{4^p(p!)^2}.$$

Montrez que les racines de  $P_n$  sont réelles et simples.

**Exercice 19.44** : (niveau 3)

Déterminer toutes les applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{N}, f^{(n_x)}(x) = 0.$$