DM 28 : un corrigé

Lorsque $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une suite de complexes, on convient de noter x_k sa k-ème composante.

Partie I : Premiers exemples.

1°) $\diamond$ Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $e^{in\theta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{i\theta}e^{in\theta} = e^{i(n+1)\theta}$, donc en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $e^{i\theta}\ell = \ell$, or $e^{i\theta} \neq 1$, car $\theta \in]0, 2\pi[$. Ainsi, $\ell = 0$. Alors $1 = |e^{in\theta}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell| = 0$, donc $1 = 0$, ce qui est faux. Ainsi x est une suite divergente de complexes.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. $[C(x)]_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(e^{i\theta})^k$. $e^{i\theta} \neq 1$, donc $[C(x)]_n = \dfrac{1 - e^{i\theta(n+1)}}{(n+1)(1-e^{i\theta})}$,
puis par inégalité triangulaire, $0 \leq |C(x)_n| \leq \dfrac{2}{(n+1)|1-e^{i\theta}|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, d'après le principe des gendarmes, $C(x)$ converge vers 0.

2°) $x_{nk} = 1 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $x_{nk+1} = 0 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc x possède deux valeurs d'adhérence distinctes. Ainsi, x est une suite divergente.
Posons $y = C(x)$. Soit $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.
Alors $y_{kn+j} = \dfrac{1}{kn+j+1}\displaystyle\sum_{\substack{0\leq h\leq kn+j \\ h\equiv 0\ [n]}} 1 = \dfrac{k+1}{kn+j+1}$,
donc $y_{kn+j} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{kn} = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, pour tout $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $y_{kn+j} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n}$. Alors, d'après le cours, on peut affirmer que la suite $C(x)$ converge vers $\dfrac{1}{n}$.

Partie II : endomorphismes induits par C.

3°) Soit $x, y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
[C(\lambda x + y)]_k &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(\lambda x + y)_j = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(\lambda x_j + y_j) \\
&= \lambda\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}x_j + \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}y_j = \lambda C(x)_k + C(y)_k \\
&= (\lambda C(x) + C(y))_k,
\end{aligned}$$

donc $C(\lambda x+y)=\lambda C(x)+C(y)$, ce qui prouve que C est une application linéaire de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

4°) $\diamond$ Soit $x,y\in\ell^\infty$ et $\lambda\in\mathbb{C}$.
Il existe $M,M'\in\mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $|x_k|\le M$ et $|y_k|\le M'$. Alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $|[\lambda x+y]_k|\le|\lambda||x_k|+|y_k|\le|\lambda|M+M'$, donc la suite $\lambda x+y$ est bornée. Ainsi, ℓ^∞ est stable par combinaisons linéaires. Il est clairement non vide, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
$\diamond$ Par restriction, C reste linéaire.
Soit $x\in\ell^\infty$. Il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $|x_k|\le M$.
Soit $k\in\mathbb{N}$. Alors $|C(x)_k|\le\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}|x_j|\le\dfrac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}M=M$, donc $C(x)\in\ell^\infty$.
Ceci prouve que $\begin{array}{ccc}\ell^\infty & \longrightarrow & \ell^\infty\\ x & \longmapsto & C(x)\end{array}$ est un endomorphisme.

5°) Soit $x,y\in\ell^\infty$ et $\lambda\in\mathbb{C}$.
- On a bien que $\|x\|\ge 0$.
- Supposons que $\|x\|=0$. Alors pour tout $k\in\mathbb{N}$, $0\le|x_k|\le\|x\|=0$, donc $x_k=0$. Ainsi, $x=0$.
- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $|x_k+y_k|\le|x_k|+|y_k|\le\|x\|+\|y\|$, donc $\|x\|+\|y\|$ est un majorant de $\{|x_k+y_k|\ /\ k\in\mathbb{N}\}$. Or le sup est le plus petit des majorants, donc $\|x+y\|=\sup(\{|x_k+y_k|\ /\ k\in\mathbb{N}\})\le\|x\|+\|y\|$. Par la suite, on dira plus rapidement que l'on fait un passage au sup.
- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $|\lambda x_k|=|\lambda||x_k|\le|\lambda|\|x\|$, donc par passage au sup, $\|\lambda x\|\le|\lambda|\|x\|$. Si $\lambda\ne 0$, on peut appliquer l'inégalité précédente en remplaçant (λ,x) par $(\frac{1}{\lambda},\lambda x)$, ce qui donne $\|x\|\le\frac{1}{|\lambda|}\|\lambda x\|$, c'est-à-dire $\|\lambda x\|\ge|\lambda|\|x\|$, donc $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$. De plus, cette égalité est évidente lorsque $\lambda=0$.

On a prouvé que $\|.\|$ est bien une norme sur ℓ^∞.

6°) $\diamond$ Soit $x\in\ell^\infty$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $|[C(x)]_k|\le\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\|x\|=\|x\|$, donc par passage au sup, $\|C(x)\|\le\|x\|$. Ceci prouve d'après le cours que l'application linéaire C est continue.
$\diamond$ Notons $\|C\|=\displaystyle\sup_{\substack{x\in\ell^\infty\\ \|x\|\le 1}}\|C(x)\|$. Soit $x\in\ell^\infty$ tel que $\|x\|\le 1$.
Alors $\|C(x)\|\le\|x\|\le 1$, donc par passage au sup, $\|C\|\le 1$.
Notons $\mathbf{1}$ la suite constante égale à 1. $\mathbf{1}\in\ell^\infty$ avec $\|\mathbf{1}\|=1$ et on calcule que $C(\mathbf{1})=\mathbf{1}$, donc $\|C\|=\displaystyle\sup_{\substack{x\in\ell^\infty\\ \|x\|\le 1}}\|C(x)\|\ge\|C(\mathbf{1})\|=1$.
On a ainsi montré par double inégalité que $\|C\|=1$.

7°) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $A_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k$ et $B_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}b_k$.
Soit $\varepsilon>0$. Il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\ge N_1$, $|a_n|\le\dfrac{\varepsilon}{2}b_n$.

Soit $n \geq N_1$. $|A_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k=0}^{N_1-1} |a_k| + \sum_{k=N_1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{N_1-1} |a_k| + \sum_{k=N_1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} b_k$,
donc $|A_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} b_k + D$ où $D = \sum_{k=0}^{N_1-1} (|a_k| - \frac{\varepsilon}{2} b_k)$ est une quantité indépendante de n.
Or $\sum b_n$ diverge et c'est une série de réels positifs, donc $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $\frac{2D}{\varepsilon} \leq B_n$.
Ainsi, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, $|A_n| \leq \varepsilon B_n$. On a prouvé que $A_n = o(B_n)$.

8°) $\diamond$ $x_n - \ell = o(1)$ donc $p_n x_n - p_n \ell = o(p_n)$, or $\sum p_n$ est une série divergente de réels positifs, donc d'après la question précédente, $\sum_{j=0}^{n} (p_j x_j - p_j \ell) = o\Big(\sum_{j=0}^{n} p_j\Big)$, donc

$$\frac{\sum_{j=0}^{n} p_j x_j}{\sum_{j=0}^{n} p_j} - \ell = o(1),$$ ce qu'il fallait démontrer.

$\diamond$ Soit $x \in E$. Par définition de E, il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $p_n = 1$. Ainsi $\sum p_n$ est une série de réels strictement positifs qui diverge grossièrement, donc d'après le point précédent, $\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} x_j \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. En particulier, ceci prouve que $C(x) \in E$. Par restriction, $x \longmapsto C(x)$ reste linéaire sur E, donc C est un endomorphisme de E.

9°) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de vecteurs de ℓ^∞. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $x_{n,k}$ la k-ème composante de la suite x_n.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$ et $m \geq N$, $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_{n,k} - x_{m,k}| \leq \varepsilon$.
Fixons $k \in \mathbb{N}$. Ce qui précède permet d'affirmer que
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n, m \geq N, \ |x_{n,k} - x_{m,k}| \leq \varepsilon$,
donc que la suite $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, or $\mathbb{C}$ est complet d'après le cours, donc il existe $\ell_k \in \mathbb{C}$ tel que $x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_k$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe à nouveau $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$ et $m \geq N$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_{n,k} - x_{m,k}| \leq \varepsilon$.
Pour $n \geq N$ et $k \in \mathbb{N}$ fixé, on fait tendre m vers $+\infty$. On obtient $|x_{n,k} - \ell_k| \leq \varepsilon$.
Posons $\ell = (\ell_k)_{k\in\mathbb{N}}$. L'inégalité précédente montre que $x_N - \ell$ est bornée, or $x_N \in \ell^\infty$ et on a montré que ℓ^∞ est un espace vectoriel, donc $\ell \in \ell^\infty$. De plus, on a vu que, avec $n \geq N$ fixé, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_{n,k} - \ell_k| \leq \varepsilon$, donc par passage au sup, $\|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$.
On a donc montré que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Ainsi toute suite de Cauchy de ℓ^∞ converge dans ℓ^∞, ce qui conclut.

Partie III : valeurs d'adhérence

10°) $\diamond$ Supposons d'abord que a est une valeur d'adhérence de x. Il existe donc une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $|x_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$. Ainsi, $\{n \in \mathbb{N} \ / \ |x_n - a| < \varepsilon\}$ contient $\varphi([M, +\infty[\cap\mathbb{N})$ qui est de cardinal infini car φ est strictement croissante donc injective. Cela prouve que $\{n \in \mathbb{N} \ / \ |x_n - a| < \varepsilon\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ de cardinal infini, donc c'est une partie non majorée. Ainsi si $N \in \mathbb{N}$, N ne majore pas cet ensemble, donc il existe $n > N$ tel que $|x_n - a| < \varepsilon$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |x_n - a| < \varepsilon$.
Avec $\varepsilon = 1$ et $N = 0$, il existe $\varphi(0) \geq 0$ tel que $d(x_{\varphi(0)}, a) < 1$.
Puis avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $N = \varphi(0) + 1$, il existe $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $d(x_{\varphi(1)}, a) < \frac{1}{2}$.
Pour $k \geq 1$, supposons construits $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, ..., $\varphi(k)$ des entiers tels que
$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(k)$ et $\forall h \in \{0, \dots, k\}\ d(x_{\varphi(h)}, a) < \dfrac{1}{h+1}$.
Avec $\varepsilon = \dfrac{1}{k+2}$ et $N = \varphi(k)+1$, il existe $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ tel que $d(x_{\varphi(k+1)}, a) < \dfrac{1}{k+2}$.
On construit ainsi une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ d(x_{\varphi(n)}, a) < \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
$x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, donc a est une valeur d'adhérence de la suite (x_n).

11°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $y_k - y_{k-1} = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k} x_j - \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} x_j = \frac{x_k}{k+1} - \frac{1}{k(k+1)}\sum_{j=0}^{k-1} x_j$, donc

par inégalité triangulaire, $|y_k - y_{k-1}| \leq \dfrac{\|x\|}{k+1} + \dfrac{1}{k(k+1)}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\|x\| = \frac{2\|x\|}{k+1}$.

12°) Posons à nouveau $C(x) = y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ainsi, $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et d'après la question précédente, $y_n - y_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Notons I l'ensemble des valeurs d'adhérence de y et montrons que I est un intervalle de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une partie convexe de $\mathbb{R}$.
Soit $\alpha, \beta \in I$, avec $\alpha < \beta$. Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$. Il s'agit donc de montrer que γ est une valeur d'adhérence de y.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}$. $y_n - y_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq M$, $|y_{n+1} - y_n| \leq \varepsilon$.
Posons $\varepsilon' = \min(\varepsilon, \gamma - \alpha, \beta - \gamma) \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question 10, il existe $p \geq \max(N, M)$ tel que $|y_p - \alpha| < \varepsilon'$ et il existe $q > p$ tel que $|y_q - \beta| < \varepsilon'$.
Posons $A = \{h \in [p, q]\cap\mathbb{N} \ / \ y_h \leq \gamma\}$. On a $y_p - \alpha < \varepsilon'$, donc $y_p - \alpha < \gamma - \alpha$ puis $y_p < \gamma$.
Ainsi, A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. On peut donc poser $k = \max(A)$.
On a $-y_q + \beta < \varepsilon' \leq \beta - \gamma$, donc $y_q > \gamma$ et $q \notin A$. Ainsi, $y_k \leq \gamma \leq y_{k+1}$.
Alors $k \geq p \geq N$ et $|y_k - \gamma| \leq |y_k - y_{k+1}| < \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

13°) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} 1 \leq \frac{u_n}{n!} &= 1 + \frac{(n-1)!}{n!} + \sum_{h=1}^{n-2} \frac{h!}{n!} \\ &\leq 1 + \frac{1}{n} + \sum_{h=1}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + (n-2) \times \frac{1}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \end{aligned}$$

donc d'après le principe des gendarmes, $\frac{u_n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_n \sim n!$.

Ensuite, $1 \leq \frac{v_n}{(2n-1)!} \leq \frac{u_{2n-1}}{(2n-1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $v_n \sim (2n-1)!$.

14°) Notons $A = \{j \in \mathbb{N} \ / \ u_j \leq k\}$. $u_0 = 0 \leq k$, donc A est une partie non vide de $\mathbb{N}$. De plus, si $j \in A \setminus \{0\}$, alors $k \geq u_j \geq j! \geq j$, donc A est majorée. On peut donc poser $J = \max(A)$. On a alors $u_J \leq k < u_{J+1}$, ce qui prouve l'existence de $j(k)$.
Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $u_j \leq k < u_{j+1}$. Alors $j \in A$, donc $j \leq \max(A) = J$. De plus, si $j < J$, alors $j+1 \leq J$, or la suite (u_n) est croissante, donc $k \geq u_J \geq u_{j+1}$, ce qui est faux. Ainsi, $j = J$, ce qui prouve l'unicité.

15°) $\diamond$ Par sommation par paquets, $y_{u_p-1} = \frac{1}{u_p} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=u_j}^{u_{j+1}-1} x_k$,

donc $y_{u_p-1} = \frac{1}{u_p} \sum_{\substack{0\leq j\leq p-1 \\ j\equiv 0\ [2]}} \sum_{k=u_j}^{u_{j+1}-1} 1 = \frac{1}{u_p} \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor} \sum_{k=u_{2j}}^{u_{2j+1}-1} 1 = \frac{1}{u_p} \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor} (2j+1)!$.

On a montré que $y_{u_p-1} = \frac{v_{\lfloor\frac{p+1}{2}\rfloor}}{u_p}$.

$\diamond$ En particulier $y_{u_{2n-1}-1} = \frac{v_n}{u_{2n-1}} \sim \frac{(2n-1)!}{(2n-1)!} = 1$, donc $y_{u_{2n-1}-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui prouve que 1 est une valeur d'adhérence de y.
De même, $y_{u_{2n}-1} = \frac{v_n}{u_{2n}} \sim \frac{(2n-1)!}{(2n)!} = \frac{1}{2n}$, donc $y_{u_{2n}-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que 0 est une valeur d'adhérence de y.
D'après la question 12, l'intervalle $[0, 1]$ est inclus dans l'ensemble des valeurs d'adhérence de $C(x)$. De plus d'après le début de la question 6, les valeurs de la suite $C(x)$ sont comprises entre 0 et $\|x\| = 1$, or $[0, 1]$ est un fermé, donc toute suite extraite convergente de $C(x)$ converge dans $[0, 1]$. On a montré que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $C(x)$ est égal à $[0, 1]$.
De plus $x_{u_{j(2n)}} = 1$ et $x_{u_{j(2n+1)}} = 0$, donc 0 et 1 sont des valeurs d'adhérence de x. De plus x est à valeurs dans le fermé $\{0, 1\}$, donc de même que ci-dessus, on en déduit que l'ensemble des valeurs d'adhérence de x est égal à $\{0, 1\}$.

Partie IV : Convergence simple des itérés

16°) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = \sum_{j=0}^{n} \beta^j a_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \beta^{n-j} a_j = \beta^n \Big(\sum_{j=0}^{n} \Big(\frac{1}{\beta}\Big)^j a_j \Big)$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, posons $p_j = \Big(\frac{1}{\beta}\Big)^j$. D'après le cours, $\sum p_n$ est une série de réels strictement positifs qui diverge grossièrement, donc on peut utiliser la question 8. En posant $S_n = \sum_{j=0}^{n} \Big(\frac{1}{\beta}\Big)^j$, on a donc $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, où $M_n = \frac{1}{S_n} \sum_{j=0}^{n} \Big(\frac{1}{\beta}\Big)^j a_j$.

Or $u_n = M_n \beta^n S_n$, mais $S_n = \dfrac{1-(\frac{1}{\beta})^{n+1}}{1-\frac{1}{\beta}}$, donc $\beta^n S_n = \dfrac{\beta^n - (\frac{1}{\beta})}{1-\frac{1}{\beta}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{-(\frac{1}{\beta})}{1-\frac{1}{\beta}} = \dfrac{1}{1-\beta}$.

Ceci démontre que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{1-\beta}$.

17°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $v_n = \beta(\beta v_{n-2} + w_{n-2}) + w_{n-1}$, ce qui permet de conjecturer que $v_n = \beta^n v_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j w_{n-1-j}$. On démontre par récurrence que cette formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $\beta \in]0,1[$, donc $\beta^n v_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis d'après la question précédente, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{1-\beta}$.

18°) $\diamond$ Pour tout $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, il est clair que $[C(y)]_0 = y_0$,
donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n,0} = [C^n(x)]_0 = x_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$.

$\diamond$ De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1,1} = [C(x^{(n)})]_1 = \frac{1}{2}(x_{n,0} + x_{n,1}) = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_{n,1}$. D'après la question précédente, avec $\beta = \frac{1}{2}$ et (w_n) égale à la suite constante $\frac{1}{2}x_0$, on en déduit que $x_{n,1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\frac{1}{2}x_0}{1-\frac{1}{2}} = x_0$.

$\diamond$ Soit maintenant $k \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$.

Alors $x_{n+1,k+1} = \dfrac{1}{k+2} \sum_{j=0}^{k+1} x_{n,j} = \dfrac{1}{k+2} x_{n,k+1} + \dfrac{1}{k+2} \sum_{j=0}^{k} x_{n,j}$.

Posons $\beta = \dfrac{1}{k+2}$, $v_n = x_{n,k+1}$ et $w_n = \dfrac{1}{k+2} \sum_{j=0}^{k} x_{n,j}$. Alors $v_{n+1} = \beta v_n + w_n$.

Raisonnons par récurrence forte, en supposant que pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$, $x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$.

Alors $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{k+1}{k+2} x_0$, donc d'après la question précédente,

$x_{n,k+1} = v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\frac{k+1}{k+2}x_0}{1-\frac{1}{k+2}} = x_0$, ce qu'il fallait démontrer.

Ceci prouve donc que la suite $(C^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une suite constante.

19°) x est une suite convergente, donc elle est bornée. Ainsi $x \in \ell^\infty$ et d'après la question 4, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^n(x)$ est aussi un vecteur de ℓ^∞. La question posée a

donc un sens.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$
tel que $C^n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Avec les notations de la question précédente, cela signifie que $\|C^n(x) - y\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_{n,k} - y_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ c'est-à-dire que la suite $(C^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la suite y. Alors la suite $(C^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi simplement vers la suite y : en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq |x_{n,k} - y_k| \leq \|C^n(x) - y\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, pour k fixé, $x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y_k$. Alors d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k = x_0 = 0$, donc y est la suite identiquement nulle et $C^n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $x_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On va en déduire que $\ell = 0$, ce qui constituera une contradiction et achèvera la preuve.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\|C^n(x)\| \leq \varepsilon$.
En particulier, $\|C^N(x)\| \leq \varepsilon$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_{N,k}| \leq \varepsilon$,
mais d'après la question 8, on montre par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^n(x)$ est une suite qui converge vers ℓ, donc $x_{N,k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Ainsi, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $|x_{N,h} - \ell| \leq \varepsilon$. On en déduit que $|\ell| \leq |\ell - x_{N,h}| + |x_{N,h}| \leq 2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, donc $\ell = 0$.