DM 28 : Moyennes de Cesaro.

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni ce jeudi 28 mars.

Lorsque $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de complexes, on note $C(x)$ la suite $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ y_k = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} x_j.$$

Partie I : Premiers exemples.

1°) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $x_k = e^{ik\theta}$ et $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrer que x n'est pas une suite convergente et que $C(x)$ est une suite convergente.

2°) Soit n un entier avec $n \geq 2$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $x_k = \begin{cases} 1 \text{ si } k \text{ est un multiple de } n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Montrer que $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite convergente et que $C(x)$ est une suite convergente.

Partie II : endomorphismes induits par C.

3°) Montrer que C est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On note ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées de complexes.

4°) Montrer que ℓ^∞ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .

Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \ell^\infty & \longrightarrow & \ell^\infty \\ x & \longmapsto & C(x) \end{array}$ est un endomorphisme.

5°) Pour tout $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, on pose $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$.

Montrer qu'on définit ainsi une norme sur ℓ^∞.

6°) Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \ell^\infty & \longrightarrow & \ell^\infty \\ x & \longmapsto & C(x) \end{array}$ est continue et calculer la quantité $\sup_{\substack{x\in\ell^\infty \\ \|x\|\leq 1}} \|C(x)\|$.

7°) Soient $\sum a_n$ une série de complexes et $\sum b_n$ une série de réels positifs.
On suppose que la série $\sum b_n$ est divergente.
Si $a_n = o(b_n)$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = o\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k\Big)$.

Notons E l'ensemble des suites convergentes de complexes. C'est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞ (on ne demande pas de le démontrer).

8°) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes et $\ell \in \mathbb{C}$. On suppose que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum p_n$ diverge.

Montrer que $\dfrac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} p_j x_j}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} p_j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

En déduire que $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & C(x) \end{array}$ est un endomorphisme.

9°) Montrer que ℓ^∞ est un espace de Banach.

Partie III : valeurs d'adhérence

10°) Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{C}$. Montrer que a est une valeur d'adhérence de la suite x si et seulement si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall N \in \mathbb{N},\ \ \exists n \geq N,\ \ |x_n - a| < \varepsilon$.

11°) Soit $x \in \ell^\infty$. On pose $C(x) = y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|y_k - y_{k-1}| \leq \dfrac{2\|x\|}{k+1}$.

12°) En déduire que si x est une suite de ℓ^∞ à valeurs réelles, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $C(x)$ est un intervalle.

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \displaystyle\sum_{h=1}^{p} h!$ et $v_p = \displaystyle\sum_{h=1}^{p} (2h-1)!$.
On convient que $u_0 = v_0 = 0$.

13°) Montrer que $u_n \sim n!$ et que $v_n \sim (2n-1)!$.

14°) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $j(k) \in \mathbb{N}$ tel que $u_{j(k)} \leq k < u_{j(k)+1}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $x_k = \begin{cases} 1 \text{ si } j(k) \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Ainsi, les premières valeurs de la suite $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont $1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, (24 \text{ fois}), 1, 1, 1, 1, (120 \text{ fois}) \ldots$
On pose à nouveau $C(x) = y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

15°) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $y_{u_p - 1}$.
Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites x et $C(x)$.

Partie IV : Convergence simple des itérés

16°) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes qui converge vers un complexe ℓ.

Soit β un réel tel que $0 < \beta < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{j=0}^{n} \beta^j a_{n-j}$.

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{1-\beta}$.

17°) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de complexes, soit $\beta \in]0,1[$ et $\ell \in \mathbb{C}$.
On suppose que $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \beta v_n + w_n$.

Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{1-\beta}$.

Soit $x \in \ell^\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x^{(n)} = C^n(x)$, où C^n désigne la composée de C avec elle-même n fois. En particulier, $x^{(0)} = x$ et $x^{(1)} = C(x)$.
Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, on notera $x_{n,k}$ la k-ème composante de la suite $x^{(n)}$.

18°) Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

19°) Soit $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que $x_0 = 0$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$,
où ℓ est un complexe non nul.
Montrer que la suite $C^n(x)$ est divergente dans l'espace vectoriel normé ℓ^∞.