DM 30 : énoncé

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni ce jeudi 18 avril.

Soit f une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère la série de terme général $u_n(x) = f(n+x) - f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, lorsque cette série est convergente, on considère la fonction F définie par $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. On étudie les propriétés de F connaissant certaines propriétés de f.

Première partie.

1°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante notée (C_1) portant sur f, pour que le nombre $F(1)$ existe.
Etudier dans chacun des exemples suivants, si la condition (C_1) est satisfaite et calculer $F(1)$ lorsque ce nombre existe :

1. $f_1 \ : \ x \longmapsto \left(\dfrac{|x|^\alpha}{1+|x|^\alpha}\right)^x$, où α est un réel donné.
2. $f_2 \ : \ x \longmapsto \sin[(4x + \sqrt{|x|})\frac{\pi}{2}]$.
3. $f_3 \ : \ x \longmapsto \sin[(2x + \sqrt{|x|})\frac{\pi}{2}]$.
4. $f_4 \ : \ x \longmapsto \sin\left(\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\pi\right)$.

2°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante (C_2) portant sur f, pour que le nombre $F(2)$ existe.
Comparer les deux conditions (C_1) et (C_2). Etudier les exemples f_2 et f_3 précédents.

3°) **a)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante (C_p) pour que $F(p)$ existe.
b) Préciser $F(0)$.
On suppose dans cette seule question que la condition (C_1) est vérifiée.
Lorsque $p \in \mathbb{N}$, calculer $F(p+1) - F(p)$ en utilisant f.
Quelle est la limite de $F(p+1) - F(p)$ lorsque l'entier p tend vers $+\infty$.

4°) On suppose dans cette seule question que la série de terme général $f(n)$ est convergente. On note S sa somme : $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$.
Montrer que $F(p)$ existe quel que soit $p \in \mathbb{N}$.
Montrer que la série de terme général $F(p+1) - F(p)$ est convergente.
Calculer au moyen de S sa somme $\sum_{p=0}^{+\infty} (F(p+1) - F(p))$.

Deuxième partie.

Dans cette partie, on suppose que f est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^*$ et qu'il existe trois constantes $N \in \mathbb{N}^*$, $K \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in]1, +\infty[$ telles que

$$\forall x \geq N, \ \ |f'(x)| \leq \frac{K}{x^\alpha}.$$

1°) Soit x un réel fixé distinct d'un entier strictement négatif.
a) En utilisant une majoration de $|f(x+n) - f(n)|$ pour n assez grand, montrer que la fonction F est définie en x.
b) Que peut-on en déduire pour $f(p)$ lorsque p entier tend vers $+\infty$?
Montrer $f(x)$ admet une limite finie lorsque x réel tend vers $+\infty$.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $x' \in \mathbb{R}_+^*$ deux réels fixés.
On pose $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} (f(x+n) - f(n))$, le nombre N étant celui défini précédemment.
a) Montrer que $|S_N(x) - S_N(x')| \leq NA|x - x'|$, où $A = \sup\{|f'(y)| \ / \ y \in [1, +\infty[\}$ (on commencera par démontrer l'existence de cette borne supérieure).
b) Montrer une inégalité du même type pour la somme $\sum_{n=N+1}^{+\infty} (f(x+n) - f(x'+n))$, et en déduire qu'il existe une constante L telle que $|F(x) - F(x')| \leq L|x - x'|$.
c) Montrer que la restriction de F sur $\mathbb{R}_+$ est continue.

3°) Soit de nouveau x un réel distinct d'un entier strictement négatif.
a) Calculer $F(x+1) - F(x)$ en utilisant f et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
En déduire que F est continue sur $]-1, 0]$, puis sur l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers strictement négatifs.
b) Montrer que $\lim_{x \to -1} [F(x) - f(1+x)]$ existe et qu'elle est égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} [f(n) - f(n+1)]$ en convenant que $f(0) = 0$.

c) Plus généralement, lorsque p est un entier strictement positif, montrer que $\lim\limits_{x \to -p} [F(x) - f(x+p)]$ existe et qu'elle est égale à $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} [f(n-p) - f(n)]$ en convenant à nouveau que $f(0) = 0$.

4°) On suppose dans cette question que f est impaire et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
On définit alors G sur l'ensemble des réels différents d'un entier relatif par :

$$G(x) = F(x) - F(-x) + f(x).$$

a) Montrer que G est impaire périodique de période 1.
b) Déduire des résultats précédents que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $G(x) - f(x+p)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-p$.
c) Déduire de ce résultat et de ceux de la question précédente que

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq |p|}}^{+\infty} (f(p+n) - f(-p+n)) = -f(p) - f(2p),$$

pour tout entier relatif p différent de 0.

5°) Déterminer les sommes suivantes, après avoir montré leur convergence :

$$s_1 = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}, \quad \text{où } p \in \mathbb{N}^*,$$

$$s_2 = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n+p}} - \frac{\varepsilon(n-p)}{\sqrt{|n-p|}} \right], \text{ où } p \in \mathbb{N}^*, \varepsilon(n-p) \text{ désignant le signe de } n-p,$$

$$s_3 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2}.$$